

Mémoires de l'Académie impériale des sciences de ...

Imperatorskai︠a︡ akademīi︠a︡ nauk (Russia)

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

SAINT-PÉTERSBOURG.

SIXIÈME SÉRIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES.

TOME VIII.

PREMIÈRE PARTIE:

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

TOME VI.



SAINT-PÉTERSBOURG.

IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1857.

En vente chez MM. Eggers et Comp., libraires, Commissionnaires de l'Académie, Perspective de Nevsky Nº 1/10, et à Leipzig chez M. Léopold Voss.

Prix 6 Roub. 25 Cop. arg. pour la Russie; 6 Thlr. 28 Ngr. pour l'étranger.



MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

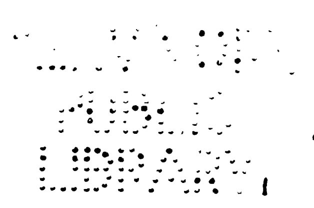
SAINT-PÉTERSBOURG.

SIXIÈME SÉRIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

TOME VI.

Avec 13 planches.



SAINT-PETERSBOURG.

IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1857.

En vente chez MM. Eggers et Comp., libraires, Commissionnaires de l'Académie, Perspective de Nevsky Nº 1/10, et à Leipzig chez M. Léopold Voss.

Prix 6 Roub. 25 Cop. arg. pour la Russie; 6 Thlr. 28 Ngr. pour l'étranger.



TABLE DES MATIÈRES.

EXPÉDITIONS CHRONOMÉTRIQUES

DE

1845 et 1846

PAR

M. OTTO STRUVE.

(LU LE 13 NOVEMBRE 1849.)

EXPÉDITIONS CHRONOMÉTRIQUES

DE

1845 et 1846

PAR

M. Otto Struve.

—

(Lu le 13 novembre 1849.)

PREMIÈRE PARTIE.

—

EXPÉDITIONS CHRONOMÉTRIQUES DE 1845.

I. EXPOSÉ HISTORIQUE DES OPÉRATIONS DE 1845.

§ 1. Introduction.

Le but des expéditions chronométriques de 1845 était, en premier lieu, de déterminer exactement, à l'aide du transport du temps, les différences en longitude entre l'Observatoire central de Poulkova et les observatoires de Moscou et de Varsovie. Les latitudes de ces deux lieux sont déjà connues de très près, et il y a lieu d'espérer que les puissants moyens instrumentaux dont actuellement peuvent disposer ces deux observatoires, nous fourniront sous peu ces quantités, avec le plus haut degré d'exactitude. Nous n'avions donc qu'à nous occuper de la détermination absolue du temps, sur les différents points, et du transport du temps d'un point à l'autre, à l'aide des chronomètres. Les méthodes générales, soit du calcul, soit des observations, que nous avons suivies, se trouvent exposées dans les rapports sur nos expéditions chronométriques de 1843 et 1844, qui ont mené à la connaissance exacte de la longitude de Poulkova comptée de Greenwich. Dans mon rapport actuel, je n'aurai donc qu'à donner les résultats des opérations, en indiquant cependant en quels points elles différaient de nos opérations antérieures.

Tant entre Poulkova et Moscou qu'entre Poulkova et Varsovie, le transport des chronomètres devait se faire entièrement par terre, tandis que, dans les expéditions antérieures, nous avions l'avantage de pouvoir envoyer nos chronomètres, d'un endroit à l'autre, au moins pour la plus grande partie de la distance, par mer à bord des bateaux à vapeur. Nous craignions d'abord que le transport des chronomètres par terre, en voitures, n'exerçât une influence désavantageuse sur la régularité des marches; mais l'expérience nous a prouvé que, tout au contraire, les marches des chronomètres, pendant les transports par terre, sont considérablement plus régulières, que dans les transports par mer. Ce résultat inattendu doit bien être attribué en partie aux soins particuliers que nous avions voués à l'emplacement des chronomètres, pour

les garantir contre les secousses et les tressaillements de la voiture; de l'autre côté, il parait hors de doute que les mouvements des vaisseaux, sur tout ceux qui les font tourner en direction horizontale, et les masses de fer plus ou moins magnétiques, n'exercent une influence beaucoup plus importante sur les résultats donnés par les chronomètres, que ne font les tressaillements de la voiture. Ceux-ci, en agissant d'une manière à peu près constante, peuvent bien altérer un peu la marche moyenne des chronomètres pendant le transport; mais, comme cette action a lieu tant en allant, qu'en revenant, les longitudes n'en seront point influencées. Des secousses fortes qui arrivent de temps à autre, dans un voyage par terre, pouvant produire des sauts irréguliers dans la marche des chronomètres, devaient être soigneusement évitées, ou (puisqu'il est presque impossible de les éviter entièrement) il fallait tâcher au moins de mettre les chronomètres, autant que possible, à l'abri de leur influence pernicieuse. C'était donc un objet d'importance que de choisir une voiture dont les ressorts étaient en même temps très élastiques et assez forts. Dans notre voiture de voyage la partie antérieure fut matelassée, pour y placer les boîtes qui contenaient les chronomètres. Dans ces boîtes, les chronomètres, au nombre de 6 à 12, étaient fermement enchâssés, sans détruire toutefois la pression élastique tant d'en haut que des côtés. Ces boîtes furent directement placées sur les matelas, et retenues dans leur position à l'aide de plusieurs coussinets convenablement appliqués. De cette manière nous pouvions être sûrs, que, si quelques secousses fortes de la voiture avaient lieu, au moins l'influence sur les chronomètres en devait être considérablement affaiblie. Heureusement l'état excellent des chaussées, tant entre Poulkova et Moscou, qu'entre Poulkova et Varsovie, n'admettait guère la crainte de secousses fortes, si ce n'était sur les rues pavées des villes qu'on devait passer, et dans la descente sur les radeaux à l'aide desquels on traverse plusieurs rivières. Dans ces endroits, pour affaiblir l'intensité des secousses, l'ordre strict était donné de ralentir la course de la voiture, et de n'avancer qu'au pas. Un conducteur que le Directeur du département des postes M. de Prianichnikov avait eu la bonté de mettre à notre disposition, avait à surveiller l'exécution de cet ordre, à veiller en outre sur le bon état de la voiture, et à nous assister en toutes occasions.

Tous les chronomètres furent montés régulièrement à une heure fixe, 7 heures du matin. Cette besogne fut confiée à deux officiers du Corps des Topographes, MM. Schvarev et Glotov, qui à tour de rôle ont conduit le transport des chronomètres dans les différentes courses. Ils avaient à veiller que les chronomètres se trouvassent toujours bien placés et dans un arrangement prescrit. En outre, ils avaient à comparer chaque matin, à l'heure où les chronomètres furent montés, un chronomètre non compensé, dont nous parlerons en bas plus en détail, avec plusieurs des autres chronomètres. Ce chronomètre nous devait rendre un double service, savoir de donner la somme des températures qui avaient agi, pendant les voyages, sur les chronomètres, et d'indiquer la marche des températures d'un jour à l'autre. Je remarque ici qu'à cause des matelas épais et des coussinets qui entouraient les chronomètres de tous côtés, les changements de température, dans l'intérieur de ces boîtes, devaient être considérablement moins rapides que dans l'atmosphère. C'est encore un avantage essentiel de notre manière d'emplacer

les chronomètres, et qui, à ce que je crois, a beaucoup contribué à l'exactitude et l'accord des résultats. D'après toutes nos expériences rien n'est plus préjudiciable à la marche régulière des chronomètres que les changements brusques de température.

Il était arrêté, d'exécutér, entre chaque couple de points à joindre, quatre voyages complets. La distance entre les observatoires de Poulkova et de Moscou est de 660 verstes. Cette distance est parcourue d'ordinaire dans l'espace de 60 à 70 heures. Or, les départs de Poulkova étant fixés au vendredi soir de chaque semaine, les chronomètres arrivaient à Moscou le lundi suivant de bon matin. Puis, ils quittaient Moscou la nuit suivante, dès que la détermination du temps était achevée, et ils étaient de retour à Poulkova le jeudi. Un voyage complet entre ces deux points pouvait donc être fait dans le courant d'une semaine. Par conséquent, pour toute la jonction des observatoires de Poulkova et de Moscou, quatre semaines nous ont suffi.

Pour l'expédition entre Poulkova et Varsovie, dont la distance relative est de 1064 verstes, les moments des départs et des arrivées des chronomètres ne pouvaient être fixés d'avance qu'approximativement. Le voyage plus long et le passage de la frontière de la Pologne pouvaient donner lieu à des retards imprévus. Mais les ordres émis de la part des gouvernements respectifs, ont produit que le passage de la frontière ne nous a jamais arrêté plus de deux ou trois heures. Un voyage entre Poulkova et Varsovie se faisait avec commodité dans l'espace de 5 jours; un voyage complet, en allant et retournant, durait moins de 10 jours, auxquels s'ajoutent un jour de repos à Varsovie et un ou deux jours de repos à Poulkova, temps qui était destiné à faire la révision soignée de la voiture. C'est ainsi qu'en moyenne nous pouvons accepter 12 jours, comme durée d'un voyage complet, de Poulkova à Varsovie et retour, y compris les séjours sur les deux stations, ce qui fait pour la durée totale de cette expédition, composée de quatre courses complètes, à peu près sept semaines.

Le nombre des chronomètres qui étaient à notre disposition pour le transport du temps, était de 40. J'en donnerai l'énumération détaillée dans un article suivant. De ce nombre, 28 devaient être montés tous les jours. Les 12 autres chronomètres, envoyés exprès par M. Dent de Londres, pour nos expéditions de cette année, nous furent remis par M. R. Rippon, neveu et fils adoptif de M. Dent.

Ces chronomètres (chronomètres hebdomadaires) étaient construits de sorte qu'ils devaient être montés une fois tous les huit jours. Cet arrangement nous fournit l'idée de gagner, à leur aide, une seconde détermination de la longitude de Moscou, entièrement indépendante de la détermination principale que nous devaient fournir les 28 autres chronomètres. Les chronomètres hebdomadaires n'ayant point besoin d'être montés en chemin, il était possible de les envoyer de Pétersbourg à Moscou par la malle-poste, sous la surveillance du conducteur de la poste. Or ce second envoi pouvait être exécuté sans qu'il réclamât une augmentation considérable ni des frais ni du personnel actif. Les malle-postes quittent les deux capitales deux fois par jour. Nous avions donc le choix libre des jours du départ, et nous les avons fixés de sorte qu'ils tombaient exactement au terme moyen entre deux départs consécutifs de l'envoi principal des autres chro-

nomètres; ce qui fit que presque au même moment où l'envoi principal quittait Moscou pour retourner à Poulkova, le second envoi partait de Poulkova dans la direction opposée, et vice versa. Les moments des départs et des arrivées des malle-postes, dans les deux capitales, étant exactement réglés, un employé des observatoires respectifs se rendit à l'heure connue à l'hôtel des postes, soit pour y porter la boîte, qui contenait les chronomètres hebdomadaires qui devaient partir, soit pour la recevoir des mains du conducteur arrivé. Le même employé avait à surveiller que la boîte fut placée dans un endroit convenable de la voiture, où elle pouvait rester sans être touchée pendant le voyage. Cette boîte était également entourée de matelas épais pour garantir les chronomètres, tant contre les secousses fortes, que contre les changements rapides de température. Le nombre des voyages de ce second envoi devait être le même que pour l'envoi principal.

Par rapport à Varsovie il y avait des obstacles qui s'opposaient à l'exécution de ce second envoi. A la frontière du royaume de Pologne la malle-poste change de voitures et de conducteurs, et nous ne voulions point courir le risque d'un accident qui pouvait arriver aux chronomètres à cette occasion. Par cette raison, nous avons préféré de placer aussi les 12 chronomètres hebdomadaires dans la même voiture qui menait les autres chronomètres, et d'envoyer, sur cette seconde ligne de jonction, toute notre collection de 40 chronomètres toujours à la fois. De même que dans l'expédition entre Poulkova et Moscou, les chronomètres hebdomadaires ne furent montés qu'une fois pour chaque voyage entre Poulkova et Varsovie, aux moments de leurs départs de ces deux lieux.

Je passerai sous silence nombre de dispositions et d'arrangements préalables, qui, à ce qu'on sait, accompagnent toujours l'organisation des expéditions scientifiques. Toutes ces dispositions ayant été prises pendant le mois d'avril et de mai 1845, rien ne nous empêcha de commencer les voyages. Le 29 mai les chronomètres quittèrent Poulkova pour la première fois, sur la route de Moscou. Le dernier retour des chronomètres, de Moscou, celui des chronomètres hebdomadaires envoyés par la malle-poste, eut lieu le 30 juin. Les courses de Moscou étant achevées, les voyages de Varsovie ne pouvaient point commencer immédiatement, parce qu'il fallait faire encore plusieurs arrangements pour cette seconde ligne de jonction. Déjà avant le commencement des voyages de Moscou, M. Baranovski, astronome de l'observatoire de Varsovie (directeur de cet établissement depuis la mort de M. Arminski), ayant promis sa coopération, s'était rendu à Poulkova, sur l'invitation de mon père, pour se familiariser avec nos méthodes d'observation, et pour déterminer son équation personelle par rapport à nous. Il resta à Poulkova pendant toute la durée de l'expédition de Moscou. Les voyages de Moscou étant terminés, je me rendis avec M. Baranovski à Varsovie, pour y faire exécuter quelques changements indispensables dans l'instrument des passages de cet observatoire, et pour y prendre les dispositions nécessaires pour notre expédition. Ces arrangements retardèrent le commencement des opérations sur la seconde ligne, de deux à trois semaines, et ce retard fut encore augmenté par le transport des instruments de Valdai à Vilkomir, points intermédiaires situés sur les deux lignes, et dont je parlerai dans le second article; enfin par la construction du petit observatoire

temporaire à Vilkomir. Le premier départ des chronomètres de Poulkova à Varsovie eut lieu le 25 juillet, et le dernier retour à l'observatoire central le 13 septembre.

En comptant le commencement de nos expéditions de l'année 1845, depuis le jour du premier départ d'un individu attaché à l'expédition, pour se rendre, de Poulkova, sur sa place d'activité, et en acceptant pour la fin le jour du dernier retour à Poulkova (le 1 octobre), nous trouvons que l'ensemble des opérations de cette année a duré exactement 5 mois.

Dans ma fonction de dirigeant des expéditions, je me rendis à Moscou avec le premier envoi des chronomètres, pour examiner, si dans ce lieu, ainsi qu'au point intermédiaire Valdai, tous les arrangements étaient pris conformément aux dispositions. Je restai à Moscou quelques jours pour y attendre l'arrivée du premier envoi des chronomètres par la malle-poste, et pour en arranger les envois futurs. Ce ne fut donc qu'avec le second retour des 28 chronomètres, que je pus retourner à Poulkova. J'ai mentionné déjà que plus tard je me rendis à Varsovie, où j'attendis également la première arrivée des chronomètres avant de retourner à Poulkova. Il s'en suit que j'ai été absent de l'observatoire de Poulkova pendant un temps considérable des opérations. Il fallait donc confier la détermination du temps à quelqu'un qui n'était pas obligé de quitter l'observatoire dans ce temps. Les autres astronomes de l'observatoire étant tous plus ou moins occupés d'autres travaux, mon père se chargea lui-même, pendant mon absence, de l'exécution des observations nécessaires pour notre but. Pour plus d'uniformité il continua la série d'observations jusqu'à la fin des deux expéditions.

M. Döllen, mon ancien collaborateur dans l'expédition entre Altona et Greenwich, fut installé à Moscou, pour la durée de l'expédition, pour y faire les observations astronomiques. Enfin, comme il a été dit, M. Baranovski fut chargé de la détermination du temps à Varsovie.

Les comparaisons des chronomètres de voyage avec la pendule d'observation, furent exécutées à Poulkova par moi ou, dans mon absence, par MM. Sabler et Peters, à Moscou par M. Döllen, à Varsovie par M. Prazmovski, adjoint de cet observatoire. Toutes ces comparaisons se faisaient à l'aide du même chronomètre Kessels 1290, de treize battements en six secondes, qui nous avait servi, pour le même but, dans les expéditions antérieures.

Les observations faites en chaque lieu pour la détermination du temps absolu, ont été réduites une fois par l'astronome qui les avait exécutées. Un second calcul de réduction, ou une révision du premier a été fait, dans tous les cas, par mon père ou par moi. Dans le calcul des longitudes j'ai eu l'assistance de MM. W. Struve, Döllen, Baranovski et Alexandrov, de sorte que chaque longitude fut calculée deux fois. C'est ainsi que tous les calculs principaux des expéditions ont été soumis aux contrôles nécessaires.

§ 2. Les stations intermédiaires, Valdai et Vilkomir.

Il était convenu qu'à côté de notre but principal de fixer les longitudes des deux observatoires, les positions de deux points intermédiaires, situés sur les routes de jonction à peu près à mi-chemin, devaient être déterminées par nos expéditions chronométriques de 1845.



Le choix de ces deux points intermédiaires fut soumis à la condition qu'ils se trouvassent dans le voisinage d'un ou de plusieurs points qui forment les triangles de première classe dans les grandes opérations géodésiques, exécutées par l'État Major Impérial. D'après une consultation avec M. le Général de Toutchkov, directeur du Dépôt Topographique, le choix tomba sur les deux villes de Valdai et de Vilkomir. La première de ces deux villes se trouve presqu'exactement à égale distance de Poulkova et de Moscou. Simultanément avec nos opérations, le capitaine Voinov exécuta les opérations trigonométriques dans les environs de cette ville, et joignit notre lieu d'observation avec son réseau de triangles. L'autre point Vilkomir se trouve un peu plus près de Varsovie que de Poulkova, étant à la distance de 442 verstes du premier et de 622 du second de ces deux lieux. Le canevas des triangles de première classe, qui fait la base des grandes opérations géodésiques, exécutées depuis plus de trente ans sous la direction du Lieutenant-Général de Tenner, passe à une petite distance de Vilkomir. Un point dans cette ville, l'ancienne église catholique, a été même lié par le Général Tenner, vers l'an 1820, avec son réseau trigonométrique. Mais d'un côté ce point n'était qu'un point de trosième classe, dans les opérations du Général Tenner, et par conséquent la jonction faite par lui avec le réseau des triangles de première classe, ne pouvait être regardée comme suffisamment exacte; de l'autre côté le point lui-même, l'ancienne église de St. Pierre n'existait plus et, après un laps de temps de près de trente ans, il était même difficile d'en vérifier exactement la position. Par ces raisons, il était nécessaire de faire une nouvelle jonction géodésique entre notre observatoire temporaire de Vilkomir et deux autres points de la triangulation du Général Tenner, et dont l'identité fut constatée. Cette opération devait être exécutée par l'astronome établi à Vilkomir pour le temps de notre expédition, dans les intervalles entre les différentes arrivées des chronomètres.

Les observations à faire à Valdai et Vilkomir, furent confiées à M. Alexandrov, lieutenant du corps des topographes et ancien élève de mon père. On verra dans ce rapport, que cet officier habile s'est acquitté de sa commission avec autant de zèle que d'intelligence *).

Avant de commencer les opérations, tous les observateurs se comparaient entre eux, pour évaluer leurs équations personelles. Il s'entend que M. Alexandrov était aussi du nombre. A cette occasion, les premières comparaisons faites avec lui, donnaient le résultat étrange que M. Alexandrov observait les passages en différents jours d'une manière très différente; la variation de son équation personnelle montait jusqu'à 1,2 secondes en temps. Il est connu que presqu'aucun astronome n'est parfaitement constant dans sa manière d'observer les passages, mais l'inconstance ne s'élève d'ordinaire, qu'à une très petite fraction de seconde, et s'élimine de très près dans la moyenne des observations de plusieurs nuits. Cependant l'inconstance des passages

*) Pendant que ce rapport fut écrit, la nouvelle affligeante nous est parvenue que M. Alexandrov qui depuis était chargé des observations astronomiques de la triangulation qui se fait, sous la direction du Colonel Chodzko, dans les provinces Transcaucasiennes, y a succombé à l'influence du climat et aux efforts extraordinaires que réclame, dans ce pays montagneux, l'exécution des opérations géodésiques et astronomiques. C'est à l'occasion de la mémorable ascension de l'Ararat, faite en 1850 sous les ordres du Colonel Chodzko, qu'il fut atteint par la maladie, à laquelle il succomba peu de mois après.



de M. Alexandrov nous parut trop forte, pour qu'on pût lui confier la détermination du temps à Valdai, où il s'agissait de fractions minimes de la seconde. Par ces motifs, en chargeant M. Alexandrov des observations à faire pour la détermination de la latitude, ainsi que des comparaisons des chronomètres et de tous les arrangements nécessaires à Valdai, pour l'expédition, nous prîmes la résolution d'envoyer encore un astronome à Valdai pour l'observation du temps. Heureusement M. Liapounov, astronome de Kazan, séjournant à cette époque à Poulkova, eut, sur notre proposition, l'obligeance de se rendre à Valdai pour le but indiqué.

Après la fin de l'expédition de Moscou, nous fîmes plusieurs nouvelles séries de comparaisons avec M. Alexandrov. Les résultats de ces séries en s'accordant entre eux de très près pour les différents jours d'observation, nous portèrent à croire que l'inconstance des passages de M. Alexandrov n'avait existé que dans le premier temps de notre expédition. Cette opinion était fondée sur la remarque faite en plusieurs occasions que, pour les astronomes qui pendant un temps considérable ont été hors d'habitude d'observer les passages, il faut un certain temps, au moins l'habitude de plusieurs soirs, pour s'approprier de nouveau une observation constante. Or, comme ce cas avait eu lieu pour M. Alexandrov, nous avons cru superflu d'envoyer encore un autre observateur à Vilkomir. C'est donc lui qui a fait, dans cette seconde place, aussi les observations pour la détermination du temps.

Avant le commencement de nos opérations, un petit observatoire temporaire devait être construit à Valdai pour y placer l'instrument des passages auquel MM. Liapounov et Alexandrov devaient observer. M. Alexandrov fut chargé de cette construction qui eut pour modèle la maisonnette que M. Airy avait fait construire à Greenwich, pour notre expédition chronométrique de 1844, et dont j'ai donné une description dans mon rapport sur la dite expédition. Après la fin de l'expédition de Moscou, tous les instruments qui avaient été employés à Valdai, devaient être transportés à Vilkomir, le point intermédiaire sur la route de Poulkova à Varsovie. Ce transport ainsi que la construction de la maisonnette d'observation à Vilkomir furent également exécutés sous la surveillance de M. Alexandrov, et c'est à son zèle que nous sommes redevables que l'intervalle entre la fin de l'expédition de Moscou et le commencement de celle de Varsovie, n'a pas été plus long que de quatre semaines.

La direction des postes avait donné l'ordre que la malle-poste qui portait les chronomètres hebdomadaires, devait s'arrêter pour une demie heure à chaque passage par Valdai, pour la comparaison des chronomètres avec les horloges d'observation. Cependant, étant persuadés que les 28 autres chronomètres, 8 fois comparés à Valdai, fourniraient une interpolation parfaitement exacte de la longitude de cette place, nous avons préféré de ne pas profiter de cette permission. A Vilkomir la comparaison des chronomètres hebdomadaires a été omise également.

Pendant mon séjour à Varsovie, j'avais l'occasion de consulter M. le Général Tenner sur les points de sa triangulation, qui seraient le plus favorablement situés pour l'exécution de la jonction géodésique entre notre observatoire temporaire de Vilkomir et son réseau de triangles. M. de Tenner eut la bonté de m'indiquer pour ce but les églises paroissiales de Nidoki et de

Dseveltova. Le premier de ces deux points se trouve à une distance de 12 verstes, l'autre de 10 verstes à peu près de Vilkomir, et il y avait lieu de supposer que les deux édifices auxquels se rapportaient les mesures du Général Tenner, existaient encore actuellement. Par des renseignements obtenus sur les lieux, M. Alexandrov s'est persuadé de l'exactitude de cette supposition. L'église de Nidoki étant un point de première classe, dans le réseau du Général Tenner, et celle de Dseveltova appartenant à un triangle de seconde classe, elles remplissaient les conditions stipulées. Pour l'exécution de la jonction géodésique entre Vilkomir et ces deux points, tous les instruments furent fournis à M. Alexandrov, de la part de l'Observatoire central.

§ 3. Les instruments et les chronomètres.

Tous les instruments astronomiques employés dans nos expéditions, à l'exception de ceux dont on s'est servi à Varsovie, appartiennent à l'Observatoire central, et sont décrits dans l'ouvrage *Description de l'Observatoire central de Poulkova.* Il suffira donc, d'en faire l'énumération et de les citer d'après cet ouvrage. Je commencerai par l'énumération des instruments et des horloges d'observation; suivra celle des chronomètres de voyage.

a) A POULKOVA.

La grande lunette méridienne de l'Observatoire étant constamment employée pour d'autres travaux scientifiques, c'était le second instrument des passages d'Ertel, de 3,0 pouces d'ouverture, qui fut employé pour la détermination du temps. On en trouve une représentation dans la *Description de l'Observatoire central*, planche XXI, fig. 3, et la description dans le même ouvrage pag. 209. Il a son emplacement dans le petit observatoire détaché Sud-Ouest, et se trouve à une distance de 124, 3 pieds anglais du centre de l'Observatoire, dans la direction du parallèle, ce qui répond à une différence du temps de $0^s,162$.

Les observations des passages se firent à l'aide d'une pendule d'Utzschneider, établie dans la même tour. Mais cette pendule, d'une qualité inférieure, étant exposée à des changements rapides de température, mon père eut la précaution de la comparer soigneusement avec la pendule normale de Kessels, établie dans la salle centrale. Cette comparaison des deux pendules se fit à l'aide du chronomètre Kessels 1294, réglé sur le temps moyen, par l'observation des coïncidences, tant avant le commencement, qu'après la fin de chaque série d'observations faites pour la détermination du temps, et quelquefois même, en sus, au milieu des observations, si elles avaient été continuées très long temps. La pendule normale de Kessels était destinée à garder le temps jusqu'à l'arrivée des chronomètres de voyage.

b) A MOSCOU.

Pour les observations à faire à Moscou, un des deux instruments des passages était destiné, dont nous nous étions servis dans l'expédition entre Altona et Greenwich. M. Döllen choisit celui qu'il avait employé lui même à l'occasion précédente. La description et une repré-

sentation de cet instrument se trouvent dans mon rapport sur la dite expédition. Mais il faut mentionner ici que les petits défauts dans la construction de cet instrument qui nous avaient produit tant de trouble dans l'expédition antérieure, furent soigneusement corrigés avant son nouvel usage. La suite en fut, que tous les résultats obtenus à l'aide de cet instrument, étaient d'un accord admirable; toute la variabilité de la collimation et les sauts irréguliers, observés antérieurement à différentes réprises dans l'inclinaison de l'axe, ayant entièrement disparus.

L'instrument des passages fut établi dans un petit pavillon de l'observatoire de Moscou, de 39 pieds seulement à l'Est du lieu de la lunette méridienne principale de cet établissement. Or, pour effectuer la réduction des temps observés dans notre instrument, sur le lieu de l'instrument principal de l'observatoire de Moscou, nous n'avons qu'à ajouter — 0,ˢ045 aux corrections trouvées des horloges.

Au commencement, M. Döllen observait les passages à l'aide du chronomètre Kessels 1403, réglé sur le temps sidéral, et qui appartient à l'observatoire de Moscou. Plus tard il le trouvait plus exact et plus commode, d'observer les passages sur une pendule travaillée dans l'atélier d'Utzschneider et Fraunhofer, et établie dans le même petit pavillon. L'observatoire de Moscou possède en outre une très belle pendule, travaillée par Kessels et réglée sur le temps sidéral. Par conséquent les horloges d'observation furent comparées, avant le commencement, et après la fin de chaque série d'observations, avec cette dernière pendule, à l'aide d'un chronomètre de Dent réglé sur le temps moyen.

c) A Varsovie.

L'observatoire de Varsovie, construit par ordre de l'Empereur Alexandre I dans les années 1820 à 1824, se distingue, parmi les observatoires européens, par la beauté de son édifice. Malheureusement, lors de la construction, on a consulté trop la beauté architectonique, sans avoir assez égard aux besoins de la science. Cette faute dont l'histoire de l'astronomie nous présente plusieurs exemples, a produit de grands inconvénients et a nui extrêmement aux travaux scientifiques de cet établissement. Néanmoins il faut convenir que feu M. Arminski qui, comme directeur désigné de l'observatoire, fut consulté lors de l'érection, par rapport à la partie scientifique, s'est donné beaucoup de peine pour satisfaire, autant que possible, aux besoins de la science. C'est ainsi que l'observatoire de Varsovie réunit, dans sa construction, en même temps de très bonnes idées et, pour ainsi dire, des absurdités scientifiques, dans tous les cas où l'opinion de M. Arminski n'a pu se faire valoir.

Je m'éloignerais trop du but de ce rapport, si je voulais entrer dans une description détaillée de l'observatoire de Varsovie. Je me bornerai donc à donner ici quelques notices par rapport à l'établissement de la lunette méridienne, l'instrument dont il s'agissait en premier lieu, dans notre expédition.

Tous les instruments de cet observatoire sont provenus des deux atéliers mécaniques de Munic, de Reichenbach et d'Utzschneider et Fraunhofer. Trois de ces instruments, un

cercle méridien de trois pieds de diamètre (de la même construction que ceux de Dorpat et de Königsberg), un cercle vertical des mêmes dimensions, et la lunette méridienne ont leur emplacement dans la même salle centrale. Malheureusement cette salle se trouve au second. L'observatoire étant situé au milieu du jardin botanique, où il est entouré de tous côtés d'arbres, c'était un inconvénient presqu'inévitable dès qu'on voulait donner aux lunettes une vue libre jusqu'à l'horizon. Pour éviter les variations dans l'ajustement des instruments, qui auraient pu provenir de cette position élevée, toutes les mesures nécessaires ont été prises. Les piliers des instruments reposent sur une maçonnerie solide qui sort du fondement, et qui est à l'abri de l'influence des changements thermométriques rapides, parce qu'elle est à l'intérieur et séparé du mur épais extérieur. L'intervalle libre entre ce mur extérieur et le fondement des instruments est en outre rempli de paille ou de quelque autre mauvais conducteur de la chaleur.

Les piliers, sur lesquels reposent les instruments sont tous de marbre poli et très beaux; mais il est à regretter que, pour produire plus d'harmonie entre la hauteur des colonnes et celle de la salle, on les a fait beaucoup trop hauts. Cela se prouve déjà par le fait que, dans une direction verticale de la lunette méridienne, j'étais obligé de me tenir débout pour pouvoir observer les passages des étoiles. Quoique cette élévation ne nuise pas considérablement à la solidité de la position de la lunette, elle produit cependant un autre inconvénient très grave, en ce qu'elle rend le renversement de l'axe extrêmement incommode. Il fallait au moins deux hommes très exercés pour exécuter ce renversement, et il était impossible de le faire dans l'intervalle entre les passages de la polaire par deux fils consécutifs. Avant mon arrivée à Varsovie on n'avait pas même tenté de faire ce renversement pendant le passage de la polaire, et les observations se firent par longues périodes dans l'une ou dans l'autre position de l'instrument. Donc, la collimation ne pouvait être déterminée que dans la direction horizontale de la lunette, par l'observation d'une mire méridienne, établie à la distance d'une verste à peu près de l'observatoire, et qui n'était visible qu'en plein jour, mais assez distinctement dès qu'on diminuait le diamètre de l'objectif par un couvercle perforé qui ne donnait entrée qu'aux rayons centraux.

Tous les instruments de l'observatoire de Varsovie ont été construits en 1821. La lunette méridienne a quatre pouces et demi d'ouverture et six pieds de distance du foyer. En 1845, cet instrument était en très bon état de conservation. Avant de l'employer pour notre but, il fallait cependant exécuter plusieurs changements qui me paraissaient urgents. En premier lieu il fallait remplacer l'ancien niveau par un autre plus sensible. J'avais apporté de Poulkova, deux niveaux de très bonne qualité, et dont nous choisîmes celui qui nous parut le plus parfait. Pour pouvoir diriger la lunette sur les étoiles, Reichenbach avait appliqué au tube près de l'oculaire, un petit cercle chercheur pourvu d'un index qui donnait les distances au zenith à l'aide d'un petit niveau mobile avec le porte-index. Cet arrangement ayant déplû aux astronomes de Varsovie, parce qu'il ne donnait pas le moyen de fixer la lunette et de la faire mouvoir par une vis micrométrique, ils avaient ôté ce cercle et remplacé par un autre cercle travaillé par un mécanicien de Varsovie, et qui fut appliqué sur un des tourillons et fixé par trois vis contre le corps de l'axe. Quoique ce changement répondit parfaitement au but proposé, il se montra

désavantageux à la détermination du temps absolu, en ce qu'il empêcha le nivellement facile de l'axe. Nous résolûmes d'ôter ce cercle et de rétablir l'ancien arrangement de Reichenbach.

Par un examen soigneux de l'état de l'instrument, il se manifesta que les coussinets, dans les endroits où les tourillons les avaient touchés, avaient souffert considérablement par l'usage de vingt ans. Or, avant de commencer les observations, il fallait limer et repolir les parties métalliques qui forment les coussinets, ce qui fut exécuté par un habile mécanicien de Varsovie.

Je passe sous silence nombre d'autres arrangements plus ou moins essentiels, et exécutés avant le commencement de nos observations, en mentionnant seulement qu'un soin particulier fut voué à l'appareil qui sert pour le renversement de l'axe, afin de le rendre plus solide et plus propre à une opération rapide. L'expérience a prouvé que nous avons réussi dans cette tâche, vu que, dans le journal d'observations de M. Baranovski, nous rencontrons plusieurs cas où il a exécuté le renversement dans le courant de cinq minutes.

Dans la même salle centrale, il y avait une pendule auprès de chaque instrument. Quoique les trois horloges, travaillées toutes par un horloger de Varsovie Gugenmus, ne se trouvent qu'à une distance de quelques pieds l'une de l'autre, les battements ne se confondent point, vu qu'ils sont si faibles qu'on n'entend que ceux de la pendule qui se trouve tout près de chaque instrument. Comme il n'était pas décidé d'avance, à laquelle des trois pendules il fallait donner la préférence, elles furent comparées entre elles tous les jours. Ces comparaisons, exécutées à l'aide du même chronomètre de Dent dont nous nous étions servis, pour ce but, à Moscou, se faisaient chaque jour à une heure fixe et, en outre, avant et après chaque série d'observations. Plus tard, une quatrième pendule, de Shelton, établie dans un endroit où la température ne subissait point de changements rapides, fut ajoutée au nombre. Dans le calcul définitif des longitudes, les corrections de nos horloges de voyage reposent cependant sur les indications de deux pendules seulement, sur celles de Gugenmus 3, pendule établie auprès de la lunette méridienne, et sur celles de la pendule de Shelton, parce qu'il se manifesta que ces deux pendules avaient des marches beaucoup plus régulières que les deux autres. Lors de la première arrivée de nos chronomètres de voyage, la pendule de Shelton n'était pas encore bien réglée, et c'est par cette raison que, dans ce cas, à côté des données fournies par la pendule Gugenmus 3, nous avons consulté encore les indications de la pendule Gugenmus A, établie auprès du cercle vertical.

d) A Valdai.

L'instrument des passages dont MM. Liapounov et Alexandrov se sont servis à Valdai, est celui que nous trouvons décrit dans la *Description de l'Observatoire central* pag. 216, N. 11. Les observations des passages se faisaient à l'aide du chronomètre Hauth 26, réglé sur le temps sidéral. En outre, une pendule de Muston, réglée aussi sur le temps sidéral et établie dans une localité où la température changeait moins que dans l'observatoire temporaire, était destinée à garder le temps jusqu'à l'arrivée des chronomètres de voyage. Pour pouvoir exécuter

une comparaison exacte entre l'horloge d'observation et cette pendule, qui, toutes les deux, indiquaient le temps sidéral, il était nécessaire de se servir d'un chronomètre réglé sur le temps moyen. Dans ce but, nous avons ajouté au nombre des horloges établies à Valdai, encore le chronomètre Arnold et Dent 1005. Plus tard, l'expérience nous a prouvé que les deux chronomètres ont gardé le temps presqu'aussi exactement que la pendule. Par conséquent, dans le calcul des longitudes, nous avons pris la moyenne entre les résultats obtenus par les trois horloges. Le même instrument des passages qui servit pour la détermination du temps, fut employé par M. Alexandrov pour la détermination de la latitude de Valdai, par des observations faites dans la direction du premier vertical.

e) A Vilkomir.

L'instrument des passages et les horloges établis à Vilkomir, étaient les mêmes qui avaient servi à Valdai, à la seule exception près que le chronomètre Hauth 26 fut remplacé par le chronomètre Kessels 1297, également réglé sur le temps sidéral. En outre, pour l'opération géodésique dont il a été question dans le § 2, l'Observatoire central avait fourni à M. Alexandrov les instruments suivants: 1) un petit instrument universel d'Ertel (*Description de l'Observatoire central* pag. 216, N. 12, 2) une règle en fer de 5 pieds anglais de long, 3) un compas à verge, 4) une simple chaîne d'arpenteur pour la mesure provisoire de la base. La mesure exacte de la base devait se faire à l'aide de perches de bois, longues de 10 pieds, que M. Alexandrov fit exécuter sur le lieu. Ces perches, de bois sec de sapin, furent trempées d'huile, pour être moins sujettes à des variations psychrométriques. Elles portaient sur leurs extrémités des traits fins dont la distance réciproque de 10 pieds, fut vérifiée à l'aide de la règle en fer. Il s'entend que, dans la mesure de la base, les perches furent toujours bien nivelées, et que toutes les autres précautions étaient prises, pour rendre cette mesure aussi exacte que les circonstances le réclamaient.

Il me reste maintenant à faire l'énumération des chronomètres de voyage. Ils se divisent en deux groupes, le premier contenant les chronomètres montés chaque jour, l'autre les chronomètres hebdomadaires.

I. *28 Chronomètres qui devaient être montés chaque jour.*

1) Kessels 1290	appartenant à l'Observatoire central
2) — 1297	
3) Arnold et Dent 951	
4) Hauth 11	
5) — 18	
6) — 52	
7) Dent 1613	appartenant à la collection d'instruments de l'État-Major Impérial
8) — 1687	
9) — 1736	

10) Dent 1739 }
11) — 1774 }
12) — 1787 } appartenant à la collection d'instruments de l'État-Major Impérial,
13) — 1808 }

14) Hauth 32, acheté par S. A. J. le Grand-Duc Constantin de la succession de l'Amiral Greigh,

15) Dent 1941 appartenant à M. l'Amiral Lutke,
16) — 1776 }
17) — 1778 } chronomètres de l'observatoire de Moscou,
18) — 1798 }
19) — 1789 }
20) — 1799 } du départément des arpenteurs,
21) — 1747 }
22) — 1807 } du département des arpenteurs du Grand-Duché de Finlande,
23) — 1630, de l'observatoire de Varsovie,
24) — 1821
25) — 1827.

Les deux derniers chronomètres appartiennent encore à M. Dent, mais du temps de notre expédition les chronomètres 16 à 23 étaient également propriété de l'artiste qui nous avait permis de nouveau, d'en faire usage dans nos opérations. Ce n'était qu'après la fin des expéditions de 1845, que ces chronomètres, dont la qualité supérieure avait été constatée de nouveau, furent achetés par les établissements auxquels ils appartiennent actuellement.

26) Kessels 1276, en dépôt à l'Observatoire central,
27) Hauth 30 }
28) — 32 } appartenant à M. P. de Tchihatchev.

Les trois derniers chronomètres sont les seuls chronomètres de poche, dont nous nous sommes servis dans nos expéditions de 1845. Nous avions un plus grand nombre de chronomètres de poche à notre disposition, mais l'expérience gagnée dans les expéditions antérieures nous décida à ne pas nous charger d'un plus grand nombre, vu qu'ils sont en général, par rapport à la régularité des marches, considérablement inférieurs aux chronomètres de boîte.

II. *12 Chronomètres hebdomadaires.*

29) Dent 1635
30) — 1636
31) — 1637
32) — 1794
33) — 1901
34) — 1910
35) Dent 1913
36) — 1978
37) — 1979
38) — 1983
39) — 1985
40) — 1986

Ces chronomètres, comme j'ai déjà dit dans l'introduction, nous furent envoyés exprès par M. Dent, pour servir dans nos expéditions de 1845.

Voilà en tout 40 chronomètres qui devaient servir pour le transport du temps. Pour avoir le nombre total des chronomètres employés dans nos expéditions de 1845, il faut ajouter encore ceux qui furent établis dans les différents lieux d'observation, pour le but des observations astronomiques ou des comparaisons des pendules, savoir:

Kessels 1294 de la collection de l'Observatoire central
— 1403 — — de l'observatoire de Moscou
Dent 1942 appartenant à M. Dent et établi à Moscou et à Varsovie
Hauth 26 appartenant à l'État Major Impérial } établis à Valdai et Vilkomir.
Arnold et Dent 1005 appartenant à l'observatoire de Dorpat }

Ainsi, le nombre total des chronomètres employés dans ces expéditions était 45. De ce nombre nous devons 23 ou la moitié à la libéralité de notre ami M. Dent qui nous a donné une nouvelle preuve de l'intérêt vif qu'il prend dans les progrès de la géographie de notre patrie.

Parmi les 40 chronomètres de voyage il n'y avait que trois, Kessels 1297, Hauth 11 et Hauth 18, qui furent réglés sur le temps sidéral. 36 des chronomètres marquent les demi-secondes, les trois chronomètres de poche, font 5 battements en 2 secondes, et notre chronomètre de comparaison Kessels 1290 fait 13 battements en six secondes.

Le chronomètre Arnold et Dent 951, très bon chronomètre d'après nos expériences antérieures, est celui auquel nous avions fait ôter la compensation (voyez pag. 4). Dans le rapport sur l'expédition chronométrique de 1843 pag. 28, mon père avait proposé l'usage d'un tel chronomètre à balancier non-compensé pour déterminer la valeur moyenne des températures qui ont eu lieu, pendant les différents voyages, dans l'intérieur des boîtes qui contenaient les chronomètres; ou plutôt pour déterminer la moyenne des températures qui effectivement ont agi sur les marches des chronomètres durant les voyages. Cette proposition a été mise en exécution, pour la première fois, dans nos expéditions de cette année.

II. DÉTERMINATION DU TEMPS ABSOLU.

§ 4. Observations de Poulkova.

Il a été dit plus haut qu'en général, dans les déterminations du temps de l'année 1845, nous avons suivi les mêmes méthodes d'observation et de réduction, qui se trouvent exposées en détail dans nos rélations sur les expéditions chronométriques de 1843 et 1844. Cependant les méthodes d'observation exposées dans le dernier de ces rapports, se rapportaient principalement à l'usage des instruments transportables. Mais les instruments fixes, par leur construction plus parfaite et un établissement plus invariable, admettent en général la possibilité d'atteindre encore un plus haut degré d'exactitude par des méthodes simplifiées, quoiqu'iden-

tiques dans le principe avec celles dont nous nous sommes servis pour les instruments transportables. Dans ce point de vue, mon père a cru devoir introduire plusieurs changements dans les méthodes soit d'observation, soit de réduction, à l'occasion des observations faites par lui, pour notre but, à l'aide de l'instrument des passages de quatre pieds de l'Observatoire de Poulkova. Je crois qu'il serait assez intéressant de publier les séries détaillées de ces observations; mais, pour ne pas trop élargir les limites de ce rapport, il suffira de donner les résultats, en indiquant seulement en quels points les méthodes d'observation et de réduction ont différé de nos méthodes antérieures.

La cause principale qui nous permet de simplifier les méthodes d'observation et de réduction, dans les observations à faire avec des instruments fixes, c'est qu'en général nous devons admettre que les observatoires possèdent les moyens d'examiner et d'étudier ces instruments sous tous les rapports.

Dans l'usage des instruments transportables, il est presque toujours plus facile de trouver l'inclinaison de l'axe à chaque instant, que de déterminer exactement l'azimuth de la lunette. Par cette raison, dans toutes nos expéditions chronométriques, il a été arrêté que les déterminations du temps absolu, devraient être basées principalement sur les observations des passages des étoiles zénithales, où tout dépend d'une connaissance exacte de l'inclinaison de l'axe, et dans lesquelles une petite incertitude de l'azimuth n'a qu'une influence subordonnée. Ce principe devant être suivi dans les observations de Moscou, de Varsovie etc., il parut favorable de choisir les mêmes étoiles zénithales pour la détermination du temps à Poulkova. Par conséquent il s'agissait pour mon père d'évaluer exactement les quantités qui mènent à la connaissance de l'inclinaison de l'axe, c. à d. de déterminer la valeur de la division du niveau et l'épaisseur relative des tourillons.

Pour la détermination de la division du niveau, M. W. Struve l'avait appliqué sur l'appareil construit pour ce but, et dont il y a une description et une représentation dans mon rapport sur l'expédition chronométrique de 1844 pag. 18 et pl. II. Voici les résultats des différentes séries d'observation:

Date.	Temp.	Valeur d'une division du niveau p.	Longueur moyenne de la bulle.
1 Juin 1re série	+ 8°,0 R.	1",609	45,6 div.
« 2me «	+ 8,0	1,611	44,5 «
6 « 1re «	+ 12,5	1,638	40,6 «
« 2me «	+ 12,5	1,626	40,3 «
8 «	+ 15,5	1,644	37,1 «
5 Juillet	+ 20,0	1,634	32,2 «
7 Août	+ 20,0	1,606	34,8 «
	Moyenne p =	1,624	39,3 «

La valeur d'une division du niveau, employée dans les calculs de réduction, a été la moyenne des cinq premières séries d'observations = 1",626, et ne s'écarte que de 0",002 de la

valeur finale. On voit, dans le tableau précédent, que les changements produits dans la valeur des divisions par l'effet de la température, sont presque imperceptibles entre les limites de la température + 8°,0 R. et + 20°,0 R., ou des longueurs correspondantes de la bulle de 32 div. et 46 div. Ces limites ont été suffisamment larges, car dans la série d'observations astronomiques, faite à Poulkova pendant les deux expéditions, il n'existe pas un seul cas où la longueur observée de la bulle ait dépassé ces limites.

L'angle formé par les coussinets de notre lunette méridienne, ainsi que celui des pieds du porte-niveau, dans les endroits où ils se placent sur l'axe, sont exactement de 90°. Par conséquent, absolument le même résultat doit provenir, soit qu'on observe l'inclinaison de l'axe dans une direction verticale de la lunette ou dans une direction horizontale. Par cette raison, comme le niveau ne pouvait pas être placé sur l'axe, la lunette étant dirigée vers le zénith, le nivellement se faisait toujours dans sa direction horizontale. Pour plus de sûreté toujours deux nivellements ont été faits, la lunette étant tournée une fois vers le Sud, l'autre fois vers le Nord. Ces nivellements furent exécutés avant le commencement et après la fin de chacune des deux branches d'observations dans les deux positions de l'axe.

Une différence considérable dans les épaisseurs des tourillons s'est montrée du premier abord. Trois séries de nivellements exécutées par MM. W. Struve et Baranovski, en renversant la position de l'axe après chaque nivellement, ont donné les résultats suivants:

		Différence des inclinaisons observées.	
19 Juin	*C. O.* — *C. E.* =	+ 3,039 div. =	+ 5",04
20 «		+ 3,190	+ 5,18
21 Juillet		+ 3,011	+ 4,90
	Moyenne =	+ 3, 080 div. =	+ 5,04;

ce qui donne la correction à appliquer aux inclinaisons observées = + 1",260 = + 0ˢ,084, positive dans la position *C. E.* de l'instrument, négative dans la position opposée *C. O.* Dans la *Description de l'Observatoire central* pag. 209 nous trouvons, pour la même correction, la valeur ± 0ˢ,103, un peu plus grande. Sans doute notre valeur doit être regardée comme la plus exacte.

Ces nivellements, exécutés dans le but de déterminer les différences dans les épaisseurs des tourillons, ont été faits pendant deux jours dans une direction horizontale de la lunette. Dans la troisième série de nivellements, la lunette fut placée sous différents angles par rapport à l'horizon, pour examiner s'il y avait lieu de supposer quelque part une irrégularité considérable dans la forme des tourillons. L'accord des inclinaisons observées dans les différentes directions de la lunette a été tel, qu'il n'admettait pas le moindre soupçon d'une forme irrégulière des tourillons.

L'un des instruments des passages employés dans l'expédition entre Altona et Greenwich, avait montré une différence frappante entre les nivellements exécutés la lunette étant tournée vers le Nord ou vers le Sud. Dans le but d'examiner si quelque phénomène analogue se mon-

trait dans l'instrument employé par mon père, j'ai comparé, pour chaque position de l'instrument, à peu près 50 nivellements exécutés dans la direction Nord de la lunette (N), avec les nivellements correspondants faits dans la direction Sud (S). Ces comparaisons m'ont donné en moyenne:

dans la position $C.\ E.$ $N = S - 0{,}0057$ div. $= S - 0'',009$
« « « $C.\ O.$ $N = S - 0{,}0325$ div. $= S - 0,053$

c. à d. une différence absolument insensible, parce que les deux petites quantités indiquées ne dépassent guère les erreurs accidentelles des observations.

Les mêmes comparaisons m'ont fourni le moyen de former un jugement sur la précision des inclinaisons déterminées à chaque occasion. Dans la supposition qu'il n'y avait aucune différence constante dans les nivellements N et S, j'ai pu regarder chaque $N - S$ isolé, comme une erreur accidentelle de la différence de deux nivellements partiels qui, combinés et corrigés pour l'effet de la différence dans les épaisseurs des tourillons, nous fournissent l'inclinaison de l'axe, employée dans la réduction des observations. Or, 97 comparaisons ayant donné l'erreur probable d'un seul $N - S = 0'',209$, nous avons l'erreur probable de l'inclinaison déduite d'un nivellement complet $\frac{N+S}{2} = 0'',105 = 0^s,007$.

Dès les premiers jours d'observation, M. W. Struve fit la remarque que tous les soirs les inclinaisons de l'axe variaient dans un sens constant. Il attribua ce phénomène à un état plus ou moins thermoscopique des deux piliers de granit ou des différentes parties métalliques de l'instrument qui supportent l'axe. Si cette explication était juste, l'inclinaison devait suivre en général la période thermométrique diurne. Le matin où, après le lever du Soleil, la température augmente rapidement, le phénomène inverse, mais peut-être plus fort, devait avoir lieu de celui qui se produisait le soir. L'expérience s'accorde parfaitement avec cette conclusion, comme on peut voir dans le tableau suivant, où je donne les différences entre les inclinaisons de l'axe observées au commencement i et à la fin i' de chaque série d'observation, et exprimées en fractions de seconde en temps. A côté de chaque $i - i'$ j'ajoute le nombre des heures auquel correspond le changement observé de l'inclinaison.

	Observations du soir.		Observations nocturnes.		Observations du matin.	
Date.	Heures.	$i' - i$.	Heures.	$i' - i$.	Heures.	$i' - i$.
Juin 2	3,0	$-0^s,040$			2,5	$+0^s,036$
6	3,0	$-0,120$				
7	2,0	$-0,055$				
8	2,5	$-0,094$				
9	2,5	$-0,082$			2,5	$+0,153$
10	3,0	$-0,093$				
11	2,5	$-0,115$				
12	1,0	$-0,014$	2,3	$-0^s,045$		

	Observations du soir.		Observations nocturnes.		Observations du matin.	
Date.	Heures.	$i' - i$.	Heures.	$i' - i$.	Heures.	$i' - i$.
Juin 13	2,8	— 0^s,043				
14	2,5	— 0,107				
15	2,0	— 0,079				
17			3,2	— 0^s,037		
18					2,0	+ 0^s,028
19	2,5	— 0,022			2,5	+ 0,084
20	2,8	— 0,020			2,0	+ 0,107
21	4,8	— 0,156				
22	3,6	— 0,053				
23					1,9	+ 0,088
24	4,0	— 0,077				
29					0,8	+ 0,026
30	1,8	— 0,049			2,0	+ 0,040
Juillet 1	1,8	— 0,054				
26			1,8	— 0,007		
Août 4	3,7	— 0,125				
5			5,0	— 0,048		
6					3,0	+ 0,199
7	3,0	— 0,124	3,1	— 0,006		
18	3,6	+ 0,012	3,0	— 0,045		
20						
29	2,0	— 0,053				
30	5,5	— 0,063				
Sept. 1	3,0	— 0,007				
2	4,5	+ 0,008				
11	0,5	— 0,010				
12			2,5	— 0,069		
13	1,8	— 0,046				

En prenant les moyennes des données précédentes nous déduisons le changement horaire de l'inclinaison,

pendant les observations du soir = — 0^s,0222
« « « de minuit = — 0,0123
« « « du matin = + 0,0396

Il s'accorde avec la périodicité thermométrique supposée, que les variations des inclinaisons observées vers minuit, s'approchent plus des résultats trouvés pour le soir que de ceux du matin, d'un côté parce qu'à minuit en général le thermomètre continue encore à tomber, de l'autre



côté parce que la majeure partie des observations nocturnes a été faite avant minuit. Si l'on regarde la série des $i' - i$ déterminés le soir, on remarque facilement, que les derniers jours d'observation, les différences sont considérablement plus petites qu'au commencement. Cela contribue aussi à confirmer l'hypothèse de l'origine thermoscopique de ces variations, vu que, dans notre climat, en automne, les différences entre les températures du jour et de la nuit sont plus petites qu'aux mois de Juin et de Juillet.

Des variations progressives de l'inclinaison étant reconnues, il s'entend que, dans la réduction des observations, l'inclinaison correspondante à chaque passage fut déduite par une interpolation entre les valeurs déterminées au commencement et à la fin de chaque branche de la série d'observations.

Pour l'uniformité de toutes les parties de son travail, M. W. Struve a voué également un soin particulier à la détermination de l'azimuth de la lunette et de la collimation de l'axe optique. Dans notre expédition de 1844, nous avions été obligés de déduire ces quantités, d'après la méthode des moindres carrés, du complet de tous les passages observés chaque jour. Dans le cas actuel, un moyen plus simple pouvait être employé. Mon père fit construire une mire méridienne, vers le Sud de l'instrument, à l'aide de laquelle il pouvait à tout instant vérifier l'azimuth de la lunette et, après avoir renversé la position de l'instrument, déterminer directement la collimation de l'axe optique. Cette mire consistait dans une plaque noire en fer, établie sur un fondement solide, au centre de laquelle un petit rectangle de 0,306 pouce de large fut peint d'une couleur blanche. La distance entre la mire et l'objectif de la lunette méridienne étant de 542 pieds $= 6504$ pouces, le diamètre horizontal du petit rectangle se présente à l'objectif sous un angle de $9\overset{''}{,}70$. Le fil du milieu du réticule a coupé le rectangle pendant toute la durée des observations de cette année; mais s'il eût dévié, on avait le moyen de produire la bissection en mouvant l'un des coussinets de l'axe par sa vis micrométrique horizontale. En estimant le rapport mutuel des parties visibles de la mire, d'un côté et de l'autre du fil du milieu, on pouvait déduire la différence en azimuth entre l'axe optique de la lunette et la direction du centre de la mire. Les fils d'araignée du réticule avaient une épaisseur apparente de $2\overset{''}{,}0$. Donc les deux portions visibles du rectangle présentaient à l'objectif une somme de $9\overset{''}{,}70 - 2\overset{''}{,}00 = 7\overset{''}{,}70 = 0\overset{s}{,}513$. Par conséquent, ayant trouvé le rapport des deux parties visibles de la mire $= a : b$, nous avons la différence en azimuth par $\alpha = \frac{a - b}{2\,(a + b)}\, 0\overset{s}{,}513 \pm c$, où c signifie la collimation de l'axe optique.

Le foyer de la lunette méridienne étant reglé sur des objets infiniment éloignés, elle ne pouvait pas montrer distinctement le petit rectangle. Pour remédier à cet inconvénient, un second objectif, dont la distance du foyer était égale à la distance de la mire, pouvait être appliqué à chaque instant devant l'objectif de la lunette méridienne. Or, c'est la ligne qui joint le centre de ce second objectif avec le milieu du petit rectangle blanc, par rapport à laquelle nous déterminons la quantité α par le procédé précédemment donné, c. à d. c'est cette ligne qui nous sert de mire méridienne.



Supposons maintenant qu'après un renversement de l'axe, le centre de l'objectif auxiliaire n'occupe pas exactement le même lieu qu'avant le renversement. La suite en sera que, dans les deux positions de l'instrument, nous aurons deux différentes mires méridiennes, et que la collimation déduite des indications du fil du milieu sur le rectangle, sera affectée de l'influence de ce déplacement en direction horizontale. L'objectif auxiliaire étant placé concentriquement dans sa monture il n'y avait qu'à examiner si la périphérie de la monture resta, après le renversement, à la même distance horizontale d'un objet invariable placé de côté. Cet examen trois fois répété, donne pour le déplacement de l'objectif auxiliaire, produit par le renversement de l'axe, les quantités: 0,0750 pouce

0,0758 «

0,0767 «

Moyenne 0,0758 pouce.

C'est de cette quantité que l'objectif auxiliaire se trouve plus à l'Est dans la position *C. E.* de l'instrument, que dans la position *C. O.* La moitié de cette quantité, ou 0,0379 pouce, se présente à la distance du rectangle, de 6504 pouces, sous l'angle de $1''\!,20 = 0^s\!,080$. Or, pour n'avoir affaire qu'à une seule mire moyenne, il fallait corriger, de $\pm\ 0^s\!,080$, les α déduits du rapport des parties visibles du rectangle, en y employant la valeur réelle de la collimation; ou il n'y avait rien à changer dans l'α, si l'on le déduisait en y employant une valeur de la collimation altérée de la quantité indiquée. Il s'entend que, pour avoir la vraie collimation, la valeur déduite directement des indications du fil du milieu sur le rectangle, devait subir la correction de $\pm\ 0^s\!,080$. Je remarque ici encore que l'axe de l'instrument, pour le faire occuper exactement le même lieu dans les deux positions de l'instrument, s'appuyait d'un côté contre une plaque métallique invariable, tandisque de l'autre côté il était poussé contre cette plaque par un ressort très fort.

Après avoir fixé ainsi, de quelle manière les différences en azimuth entre la ligne optique de la lunette et la direction moyenne de la mire devaient être évaluées, mon père pouvait procéder à déterminer l'azimuth même du centre de la mire. Dans ce but il fit une série d'observations de l'étoile polaire dans ses deux passages, inférieur et supérieur, et en combina les résultats avec les indications correspondantes du fil du milieu sur la mire, ainsi qu'avec les inclinaisons effectives de l'axe, données par les nivellements. Pendant chaque passage de la polaire, l'axe de l'instrument fut renversé, pour éliminer la collimation et l'erreur subsistante peut-être dans la détermination de la correction constante $\pm\ 0^s\!,080$, indiquée précédemment. En combinant les résultats des passages supérieurs avec les résultats correspondants des passages inférieurs de la polaire, les valeurs suivantes de l'azimuth $= a$ du centre de la mire furent déduites:

Juin 2	$a =$	$- 0^s,156$
4		$- 0,226$
5		$- 0,180$
7		$- 0,152$
8		$- 0,179$
8		$- 0,212$
14		$- 0,172$
15		$- 0,161$
18		$- 0,154$
18		$- 0,149$
19		$- 0,154$
19		$- 0,175$
20		$- 0,166$
Moyenne	$a =$	$- 0,172$

L'accord des valeurs isolées de a avec la moyenne donne l'erreur probable d'une seule détermination de l'azimuth $= 0^s,016$ et celle de la moyenne $= 0^s,0044$. La valeur trouvée de a demande encore la correction de $- 0^s,022$ qui répond à l'effet de l'aberration diurne. C'est ainsi que nous avons définitivement l'azimuth du centre de la mire $= - 0^s,194$ avec l'erreur probable $= 0^s,0044$. Le signe négatif indique ici que la mire se trouve à l'Ouest du méridien de l'instrument des passages.

La valeur $a = - 0^s,194$ a été employée dans la réduction de toutes les observations faites pendant l'expédition de Moscou. Plus tard, par l'addition de quelques nouvelles séries d'observations, l'azimuth de la mire fut fixé finalement à $- 0^s,189$. Or la valeur adoptée dans la réduction des observations faites pendant l'expédition de Moscou n'était erronée que de $0^s,005$. L'influence de cette petite erreur dans l'azimuth, sur la déduction des corrections des horloges, peut être regardée comme absolument insensible, surtout si l'on n'a observé que des étoiles zénithales. Cependant, dans la réduction des observations faites pour le but de l'expédition de Varsovie, nous avons donné la préférence à la seconde valeur de a, comme étant la plus exacte.

La collimation de l'axe optique pouvait être déduite, soit des observations de la mire, soit de celles de l'étoile polaire. Je donnerai dans le tableau suivant les résultats obtenus par les deux méthodes pendant la durée de l'expédition de Moscou. Dans l'expédition de Varsovie, il n'était plus nécessaire de faire des observations régulières de l'étoile polaire, vu que, par les observations précédentes, on s'était déjà persuadé qu'elles pouvaient être parfaitement remplacées, et même avec avantage, par les observations de la mire.

Les observations régulières de la mire, faites dans le but de déterminer la collimation de l'axe optique ne commencent que le 10 Juin. Avant ce temps la collimation fut déduite des seules observations de l'étoile polaire, et l'observation de la mire ne servait qu'à tenir l'instrument constamment dans le même azimuth.

Collimation de l'axe optique déduite des observations

			de la mire.	de l'étoile polaire.
Juin	2	$1^h\ 2^m$	— 0,080	— 0,060
		13 4		— 0,079
«	4	1 4		— 0,091
«	6	13 4		— 0,053
«	7	13 4		— 0,029
«	8	13 4		— 0,025
«	9	13 4		— 0,042
«	10	13 4	— 0,080	— 0,062
«	11	13 1	— 0,080	— 0,038
«	12	13 22	— 0,059	
		15 50	— 0,073	
		0 0	— 0,080	
«	13	13 25	— 0,080	
«	14	12 59	— 0,084	— 0,049
«	15	13 16	— 0,080	
		0 57	— 0,055	— 0,038
«	17	16 19	— 0,043	
		19 14	— 0,074	
«	18	1 1	— 0,080	— 0,064
«	19	13 0	— 0,055	— 0,041
		1 0	— 0,038	— 0,068
«	20	13 2	— 0,075	— 0,073
		14 23	— 0,080	
		0 58	— 0,080	— 0,060
«	21	13 32	— 0,066	
		15 49	— 0,066	
«	22	15 28	— 0,082	
«	23	0 57	— 0,087	— 0,079
«	24	13 57	— 0,126	
		15 1	— 0,105	
«	29	14 10	— 0,115	
		3 21	— 0,110	
«	30	13 1	— 0,095	— 0,095
		14 13	— 0,080	
		1 3	— 0,094	— 0,110
Juillet	1	13 0	— 0,123	— 0,100
		14 20	— 0,116	

On reconnaît tout de suite qu'entre les observations du 23 et 24 Juin, la collimation s'est changée un peu. En prenant les moyennes des deux séries, avant et après cette époque, nous trouvons:

dans la première période
par les observations de la mire $c = -0^s,072$
« « « de la polaire $c = -0,056$;

dans la seconde période
par les observations de la mire $c' = -0^s,107$
« « « de la polaire $c' = -0,102$.

Les deux résultats obtenus pour c dans la première période, diffèrent entre eux plus qu'on ne devait s'y attendre. Peut-être une petite flexion latérale du tube s'y est prononcée, laquelle a disparu dans la seconde période, en se confondant avec l'erreur accidentelle du résultat obtenu d'un trop petit nombre de passages de l'étoile polaire. Mais soit qu'une telle flexion latérale existe réellement, ou que la différence de $0^s,016$ entre les deux valeurs de c ait été produite par quelque autre cause inconnue, il est évident que cette incertitude minime de la collimation sort entièrement de la détermination de la correction de l'horloge, déduite des observations des étoiles zénithales, faites dans les deux positions de l'instrument. En prenant la moyenne entre les deux valeurs de c et de c', et en appliquant la correction $\pm 0^s,011$ due à l'aberration diurne, nous avons pendant l'expédition de Moscou,

avant le 24 Juin	$c = -0^s,075$	dans la position de l'instrument	C. O.
	$= +0,053$	« « « « «	C. E.
après le 24 Juin	$c' = -0^s,115$	« « « « «	C. O.
	$= +0,093$	« « « « «	C. E.

La supposition d'une flexion latérale du tube de notre lunette méridienne gagne un appui dans les déterminations de la collimation, faites pendant l'expédition de Varsovie. Les observations de la mire, de cette période, ont donné les résultats suivants:

25	Juillet	16^h	56^m	$c = -0^s,115$	20	Août	1^h	2^m	$c = -0^s,126$
26	«	19	39	$-0,066$	29	«	17	28	$-0,080$
4	Août	16	35	$-0,080$	29	«	18	12	$-0,097$
5	«	21	29	$-0,080$	30	«	17	42	$-0,077$
5	«	0	19	$-0,043$	30	«	19	2	$-0,075$
6	«	5	32	$-0,099$	30	«	22	55	$-0,085$
7	«	15	41	$-0,069$	1	Sept.	13	4	$-0,080$
7	«	16	46	$-0,074$	1	«	15	3	$-0,088$
18	«	17	27	$-0,078$	2	«	13	6	$-0,090$
18	«	19	12	$-0,084$	2	«	15	15	$-0,058$
18	«	21	47	$-0,099$	11	«	17	33	$-0,102$
20	«	0	0	$-0,114$	12	«	1	3	$-0,102$

12 Sept.	$2^h\ 16^m$	$c = -0{,}^s114$		13 Sept.	$19^h\ 14^m$	$c = -0{,}^s080$
13 «	18 15	$-0{,}098$		13 «	20 3	$-0{,}077$

La moyenne de cette série est $c = -0{,}^s086$.

Il a déjà été mentionné que, pendant l'expédition de Varsovie, les observations des étoiles circumpolaires n'ont pas été continuées avec régularité. Nous ne trouvons dans les journaux que trois observations complètes de l'étoile polaire et une de δ Ursae min., qui ont donné:

Août	20	$c = -0{,}^s077$
Sept.	2	$-0{,}062$
«	12	$-0{,}047$
«	13	$-0{,}070$

La moyenne de ces quatre valeurs $= -0{,}^s064$, diffère dans le même sens du résultat des observations de la mire, que pendant l'expédition de Moscou. En prenant la moyenne entre les résultats moyens obtenus par les deux méthodes, nous avons, pour l'expédition de Varsovie, eu égard à l'aberration diurne:

$c = -0{,}^s086$ dans la position de l'instrument *C. O.*

$c = +0{,}064$ « « « « *C. E.*

Chaque série d'observations commençait par un nivellement de l'axe et l'adnotation de la position du fil du milieu sur la mire. Ensuite les étoiles zénithales furent observées au nombre de 4 à 6, après quoi on répétait le nivellement de l'axe et l'inspection de la mire. Cela étant fait, l'axe de l'instrument fut renversé et les observations se continuaient dans la même succession, pour la seconde position de l'instrument. Pendant tout le temps des deux expéditions, il n'y a pas un seul cas où l'état défavorable du ciel nous ait obligés à déduire la détermination du temps des observations faites dans une seule position de l'instrument. Très souvent, il a été possible de renverser l'axe deux fois, et dans plusieurs cas même trois et quatre fois.

Avant de commencer une série d'observations, et après sa fin, la pendule d'observation d'Utzschneider fut soigneusement comparée avec la pendule normale de Kessels. Si les observations se prolongeaient plus long temps que d'ordinaire, une troisième comparaison intermédiaire des pendules fut ajoutée. Dans les tableaux suivants je donnerai les corrections des deux pendules *U* et *N*, déduites des observations de mon père, et réduites du lieu d'observation, au centre de l'Observatoire avec la différence connue en longitude de $0{,}^s162$ (voyez *Description de l'Obs. centr.* pag. 291).

L'instrument des passages de 4 pieds n'étant pas encore en complet état d'observation au commencement de nos expéditions, les deux premiers jours, le 29 et le 30 Mai, le temps fut déterminé à l'aide du grand instrument des passages de l'Observatoire, dont la construction et l'usage sont connus par la *Description de l'Observatoire central* et le *Rapport sur l'expédition chronométrique de* 1843. Ces observations se faisaient sur la pendule de Hauth et Wetzer qui fut directement comparée avec la pendule normale. Par cette raison, pour les deux premiers jours, ils nous manquent, dans le tableau suivant, les corrections correspondantes de la pendule d'Utzschneider.

Plusieurs fois, pendant l'expédition de Moscou, mon père a été empêché de faire lui même les observations. Dans ces cas, il a été remplacé par M. Baranovski ou par moi. Les corrections des horloges déduites de nos observations, sont déjà corrigées, dans le tableau suivant, pour l'effet de l'équation personnelle qui existe dans la manière d'observer, entre mon père et nous, et qui a été de + 0ˢ,210 pour les observations de M. Baranovski, et de + 0ˢ,042 pour les miennes. Sur l'évaluation de ces équations personnelles nous traiterons plus en détail dans un article suivant. Pendant l'expédition de Varsovie toutes les observations ont été faites par M. W. Struve seul.

Corrections des horloges, déterminées à Poulkova pendant l'expédition de Moscou.

	Date.	Temps sid.	U.	N.	Observateur.
1845	Mai 29	19ʰ 58ᵐ		+ 0ᵐ 58ˢ,23	W. Struve.
	« 30	14 53		58,41	« «
	Juin 2	12 17	+ 0ᵐ 46ˢ,25	58,85	« «
	« 2	1 48	48,33	58,97	« «
	« 3	15 7	49,83	58,90	« «
	« 4	1 9	54,08	59,19	« «
	« 6	12 13	56,97	59,19	« «
	« 7	12 49	59,03	59,30	Baranovski.
	« 8	12 58	1 0,88	59,46	W. Struve.
	« 8	1 5	1,83	59,57	« «
	« 9	12 58	2,34	59,58	« «
	« 10	13 4	3,59	59,64	« «
	« 11	12 57	5,26	59,60	Baranovski.
	« 12	14 51	7,41	59,58	W. Struve.
	« 12	0 17	8,36	59,77	« «
	« 13	13 27	9,43	59,67	« «
	« 14	12 57	11,40	59,73	Baranovski.
	« 15	13 22	13,36	59,54	W. Struve.
	« 15	1 7	14,55	59,36	O. Struve.
	« 17	17 44	19,33	59,45	W. Struve.
	« 18	1 5	23,28	59,50	« «
	« 19	12 55	24,67	59,51	« «
	« 19	1 4	25,98	59,43	O. Struve.
	« 20	13 51	27,58	59,48	W. Struve.
	« 20	1 3	28,75	59,58	« «
	« 21	14 19	29,74	59,33	« «
	« 22	15 8	31,94	59,09	« «

	Date.	Temps sid.	U.	N.	Observateur.
1845	Juin 23	1^h 4^m	+ 1^m 35,04	+ 0^m 58,78	O. Struve.
	« 24	14 20	36,59	58,66	W. Struve.
	« 29	1 29	51,13	58,00	« «
	« 30	13 42	52,16	57,84	« «
	« 30	1 1	52,94	57,68	« «
	Juillet 1	13 44	53,97	57,72	« «

Corrections des horloges, déterminées à Poulkova pendant l'expédition de Varsovie.

	Date.	Temps sid.	U.	N.	Observateur.
1845	Juillet 25	17^h 17^m	— 0^m 34,96	+ 0^m 55,13	W. Struve.
	« 26	19 35	32,86	55,04	« «
	Août 4	16 20	24,66	54,06	« «
	« 5	22 36	24,04	53,80	« «
	« 6	5 54	22,79	53,65	« «
	« 7	16 17	22,63	53,47	« «
	« 18	20 38	10,71	53,48	« «
	« 20	0 32	6,40	50,83	« «
	« 29	17 54	+ 0 9,66	50,39	« «
	« 30	19 10	11,17	50,21	« «
	Sept. 1	14 20	14,62	49,78	« «
	« 2	14 30	17,16	49,54	« «
	« 11	17 42	44,01	48,71	« «
	« 12	1 44	48,15	48,64	« «
	« 13	19 26	50,37	48,70	« «

On voit dans ces tableaux, que la marche de la pendule normale a été vraiment admirable. Les sauts minimes qu'on recontre dans la série des corrections ont probablement trouvé leur origine dans l'effet de la variation barométrique.

Pour former un jugement sur les erreurs probables à craindre dans les déterminations des corrections des horloges, les résultats obtenus chaque jour dans la position *C. O.* de l'instrument furent comparés avec les résultats correspondants trouvés dans la position *C. E.*

	C. O. — C. E.	Poids de la différence.
2 Juin	— 0,034	3,2
2 «	+ 0,054	2,2
3 «	+ 0,024	3,2
4 «	— 0,105	1,2
6 «	— 0,043	3,4

	C. O. — C. E.	Poids de la différence.
8 Juin	— 0,083	3,2
8 «	+ 0,006	2,5
9 «	+ 0,026	2,7
10 «	— 0,016	2,7
12 «	+ 0,096	4,1
12 «	— 0,065	0,7
13 «	— 0,046	3,0
15 «	— 0,043	3,0
15 «	— 0,055	1,9
17 «	— 0,063	4,4
18 «	+ 0,045	2,4
19 «	+ 0,042	2,9
19 «	+ 0,151	2,4
20 «	— 0,076	3,1
21 «	0,000	4,1
22 «	+ 0,141	1,3
23 «	— 0,124	2,2
24 «	+ 0,019	3,0
30 «	— 0,047	2,4
30 «	— 0,072	2,5
1 Juillet	+ 0,044	2,5

Dans cette liste, les poids sont déduits du nombre correspondant d'étoiles observées dans chaque position de l'instrument. Eu égard à ces poids, la moyenne de tous les *C. O.* — *C. E.* se trouve = — 0,008, ce qui indique que la collimation moyenne employée dans la réduction des observations a été très exactement déterminée. En soustrayant — 0,008 de chaque valeur isolée de *C. O.* — *C. E.*, et multipliant les différences restantes avec les poids relatifs, nous pouvons déterminer l'erreur probable ε qui convient à l'unité des poids, c. à d. à une détermination du temps déduite du passage observé d'une seule étoile dans une seule position de l'instrument. Cette quantité a été evaluée $\varepsilon = 0^s,072$.

Dans son mémoire: «*Sur l'emploi de l'instrument des passages*» pag. 17, M. W. Struve donne la formule $\eta = \sqrt{0^s,072^2 + (\frac{180}{g} . 0^s,016 \sec\delta)^2}$, pour l'erreur probable de l'observation du passage d'une seule étoile par un seul fil du réticule. Dans cette formule, déduite d'un très grand nombre d'expériences faites à l'aide du cercle méridien de Reichenbach qui appartient à l'Observatoire de Dorpat, 0,072 répond à l'erreur de l'ouïe, et le second terme sous le radical à celle de la vue, g étant le grossissement employé. Le grossissement de notre lunette méridienne de quatre pieds du foyer a été constamment de 114 fois. Or, en acceptant + 45° pour la déclinaison moyenne des étoiles qui ont servi à la détermination du temps, nous avons,

dans notre cas, $\eta = 0^s{,}080$. Cette valeur de η doit être divisée par $\sqrt{5}$ pour donner l'erreur combinée probable, de l'ouïe et de la vue, qui convient à un passage observé par les cinq fils du réticule de notre lunette.

L'erreur probable ε précédemment donnée pour la correction de l'horloge déduite du passage d'une seule étoile, est composée de l'erreur probable de l'ouïe et de la vue $\eta = \frac{0^s{,}080}{\sqrt{5}}$, de celle de l'ascension droite de l'étoile observée, des erreurs accidentelles dans le nivellement de l'axe et des petites variations dans la collimation de l'axe optique, qu'on a supposé constante dans les deux périodes d'observation, avant et après le 24 Juin. Les ascensions droites, tirées pour la plupart de notre catalogue M. II, donné dans le rapport sur l'expédition chronométrique de 1843 pag. 46 — 53, sont sujettes à une erreur probable moyenne de $0^s{,}035$. Par conséquent, en désignant par x l'effet combiné des erreurs du nivellement et des variations de la collimation, dans l'erreur probable des corrections des horloges, nous avons

$$x^2 = \varepsilon^2 - \eta^2 - 0^2{,}035 = 0{,}002679 \text{ ou } x = 0^s{,}052.$$

L'inclinaison de l'axe a été déduite, dans tous les cas, au moins de deux nivellements complets. Nous avons vu plus haut que l'erreur probable d'un seul nivellement ne monte qu'à $0''{,}104 = 0^s{,}0069$. Or celle de l'inclinaison ne s'éléverait qu'à $0^s{,}005$. Cependant l'erreur probable de l'inclinaison employée dans la réduction des observations ne peut être supposée aussi petite. Elle dépend non seulement de l'exactitude avec laquelle on peut exécuter le nivellement, mais aussi de l'erreur dans la détermination des épaisseurs des tourillons, dans la valeur employée des divisions du niveau et des petites périodicités dans l'inclinaison. Prenant en considération les différentes sources d'erreurs, je crois qu'on peut accepter approximativement le double de l'erreur probable des nivellements, ou $0^s{,}010$, pour l'erreur probable à laquelle sont sujettes les valeurs employées de l'inclinaison. L'effet d'une erreur dans l'inclinaison de l'axe, sur les corrections des horloges, déduites des observations des étoiles zénithales, dans notre latitude de près de 60°, est le double de sa valeur ou dans notre cas $= 0^s{,}020$. Par conséquent nous avons l'effet de la variabilité de la collimation, sur la détermination du temps faite dans une seule position de notre instrument, $\xi = \sqrt{x^2 - 0^s{,}020^2} = 0^s{,}048$.

D'après ce que nous venons d'exposer, l'erreur probable e d'une détermination du temps, déduite des observations de n étoiles dans une seule position de notre instrument s'exprime par la formule:

$$e = \sqrt{\left(\xi^2 + 0^s{,}020^2 + \frac{0^s{,}080^2}{5n} + \frac{0^s{,}035^2}{n}\right)}.$$

Ayant observé n et n' étoiles dans les deux positions de l'instrument, la petite incertitude de la collimation s'élimine entièrement dans le résultat pour les corrections de l'horloge ou ξ sort de la formule précédente. Dans ce cas nous avons

$$e = \sqrt{0^s{,}020^2 + \frac{0{,}002505}{n + n'}}.$$

Le nombre moyen d'étoiles observées par mon père, pour chaque détermination du temps, a été 6 dans chaque position de l'instrument. L'erreur probable moyenne qui convient aux corrections des horloges données dans les tableaux précédents, se trouve par conséquent $e = 0^s{,}025$.

§ 5. Observations de Moscou.

M. Döllen a suivi strictement les méthodes d'observation et de réduction telles qu'elles se trouvent exposées dans mon rapport sur l'expédition chronométrique exécutée en 1844 entre Altona et Greenwich. La seule déviation de ces règles qu'il s'est permise, c'est que, dans la déduction des résultats définitifs de la détermination du temps, il n'a pas jugé nécessaire de résoudre les équations de condition d'après la méthode des moindres carrés, dans les cas où, par l'arrangement de ses observations, les coefficients de dc et de da se détruisaient presque entièrement dans la moyenne de toutes les observations faites dans les deux positions de l'instrument.

La lunette méridienne dont M. Döllen s'est servi à Moscou, a été la même à laquelle il avait observé pendant l'expédition de 1844. Le niveau étant resté le même il aurait pu employer la valeur des divisions, $p = 1''{,}000$, telle qu'il l'avait déterminée l'année précédente. Cependant M. Döllen, désirant se convaincre que la courbure du niveau ne s'était point altérée dans l'intervalle, l'a examiné de nouveau plusieurs fois. Les résultats qu'il trouva étaient:

Juin 10	$p = 0''{,}968$,	la	longueur	de	la	bulle	étant	$l = 32{,}3$	div.
« 11	0,916	«	«	«	«	«	«	38,0	«
« 18	0,877	«	«	«	«	«	«	44,3	«
« 23	0,980	«	«	«	«	«	«	35,6	«
« 23	0,976	«	«	«	«	«	«	36,1	«
« 25	0,960	«	«	«	«	«	«	39,7	«
« 26	0,916	«	«	«	«	«	«	46,3	«
« 30	1,000	«	«	«	«	«	«	46,6	«
Juillet 8	0,956	«	«	«	«	«	«	46,1	«
« 9	0,888	«	«	«	«	«	«	49,7	«

Dans ses calculs de réduction M. Döllen a employé la valeur moyenne $p = 0''{,}944$ qui, à ce qu'on voit, vaut également bien pour les différentes longueurs de la bulle. La différence entre cette valeur moyenne de p et celle de 1844 n'étant que de $0''{,}056$, il n'y a pas de raison pour supposer une altération sensible dans la courbure du niveau.

M. Döllen a répété également l'examen de la différence des épaisseurs des tourillons. Ayant fait 36 renversements de l'axe, il a trouvé en moyenne $N^e - N^o = -0{,}140p$. En 1844 nous avions obtenu pour le même instrument $N^e - N^o = -0{,}194p$, valeur déduite de 35 renversements de l'axe. Or ces deux valeurs étant de très près de la même exactitude, il fallait prendre la moyenne, qu'on trouve $N^e - N^o = -0{,}167p = -0''{,}158$. Par conséquent la correction qu'il fallait appliquer aux nivellements exécutés dans les différentes positions de l'instrument, est $\pm 0''{,}040$. Ici le signe supérieur vaut pour la position *C. E.*, l'inférieur pour la position *C. O.* de l'instrument.

Il était intéressant pour nous de constater de nouveau l'existence de la différence constante qui s'était montrée, en 1844, dans les nivellements exécutés par M. Döllen à cet instrument, la

lunette étant tournée vers le Nord (N) ou vers le Sud (S). Cette fois ci la comparaison des N et S nous a donné:

Cercle Est	Cercle Ouest.
$N = S - 0''{,}60$	$N = S + 0''{,}65$
+ 1,30	— 1,30
— 0,20	— 0,56
+ 0,65	— 2,50
— 1,05	+ 1,95
+ 1,00	+ 0,80
— 0,55	+ 1,05
— 0,20	— 0,05
+ 1,15	+ 0,75
+ 0,20	+ 1,10
+ 0,95	+ 1,25
+ 0,25	+ 0,90
+ 0,95	+ 0,10
+ 0,75	+ 1,20
+ 1,40	+ 1,25
+ 0,50	+ 2,60
+ 1,10	+ 0,65
+ 0,60	+ 0,60
+ 0,30	+ 0,05
+ 0,25	+ 0,65
+ 0,95	+ 0,50
+ 1,55	+ 0,05
+ 0,55	+ 0,55
+ 0,25	+ 0,65
+ 0,35	+ 1,00
+ 0,95	+ 0,30
+ 0,50	+ 2,60
+ 0,60	— 1,20
+ 0,30	+ 0,95
+ 1,30	+ 0,30
Moy. $N = S + 0{,}535$	+ 0,75
	+ 0,96
	Moy. $N = S + 0{,}545$

Les valeurs moyennes que nous avions trouvées en 1844, étaient, *C. E.*, $N = S + 0''{,}520$, *C. O.*, $N = S + 0''{,}492$, sensiblement les mêmes que celles de 1845. Or il n'y a plus aucune

doute sur la réalité de cette différence constante; les observations de 1845 cependant n'ont rien contribué à éclaircir son origine.

Par un grand nombre d'observations, M. Döllen a determiné pour sa lunette méridienne, les distances des fils latéraux au fil du milieu. En prenant la moyenne de ses observations il trouva:

I.	II.	III.	M.	V.	VI.	VII.
52,423	35,380	17,905	0,000	17,806	35,302	53,071

En comparant ces valeurs avec les nombres donnés dans le rapport sur l'expédition de 1844 pag. 44, nous avons les différences suivantes:

1845 — 1844

I.	II.	III.	M.	V.	VI.	VII.
— 0,063	— 0,093	— 0,087	0,000	+ 0,010	+ 0,066	+ 0,093

Il s'en suit que, dans le courant d'une année, le fil du milieu a changé un peu de position, par rapport aux fils latéraux. En prenant la moyenne nous trouvons qu'il s'est rapproché de 0,069 des trois premiers fils du réticule. Les autres fils sont restés sensiblement dans la même position, à la seule exception du fil V, pour lequel nous devons supposer également un rapprochement, à peu près de 0,06, aux trois premiers fils.

Pour assurer l'exactitude des résultats, le nombre d'étoiles observées par M. Döllen, chaque soir, a été d'ordinaire très considérable. En moyenne le nombre était 16; mais d'après l'état de l'atmosphère il était tantôt plus grand, tantôt plus petit, en variant entre les extrêmes 7 et 25. Il s'entend que M. Döllen tâchait toujours d'arranger ses observations de sorte, qu'un nombre égal d'étoiles tomba sur chaque position de l'instrument. Parmi les étoiles observées il y a chaque soir au moins une étoile circumpolaire; mais il y a aussi des cas où le nombre des étoiles circumpolaires observées s'élève à 5.

En général le renversement de l'axe fut exécuté pendant les passages de ces étoiles boréales, de sorte que les passages de la même étoile par les mêmes fils, pouvaient être observés dans les deux positions de l'instrument. Dans ces cas, la collimation de l'axe optique pouvait être déduite directement. Dans d'autres cas, où différentes étoiles circumpolaires furent observées dans les deux positions, il fallait combiner leurs résultats avec ceux des autres étoiles, pour parvenir à une connaissance exacte de la collimation. La même combinaison mena aussi à la connaissance de l'azimuth de la lunette. Dans le tableau suivant je réunirai les résultats obtenus par ces procédés, soit pour la collimation, soit pour l'azimuth de la lunette.

Date.	Azimuth.	Collimation.
1845 Juin 1	+ 2,45	+ 0,08
« 3	+ 2,40	+ 0,06
« 5	+ 0,06	+ 0,06
« 7	+ 0,17	+ 0,07
« 8	+ 0,18	+ 0,14

Date.		Azimuth.	Collimation.
1845 Juin	9	+ 0^s,14	+ 0^s,11
«	11	+ 0,23	+ 0,04
«	12	+ 0,43	+ 0,07
«	13	+ 0,33	+ 0,10
«	14	+ 0,29	+ 0,07
«	15	+ 0,37	+ 0,09
«	16	+ 0,65	+ 0,01
«	18	+ 0,50	+ 0,02
«	19	+ 0,33	+ 0,04
«	19	+ 0,55	+ 0,02
«	20	+ 0,40	+ 0,03
«	22	+ 0,33	+ 0,02
«	24	+ 0,45	+ 0,12
«	27	+ 0,40	+ 0,07
«	28	+ 0,38	0,00

Entre le 3 et 5 Juin M. Döllen a rectifié l'azimuth de la lunette. Cela explique le saut apparent dans la série, sans cela très régulière des azimuths. Aussi la série des collimations ne laisse rien à désirer.

Il me reste maintenant à donner le tableau des corrections des horloges, déduites des observations de M. Döllen. J'ajoute celles de la pendule normale de Kessels (*N*), obtenues par les comparaisons faites avec l'horloge d'observation dans le courant même des observations. Dans ce tableau, *K* désigne les corrections trouvées pour le chronomètre Kessels 1403, *U* celles de la pendule d'Utzschneider et Fraunhofer. Le nombre des étoiles observées dont les corrections correspondantes des horloges sont déduites, se trouve dans la troisième colonne.

Corrections des horloges déterminées à Moscou par M. W. Döllen.

Date.	Temps sidéral.	Nombre d'étoiles.	*K.*	Marche journal.	*U.*	Marche journal.	*N.*	Marche journal.
1845.								
Juin 1	15^h 30^m	21	+ 10^m 2^s,70	+ 3^s,89			+ 2^m 16^s,70	+ 0^s,65
3	20 35	16	11,28	+ 2,81			18,14	+ 0,58
5	14 15	25	16,14	+ 1,73			19,14	+ 0,38
7	13 40	16	19,54	+ 1,18			19,90	+ 0,34
8	13 38	18	20,71	+ 0,91			20,24	+ 0,28

Date.	Temps sidéral.	Nombre d'étoiles.	E.	Marche journal.	U.	Marche journal.	N.	Marche journal.
1845.								
Juin 9	12h 54m	13	+10m21s,60				+2m 20s,51	
10	18 31	14			—0m 5s,64		20,63	+ 0s,10
11	16 50	8			5,83	— 0s,22	20,77	+ 0,15
12	1 20	12			8,64	— 2,06	20,91	+ 0,10
13	13 35	22			9,15	— 0,98	21,09	+ 0,35
14	13 52	8			11,21	— 2,04	21,08	— 0,01
15	14 30	19			12,68	— 1,44	21,05	— 0,03
16	16 8	7			15,29	— 2,45	20,96	— 0,08
18	18 30	22			20,83	— 2,64	21,50	+ 0,26
19	17 57	11			24,25	— 3,50	21,85	+ 0,22
19	1 17	7			26,10	— 6,00	21,79	
20	15 14	19			28,22	— 3,65	22,01	+ 0,38
22	14 40	19			35,65	— 3,77	22,32	+ 0,16
24	14 29	21			42,25	— 3,31	22,61	+ 0,15
27	14 50	15			55,10	— 4,27	22,64	+ 0,01
28	17 0	18			59,96	— 4,46	22,77	+ 0,12

Depuis le 10 Juin, M. Döllen s'était servi, pour l'observation des passages, de la pendule d'Utzschneider et Fraunhofer à la place du chronomètre Kessels 1403, dans la supposition que la marche de la pendule serait plus régulière que celle du chronomètre. Le tableau précédent nous montre cependant que toutes les deux horloges étaient de qualité inférieure et qu'il n'a pas beaucoup gagné par le changement. Or, pour la réussite de nos travaux, la comparaison de la pendule normale était d'urgence. La marche journalière de cette pendule, à ce qu'on voit, a été très satisfaisante.

De même que pour les observations de Poulkova, j'ai tâché d'évaleur les erreurs probables à attribuer aux corrections précédentes des horloges, de la comparaison des résultats obtenus dans les deux positions de la lunette. Ce procédé n'était point praticable dans les cas où M. Döllen avait résolu les équations de condition d'après la méthode des moindres carrés. Ayant réduit, dans tous les autres cas, les corrections trouvées dans les deux positions de l'instrument, sur un moment identique, à l'aide des marches journalières données dans le tableau précédent, je suis parvenu aux différences suivantes:

		C. O. — C. E.
Juin	3	— 0s,021
	5	+ 0,049
	7	+ 0,024
	8	+ 0,021

	C. O. — C. E.
Juin 9	+ 0ˢ,086
13	— 0,069
14	+ 0,028
16	+ 0,099
18	+ 0,094
19	+ 0,084
20	+ 0,078
22	+ 0,040
24	+ 0,096
27	— 0,123
28	+ 0,090

La valeur moyenne des *C. O. — C. E.* est +0ˢ,032. En soustrayant cette quantité des nombres précédents, nous avons les différences des résultats trouvés dans les deux positions de l'instrument, délivrées de la différence constante. De ces différences restantes nous avons déduit l'erreur probable d'un *C. O. — C. E.* = 0ˢ,043, ce qui donne l'erreur probable des corrections des horloges données dans le tableau, en moyenne = 0ˢ,030. La petitesse de cette valeur est certainement déjà très satisfaisante. Mais nous sommes convaincus que l'erreur probable trouvée est encore considérablement trop grande, vu que d'un côté les irrégularités dans les marches des horloges, d'autre côté l'influence des quantités négligées de *dc* et *da*, ont dû avoir contribué à augmenter les *C. O. — C. E.*

§ 6. Observations de Varsovie.

Il était notre intention d'arranger les observations de Varsovie d'une manière conforme à celle qu'avait employée M. W. Struve à Poulkova. Mais l'emplacement de la lunette méridienne de Varsovie n'admettait pas l'usage d'une mire méridienne pendant la nuit, où se font la majeure partie des observations. Par conséquent, M. Baranovski se trouva dans la nécessité de déterminer l'azimuth et la collimation de la ligne optique de sa lunette, par les observations directes des étoiles circumpolaires, en renversant l'axe de l'instrument pendant les passages. Heureusement, pendant toute la durée de l'expédition de Varsovie, le ciel a été tellement favorable, que M. Baranovski a pu observer en 23 nuits, entre 25, les passages de l'étoile polaire et de δ Ursae min. Ce n'est qu'en deux jours qu'il les a dû remplacer par des étoiles un peu plus éloignées du pôle.

La réduction des observations de Varsovie a été faite en général sur les mêmes principes, que M. Döllen avait suivis pour celles de Moscou. Cependant, l'azimuth de la lunette et la collimation de l'axe optique étant toujours très exactement déterminés à Varsovie par les obser-

vations des étoiles circumpolaires, et vu que l'établissement solide de l'instrument n'admettait pas la crainte d'un changement rapide de ces éléments de réduction, il n'y avait jamais la nécessité de recourir à la solution des équations de condition, pour en trouver les valeurs les plus probables. Au contraire la collimation de la ligne optique s'est tenue tellement constante qu'on a pu employer la même valeur moyenne pendant plusieurs semaines.

Le niveau que j'avais apporté de Poulkova a été examiné à différentes réprises, par M. Baranovski et par moi, sur un examinateur de niveaux fait pour l'observatoire de Varsovie par M. Brauer, mécanicien de l'Observatoire central. Ces examens ont prouvé que, dans toute son étendue, le niveau avait une courbure parfaitement uniforme. Les valeurs moyennes d'une division du niveau = p, que les différentes séries d'observations ont données, étaient:

18 Juillet	1re série	p = 0″,944	pour la longueur de la bulle =	46,1	div.
	2me «	0,916	« « « « « «	42,8	«
15 Août	1re «	0,924	« « « « « «	61,1	«
	2me «	0,965	« « « « « «	61,0	«
16 Août	1re «	0,939	« « « « « «	71,7	«
	2me «	0,968	« « « « « «	70,5	»
29 Août	1re «	0,952	« « « « « «	27,5	«
	2me «	0,953	« « « « « «	28,4	«

La valeur moyenne p = 0″,945 qui, à ce qu'on voit, vaut pour toutes les températures, a été employée dans le calcul des inclinaisons de l'axe.

La comparaison des nivellements exécutés dans les deux directions opposées de la lunette, vers le Nord (N) et vers le Sud (S), a mené aux différences suivantes:

C. O.	*C. E.*
$N = S - 0,72\,p$.	$N = S + 0,02\,p$.
— 0,60	— 0,05
— 0,58	— 0,38
— 0,35	— 0,65
— 0,80	— 0,43
— 0,59	— 0,92
— 0,17	— 0,32
— 0,45	— 0,47
— 0,20	— 0,55
0,00	— 0,50
— 0,64	— 0,25
— 0,68	— 0,70
— 0,05	— 0,42
— 0,72	— 0,85
— 0,38	— 0,38

C. O.	*C. E.*
$N = S - 0,28\ p.$	$N = S - 0,62\ p.$
— 0,68	— 0,22
— 0,48	— 0,65
— 0,25	— 1,25
— 0,40	+ 0,07
— 0,58	— 0,57
— 0,42	— 1,38
— 0,48	— 1,20
— 0,03	— 0,60
— 0,76	— 0,30
— 0,33	— 0,63
— 0,53	— 0,75
— 0,13	— 0,50
— 0,08	— 1,20
— 1,32	— 0,45
— 0,90	— 1,15
— 0,80	— 1,08
— 0,05	— 0,33
— 0,28	— 0,50
— 0,03	— 0,48
— 0,00	— 0,50
— 0,02	— 0,61
— 0,15	— 0,28
— 0,45	— 0,98
— 0,30	— 0,92
— 0,30	— 1,00
— 0,55	— 0,28
— 0,60	0,00
— 0,60	— 0,78
— 0,35	— 0,90
— 0,27	— 0,30
— 1,65	— 0,37
Moy. $N = S - 0,454\ p.$	— 0,45
	— 0,52
	— 0,75
	Moy. $N = S - 0,592\ p.$

Moyenne des deux séries $= - 0,523\,p = - 0'',494$.

Une différence sensible dans les résultats des nivellements exécutés dans les deux directions opposées de la lunette, est mise hors de doute par ces expériences. On pourrait croire que ce phénomène est de nature identique avec celui que M. Döllen avait rencontré dans ses nivellements. Cependant les circonstances ne sont pas les mêmes, dans les deux cas. Dans l'instrument de Varsovie les crochets du porte-niveau ne touchent pas l'axe dans des points situés exactement dans le même plan vertical avec les points de contact entre les tourillons et les coussinets. Or ici l'explication donnée par Bessel pour des phénomènes de ce genre peut trouver son application, savoir que les deux tourillons sont tant soit peu inclinés l'un à l'autre. N'ayant pas des données exactes sur les distances entre les plans verticaux des différents points de contact, je me trouve hors d'état d'évaluer l'inclinaison relative des deux tourillons; mais sans cela il est clair que les inclinaisons observées et employées dans la réduction des observations, sont parfaitement à l'abri de ce défaut dans la construction de l'instrument, parce que chaque nivellement complet de l'axe a été composé de deux nivellements dont l'un fut exécuté dans la direction Nord, l'autre dans la direction Sud de la lunette. Cette expérience nous montre de quelle importance a été pour Varsovie la règle générale, suivie dans toutes nos expéditions chronométriques, de niveler les axes toujours dans deux directions opposées de la lunette.

La liste précédente nous donne en même temps une idée de l'exactitude avec laquelle M. Baranovski a exécuté les nivellements de l'axe et qui ne laisse rien à désirer.

Pour déterminer les différences dans les épaisseurs des tourillons M. Baranovski a fait quatre séries d'observations. Dans chaque série, l'axe de l'instrument fut renversé dix fois. Ces différentes séries ont donné, avec un très bon accord des déterminations isolées, les différences moyennes suivantes:

		C. O. — *C. E.*
Sept.	8	— 2,604 *p*.
«	9	— 3,664 *p*.
«	14	— 2,991 *p*.
«	21	— 3,196 *p*.

Moyenne = — 3,114 *p* avec l'err. prob. = 0,149 *p*.

Les plans des coussinets de l'axe sont inclinés l'un à l'autre de 60°, tandisque l'angle des crochets par lesquels le porte-niveau est suspendu sur l'axe, est de 90°. Or la correction à appliquer aux inclinaisons observées, pour trouver les inclinaisons vraies de l'axe de rotation, est $\pm \frac{3{,}114\, p}{2 + 2\sqrt{2}}$. Par conséquent, en employant la valeur précédemment donnée de p, il faut corriger les inclinaisons observées de $\mp$ 0",609 = $\mp$ 0ˢ,041 en temps, où le signe supérieur vaut pour la position *C. O.* de l'instrument. L'erreur probable de la correction déterminée n'est que de 0ˢ,002.

J'ai déjà mentionné plus haut, que la collimation de l'axe optique de la lunette méridienne a été très constante. Voici ce que donnent les différentes observations de l'étoile polaire et de δ Ursae min., après avoir corrigé les passages observés, de l'influence de l'inclinaison de l'axe et de la différence dans les épaisseurs des tourillons:

Ét. polaire.	c =	δ Ursae min.	c =
Juillet 22	+ 0ˢ,136	Juillet 21	+ 0ˢ,059
25	+ 0,184	26	+ 0,265
29	+ 0,176	27	+ 0,182
Août 24	+ 0,170	Août 2	+ 0,010
25	+ 0,165	8	+ 0,197
26	+ 0,292	11	+ 0,224
Sept. 7	+ 0,282	13	+ 0,180
8	+ 0,263	15	— 0,229
		21	+ 0,131
		24	+ 0,139
		26	+ 0,295
		Sept. 3	+ 0,234
		4	+ 0,228
		6	+ 0,270
		7	+ 0,244
		8	+ 0,327

On reconnaît du premier coup d'oeil qu'une altération considérable de la collimation a eu lieu dans l'intervalle entre les observations du 25 et du 26 Août. Nous en trouvons l'explication dans le journal de M. Baranovski qui fait mention, qu'à l'occasion du renversement de l'axe, le soir du 25 Août, le bout de la lunette qui porte l'oculaire a éprouvé un choc. Cet accident divise les observations en deux périodes, pour lesquelles il faut accepter différentes valeurs de la collimation. En prenant les moyennes des déterminations faites dans les deux périodes, nous avons:

avant le 25 Août

par les passages de la Polaire $c = + 0^s,166$

« « « de δ Ursae min. $+ 0,174$

Moyenne $c = + 0,170$

après le 25 Août

par les passages de la Polaire $c' = + 0^s,279$

« « « de δ Ursae min. $+ 0,268$

Moyenne $c' = + 0,273$

Or, eu égard à l'aberration diurne, nous devons employer, dans la réduction des observations, les valeurs suivantes de la collimation:

Pér. I, dans la position de l'instrument *C. O.* $c = -0^s{,}182$
« « « « « *C. E.* $c = +0{,}158$

Pér. II, dans la position de l'instrument *C. O.* $c' = -0^s{,}286$
« « « « « *C. E.* $c' = +0{,}261$

L'azimuth de la lunette a subi avec le temps un petit changement progressif, conjoint à de petits sauts d'un côté et de l'autre. Par cette raison, on ne pouvait employer des valeurs moyennes de l'azimuth pour des périodes prolongées, mais il fallait prendre chaque jour telle valeur qui suivait de la comparaison des passages observés ce même jour, des étoiles circumpolaires, avec ceux des étoiles fondamentales. Voici la liste des azimuths déterminés:

21 Juillet	a = + 0ˢ,135	13 Août	a = + 0ˢ,336
22 «	+ 0,026	15 «	+ 0,216
25 «	+ 0,148		
26 «	+ 0,184	21 «	+ 0,355
27 «	+ 0,176	23 «	+ 0,498
		24 «	+ 0,468
28 «	+ 0,184	25 «	+ 0,364
29 «	+ 0,201	26 «	+ 0,342
30 «	+ 0,197		
31 «	+ 0,281	3 Sept.	+ 0,430
2 Août	+ 0,340	4 «	+ 0,540
		6 «	+ 0,520
8 «	+ 0,250	7 «	+ 0,530
10 «	+ 0,400	8 «	+ 0,600
11 «	+ 0,517		

Ayant réuni, dans ce qui précède, tout ce qui concerne les éléments de réduction pour les observations de Varsovie, je puis procéder maintenant aux résultats déduits de ces observations, pour les corrections des horloges. Quoique toutes les horloges de l'observatoire aient été régulièrement comparées avec la pendule d'observation Gugenmus 3, je ne donnerai, dans la liste suivante, que les corrections des pendules qui réellement ont servi à garder le temps jusqu'à l'arrivée des chronomètres de voyage, nommément des pendules Gugenmus 3, Gugenmus *A* et Shelton. Toutes les observations ont été faites par M. Baranovski, à la seule exception de celles du premier jour d'observation, que j'ai faites. Dans le tableau suivant, les corrections des horloges, pour ce jour, sont déjà réduites à la manière d'observer de M. Baranovski, par l'application de l'équation personnelle.

Corrections des horloges, déterminées à Varsovie par M. Baranovski.

Date.	Temps sid.	Gugenmus 3.	Marche journalière.	Gugenmus A.	Marche journalière.	Shelton.	Marche journalière.
1845.							
Juillet 21	17h 42m	— 1m 30s,97	+ 0s,16				
« 22	13 43	30,83	+ 0,84	— 0m 2s,11	+ 0s,97		
« 25	16 35	28,20	+ 0,90	+ 0 0,91	+ 1,29		
« 26	18 29	27,22	+ 0,93	2,31	+ 0,89		
« 27	18 15	26,30	+ 0,90	3,19	+ 0,89		
« 28	21 39	25,27	+ 0,72	4,25	+ 0,89		
« 29	16 33	24,70	+ 0,77	4,95	+ 0,82		
« 30	19 43	23,82	+ 0,46	5,87	+ 0,76		
« 31	15 19	23,44	+ 0,90	6,49	+ 0,92		
Août 2	18 27	21,51	+ 0,75	8,46			
« 8	18 4	17,00	+ 0,73			+ 0m 4s,66	— 0s,21
« 10	19 52	15,48	+ 0,59			4,23	— 0,23
« 11	18 1	14,94				4,02	
« 12	6 4	14,25	+ 0,50			3,44	— 0,33
« 13	18 1	13,93	+ 0,44			3,36	— 0,54
« 15	18 41	13,04	+ 1,09			2,26	— 0,60
« 21	18 32	6,50	+ 0,65			— 0 1,37	— 1,05
« 23	16 32	5,26				3,38	
« 23	6 23	4,73	+ 1,15			3,82	— 0,72
« 24	17 55	4,04	+ 0,37			4,15	— 0,79
« 25	17 35	3,68				4,93	
« 25	2 22	3,58	+ 0,91			5,03	— 0,44
« 26	18 16	2,75	+ 1,80			5,38	— 0,53
Sept. 3	18 36	0 48,32	+ 1,44			9,63	— 1,25
« 4	18 40	46,88	+ 2,68			10,88	— 0,12
« 6	18 11	40,98				11,13	
« 6	7 30	39,33	+ 2,84			10,98	+ 0,23
« 7	18 22	38,12	+ 2,17			10,90	— 0,01
« 8	17 39	36,01				10,92	

Aucune de ces trois pendules n'a eu la marche très régulière; la pendule Gugenmus *A* a bien montré une marche uniforme dans l'espace entre le 22 Juillet et le 2 Août, pour lequel nous l'avons employée, mais à partir de cette date elle a fait de si grands sauts qu'il la fallait entièrement rejeter. Heureusement les époques des comparaisons des chronomètres de voyage, à Varsovie, se trouvent en général si près des époques moyennes des observations,

que les irrégularités dans les marches des pendules n'ont pu être de conséquence dans la déduction des longitudes.

La comparaison des corrections de l'horloge d'observation, déduites des observations faites les mêmes jours, dans les deux positions de l'instrument, a donné les différences suivantes:

	C. O. — C. E.		C. O. — C. E.
Juillet 21	+ 0ˢ,04	Août 13	+ 0ˢ,02
« 22	+ 0,07	« 15	+ 0,23
« 26	— 0,03	« 21	+ 0,10
« 27	— 0,09	« 23	+ 0,09
« 28	— 0,07	« 24	+ 0,27
« 29	— 0,11	« 25	— 0,20
« 30	+ 0,07	« 26	— 0,32
« 31	— 0,05	Sept. 3	— 0,05
Août 2	— 0,08	« 4	+ 0,01
« 8	— 0,17	« 6	— 0,20
« 10	+ 0,10	« 7	— 0,08
« 11	+ 0,11	« 8	— 0,24

La moyenne arithmétique de toutes ces différences n'est que — 0ˢ,024, ce qui fait voir que les valeurs moyennes de la collimation et de la différence dans les épaisseurs des tourillons, ont été déterminées avec un haut degré d'exactitude. Si nous comparons les valeurs isolées de *C. O. — C. E.* avec cette moyenne, nous obtenons des différences qui nous donnent l'erreur probable d'un *C. O. — C. E.* isolé = 0ˢ,095; d'où se déduit l'erreur probable des corrections précédentes des horloges, en moyenne = 0ˢ,067. Cette erreur probable surpasse en grandeur considérablement celles que nous avons évaluées pour les observations de Poulkova et de Moscou. J'ai montré plus haut que tous les éléments instrumentaux de réduction, ont été déterminés par M. Baranovski avec un haut degré de précision; en outre les corrections de l'horloge, trouvées par les différentes étoiles observées les mêmes jours, dans la même position de l'instrument, sont d'un accord très satisfaisant, et le nombre d'étoiles observées dans chaque position de l'instrument, est aussi plus que suffisant pour donner un résultat de la plus haute exactitude. La source de l'augmentation de l'erreur probable des résultats moyens ne doit donc être cherchée, que dans les irrégularités de la marche de la pendule d'observation. Les marches des horloges employées aux observations de Moscou, ont été bien aussi peu satisfaisantes, mais d'un côté les observations de M. Döllen se sont elles suivies dans les deux positions de l'instrument en général beaucoup plus vite, que celles de M. Baranovski; d'autre côté il y a lieu de supposer que les horloges de Moscou ont subi des irrégularités de longue période, tandisque celle de Varsovie, en gardant une marche moyenne plus régulière, a fait de petits sauts sans aucune loi apparente. Peut-être aussi les observations de Moscou ont elles montré un meilleur accord parce qu'on y a employé, dans la réduction, des valeurs de

la collimation déterminées chaque soir à part; tandisque, pour les observations de Varsovie, la réduction a été faite avec des valeurs moyennes pour certaines périodes. Cependant, l'accord des différentes déterminations de la collimation pendant ces périodes, a été tel, comme nous avons vu, qu'il n'y avait aucune raison à procéder autrement c. à d. cet accord nous força de supposer la collimation constante dans ces périodes, et de regarder les petites variations observées, comme provenues des erreurs accidentelles des observations isolées. Si cette supposition était exacte, les valeurs moyennes de la collimation auraient dû mener à un meilleur accord des corrections des horloges, déterminées dans les deux positions de l'instrument, que les valeurs isolées de cet élément, déterminées les jours mêmes.

§ 7. Observations de Valdai.

Sur la construction de l'instrument transportable des passages, employé par M. Liapounov, voyez la «*Description de l'Observatoire central*» pag. 216 № 11. Quant à l'exactitude qu'on peut attribuer aux observations faites avec cet instrument, pour la détermination du temps, on trouve tous les détails dans le rapport de M. W. Struve sur l'expédition chronométrique de 1843, pag. 71—79. Or, en renvoyant aux lieux cités, je puis me dispenser d'entrer ici dans les détails des observations de M. Liapounov. Je remarque seulement que, dans ses observations, il a strictement suivi les règles générales, établies par nous et publiées dans les rapports sur les deux expéditions précédentes. Les observations de M. Alexandrov, faites pour la détermination de la latitude de Valdai, feront l'objet d'un article spécial.

Corrections des horloges, déterminées à Valdai par M. Liapounov.

	Date.	Temps sid.	Chron. Hauth 26.	Marche journ.	Pendule Muston.	Marche journ.
1845	Mai 30	14^h 0^m	+ 0^m 28^s,18	+ 2^s,03	+ 0^m 34^s,39	+ 1^s,13
	« 31	14 0	30,22	+ 1,84	35,52	+ 1,36
	Juin 2	14 0	33,89	+ 1,98	38,24	+ 1,05
	« 6	14 30	41,86	+ 1,55	42,48	+ 1,04
	« 7	14 10	43,39	+ 1,92	43,51	+ 0,93
	« 8	14 0	45,31	+ 2,09	44,43	+ 0,97
	« 10	14 20	49,52	+ 2,00	46,38	+ 1,12
	« 11	15 50	51,65	+ 2,12	47,59	+ 1,14
	« 14	14 30	57,88		50,93	+ 0,79
	« 15	19 10	1 4,94	+ 2,68	51,88	+ 1,06
	« 17	14 35	9,79	+ 2,04	53,80	+ 1,01
	« 18	16 35	11,99	+ 2,24	54,89	+ 1,07
	« 21	19 48	19,13	+ 1,56	58,25	+ 0,79
	« 22	21 10	20,78	+ 2,05	59,08	+ 0,87
	« 23	0 10	23,09	+ 2,13	60,06	+ 0,95
	« 25	18 15	26,83		61,72	

Le 14 Juin, dans l'intervalle entre les observations de M. Liapounov, pour la détermination du temps, et celles de M. Alexandrov, pour la détermination de la latitude, le chronomètre d'observation, Hauth 26, a fait tout d'un coup un saut de plusieurs secondes, comme c'est prouvé par les comparaisons répétées entre ce chronomètre, la pendule de Muston et le chronomètre auxiliaire Arnold et Dent 1005, reglé sur le temps moyen. Les astronomes de Valdai ne se souviennent plus d'un accident qui soit arrivé au dit chronomètre, dans cet intervalle, mais tout porte à croire qu'une perturbation a eu effectivement lieu. Il paraît même que cette perturbation a eu encore une petite influence sur la marche du chronomètre dans l'intervalle entre le 15 et 17 Juin. Si nous faisons abstraction de la période Juin 14 — Juin 17, la marche du chronomètre s'est montrée presque aussi uniforme que celle de la pendule de Muston.

La marche du chronomètre de comparaison Arnold et Dent 1005 a été également très régulière, comme on peut voir dans le tableau suivant de ses corrections, déduites des comparaisons directes avec l'horloge d'observation.

Corrections du chronomètre Arnold et Dent 1005 par rapport au temps moyen de Valdai.

	Date.	Temps moyen.	A. et D. 1005.	Marche journ.
1845	Mai 30	$8^h\ 35^m$	$+26^m\ 46^s{,}74$	$+1^s{,}94$
	« 31	8 59	48,71	+ 2,92
	Juin 2	8 59	53,36	+ 2,29
	« 6	9 7	27 2,53	+ 2,62
	« 7	8 44	5,12	+ 2,94
	« 8	8 44	8,06	+ 3,17
	« 10	8 38	14,40	+ 2,85
	« 11	9 53	17,40	+ 2,86
	« 14	8 21	25,80	+ 2,79
	« 15	13 20	29,17	+ 2,45
	« 17	8 35	33,58	+ 1,79
	« 18	10 44	35,53	+ 2,12
	« 21	10 31	41,88	+ 2,30
	« 22	13 25	44,46	+ 2,43
	« 23	17 6	47,26	+ 2,54
	« 25	10 41	51,64	

En plusieurs jours, M. Alexandrov a fait des observations indépendantes pour la détermination du temps à Valdai. Ces observations n'ayant pas été considerées dans la déduction des longitudes, je ne donne ici que les corrections de l'horloge d'observation.

Date.	Temps sid.	Corr. de Hauth 26.
Mai 30	17ʰ 57ᵐ	+ 0ᵐ 29ˢ,59
Juin 2	18 9	34,29
« 7	18 21	44,02
« 12	16 43	53,92
« 16	16 57	1 7,57
« 19	16 21	14,66
« 26	15 41	24,68

En réduisant les corrections de l'horloge, trouvées par M. Liapounov, sur les époques des observations de M. Alexandrov, avec les marches journalières données précédemment, nous avons les différences suivantes.

Mai 30	Corr. Al. = Corr. L. + 1ˢ,07
Juin 2	+ 0,07
« 7	+ 0,32
« 12	+ 0,07
« 16	+ 0,20
« 19	+ 0,43
« 26	+ 0,23

La détermination du temps, le 30 Mai, a été la première série d'observations faites par M. Alexandrov après un long intervalle, et par cette raison elle ne peut pas prétendre au même degré d'exactitude, que les autres observations. En la négligeant, nous avons la différence moyenne entre les corrections de l'horloge déterminées par MM. Liapounov et Alexandrov = + 0ˢ,220. C'est d'autant que le dernier des deux astronomes observe les passages plus tôt que le premier.

§ 8. Observations de Vilkomir.

Tout ce qui a été dit dans le paragraphe précédent sur les observations de M. Liapounov à Valdai, se rapporte également aux observations faites par M. Alexandrov à Vilkomir. La seule différence y est, qu'au lieu du chronomètre Hauth 26, M. Alexandrov s'est servi, pour les observations de Vilkomir, du chronomètre Kessels 1297, reglé également sur le temps sidéral. Il avait choisi ce chronomètre, parce que les battements lui paraissaient plus distincts que ceux de l'autre chronomètre.

Corrections des horloges, déterminées à Vilkomir par M. Alexandrov.

	Date.	Temps sid.	Chronomètre Kessels 1297.	Marche journalière.	Pendule Muston.	Marche journalière.
1845	Juillet 28	19ʰ 20ᵐ	+ 1ᵐ 18ˢ,49	+ 3ˢ,80	+ 1ᵐ 37ˢ,27	+ 2ˢ,82
	« 29	18 27	22,15	+ 4,17	39,98	+ 2,94
	« 31	17 59	30,41	+ 3,80	45,80	+ 2,85
	Août 2	18 17	38,07	+ 4,17	51,54	+ 2,87
	« 4	17 34	46,27	+ 4,42	57,19	+ 3,14
	« 5	18 26	50,85	+ 4,29	2 0,45	+ 2,50
	« 9	20 9	2 8,50	+ 4,45	10,64	+ 2,52
	« 11	23 16	17,98	+ 4,31	16,02	+ 2,56
	« 16	18 49	38,74	+ 4,19	28,34	+ 2,59
	« 19	18 24	51,24	+ 4,40	36,07	+ 2,68
	« 22	20 7	3 4,75	+ 4,26	44,31	+ 2,86
	« 23	19 16	8,86	+ 3,95	47,07	+ 2,71
	« 26	18 56	20,65	+ 3,69	55,17	+ 2,47
	« 27	18 47	24,31	+ 4,41	57,62	+ 3,11
	« 28	19 15	28,81	+ 3,94	3 0,79	+ 2,78
	Sept. 3	19 13	52,43	+ 4,24	17,46	+ 2,37
	« 5	19 22	4 0,93	+ 4,65	22,21	+ 2,91
	« 9	19 20	19,51	+ 4,60	33,85	+ 2,84
	« 13	23 17	38,64	+ 4,46	45,70	
	« 19	19 4	5 4,61			

Le dernier jour, l'expédition chronométrique proprement dite étant déjà terminée, M. Alexandrov a omis la comparaison des autres horloges avec l'horloge d'observation. On voit, dans le tableau précédent, qu'à Vilkomir la marche de la pendule de Muston a été, sans contestation, plus régulière que celle de l'horloge d'observation. C'est plus encore le cas par rapport au chronomètre qui a servi aux comparaisons. Voici le tableau des corrections de ce chronomètre.

Corrections du chronomètre Arnold et Dent 1005 par rapport au temps moyen de Vilkomir.

	Date.	Temps moyen.	A. et D. 1005.	Marche journalière.
1845	Juillet 28	10ʰ 55ᵐ	+ 0ᵐ 11ˢ,51	+ 3ˢ,11
	« 29	9 58	14,50	+ 3,24
	« 31	9 22	20,89	+ 2,73
	Août 2	9 32	26,37	+ 3,23

	Date.	Temps moyen.	A. et D. 1005.	Marche journalière.
1845	Août 4	$8^h\ 41^m$	+ $0^m\ 32^s,71$	+ $3^s,04$
	« 5	9 29	35,86	+ 2,82
	« 9	10 56	47,28	+ 2,40
	« 11	13 55	52,39	+ 2,21
	« 16	9 9	1 2,99	+ 1,98
	« 19	8 32	8,88	+ 1,78
	« 22	10 3	14,33	+ 1,92
	« 23	9 8	16,18	+ 1,87
	« 26	8 37	21,76	+ 1,78
	« 27	8 24	23,52	+ 2,70
	« 28	8 48	26,27	+ 2,20
	Sept. 3	8 22	39,44	+ 1,32
	« 5	8 23	42,08	+ 1,91
	« 9	8 6	49,71	+ 1,89
	« 13	11 46	57,54	

Les observations faites à Vilkomir pour la détermination de la latitude, seront données dans un article à part, comme pour Valdai. J'y ajouterai aussi les résultats de la triangulation exécutée par M. Alexandrov entre l'observatoire temporaire de Vilkomir et les points trigonométriques du réseau du général Tenner, Dseveltova et Nidoki.

§ 9. Equations personnelles.

Les équations personnelles qui existent entre différents observateurs, dans la manière d'observer les passages des étoiles, affectent directement les longitudes déterminées à l'aide du transport du temps. Or c'est de la plus haute importance de les évaluer le plus exactement possible, dans tous les cas où l'on n'a pas l'avantage de les éliminer des résultats, par un changement des observateurs sur les différentes stations, avantage dont se réjouit notre détermination de la différence en longitude entre les observatoires d'Altona et de Greenwich. Dans les expéditions de 1845 au contraire, les mêmes observateurs restaient pendant tout le temps sur les mêmes stations. Par cette raison, nous devions tâcher de fixer les équations personnelles par un grand nombre d'observations, en y variant les instruments, les grossissements et les horloges. Je donnerai ici, en premier lieu, les équations primitives formées directement par les résultats de chaque série d'observations faites en 1845, en y ajoutant, comme première équation, la valeur trouvée pour l'équation personnelle entre M. Döllen et moi par les observations de l'année 1844. Nous regardons les resultats de chaque série d'observations comme d'égale exactitude c. à d. toutes les équations primitives ont le même poids. Je désigne ici

par a de combien M. Döllen..... observe les passages plus tard que O. Struve
par b « M. W. Struve « « « «
par c « M. Baranovski « « « «
par d « M. Liapounov « « « «
par e « M. Alexandrov « « « «

Équations primitives.

1	1844		$a = -0{,}221$	(Expéd. chron. de 1844 pag. 30).
2	1845	Mai 8	$a = -0{,}256$	(Grand réfracteur).
3		« 8	$a = -0{,}131$	« «
4		« 10	$d - a = +0{,}403$	« «
5		« 10	$d - a = +0{,}494$	« «
6		« 10	$d = +0{,}235$	« «
7		« 10	$d = +0{,}203$	« «
8		« 13	$d - a = +0{,}372$	« «
9		« 13	$d - a = +0{,}363$	« «
10		« 13	$a = -0{,}063$	« «
11		« 13	$a = -0{,}112$	« «
12		« 13	$d = +0{,}364$	« «
13		« 13	$d - a = +0{,}425$	« «
14		« 20	$a = -0{,}281$	(Lunette mérid. de 4 pouces).
15		« 20	$d - a = +0{,}315$	« « «
16		« 22	$b - a = +0{,}225$	« « «
17		« 24	$b - a = +0{,}271$	« « «
18		« 24	$c - a = +0{,}298$	« « «
19		« 25	$d - b = +0{,}231$	(Grand réfracteur).
20		« 25	$b - a = +0{,}371$	« «
21		« 25	$d - b = +0{,}134$	« «
22		« 25	$c - a = +0{,}477$	« «
23		« 25	$d - b = +0{,}122$	(Lunette mérid. de 4 pouces).
24		« 25	$c - a = +0{,}277$	« « «
25		« 26	$c = +0{,}069$	« « «
26		Juin 11	$c - b = +0{,}225$	« « «
27		« 14	$c - b = +0{,}212$	« « «
28		« 19	$c - b = +0{,}181$	« « «
29		« 20	$c - b = +0{,}237$	« « «
30		Juill. 3	$b = -0{,}130$	« « «

31	1845	Juill.	4	$b = -0{,}092$	(Lunette mérid. de 4 pouces).
32		«	7	$b = -0{,}083$	« « «
33		«	11	$d - b = +0{,}157$	« « «
34		«	16	$b - a = +0{,}214$	« « «
35		«	18	$b - a = +0{,}128$	« « «
36		«	19	$b - a = +0{,}062$	« « «
37		«	20	$d - a = +0{,}330$	« « «
38		«	21	$d - a = +0{,}396$	« « «
39		«	22	$c = -0{,}033$	(Lunette mérid. de Varsovie).
40		«	25	$c = +0{,}158$	« « «
41		Nov.	2	$c - b = +0{,}335$	(Lunette mérid. de 4 pouces).
42		«	5	$c - b = +0{,}318$	« « «
43		«	6	$c - b = +0{,}262$	« « «
44		«	8	$c - b = +0{,}178$	« « «
45		«	8	$c = +0{,}129$	« « «
46		Mai	8	$e = +0{,}518$	(Grand réfracteur).
47		«	8	$e = +0{,}506$	« «
48		«	8	$e - a = +0{,}632$	« «
49		«	8	$e - a = +0{,}575$	« «
50		«	9	$e = -0{,}561$	(Grand instrument des passages).
51		«	9	$e - a = -0{,}036$	« « «
52		«	10	$e = +0{,}321$	(Grand réfracteur).
53		«	10	$e = +0{,}318$	« «
54		«	10	$e - a = +0{,}481$	« «
55		«	10	$e - a = +0{,}528$	« «
56		«	10	$e = -0{,}052$	(Cercle méridien).
57		«	10	$e - a = +0{,}108$	« «
58		«	11	$e = -0{,}090$	(Grand réfracteur).
59		«	11	$e = -0{,}188$	« «
60		«	11	$e = -0{,}250$	« «
61		«	11	$e - a = -0{,}290$	(Grand instrument des passages).
62		Juill.	4	$e - b = +0{,}177$	(Lunette mérid. de 4 pouces).
63		«	5	$e = +0{,}237$	« « «
64		«	7	$e = +0{,}229$	« « «
65		Nov.	6	$e - c = -0{,}370$	« « «
66		«	8	$e - c = -0{,}456$	« « «

On reconnaît d'abord, dans les équations 46—66 qui contiennent l'inconnue e, que la manière d'observer de M. Alexandrov a été très peu constante. Toutes ces équations devaient être rejetées dans la recherche des équations personnelles des autres observateurs. Il nous reste donc les 45 premières équations pour la déduction des valeurs des quatre quantités cherchées a, b, c, d. Ces équations mènent aux équations finales suivantes:

$$
\begin{aligned}
23\,a - 6\,b - 3\,c - 8\,d &= -\,6^{s}{,}485 \\
-\,6\,a + 21\,b - 8\,c - 4\,d &= -\,1{,}626 \\
-\,3\,a - 8\,b + 15\,c &= +\,3{,}323 \\
-\,8\,a - 4\,b + 15\,d &= +\,4{,}545
\end{aligned}
$$

et nous en tirons les valeurs définitives:

$$
\begin{aligned}
a &= -\,0^{s}{,}210 \\
b &= -\,0{,}043 \\
c &= +\,0{,}157 \\
d &= +\,0{,}180
\end{aligned}
$$

Ces quantités substituées dans les équations primitives donnent les erreurs suivantes de ces dernières:

1) + 0^{s},011	16) — 0^{s},058	31) + 0^{s},049
2) + 0,046	17) — 0,104	32) + 0,040
3) — 0,078	18) + 0,069	33) + 0,066
4) — 0,013	19) — 0,008	34) — 0,047
5) — 0,104	20) — 0,204	35) + 0,039
6) — 0,055	21) + 0,089	36) + 0,105
7) — 0,023	22) — 0,110	37) + 0,060
8) + 0,018	23) + 0,101	38) — 0,006
9) + 0,027	24) + 0,090	39) + 0,190
10) — 0,147	25) + 0,088	40) — 0,001
11) — 0,098	26) — 0,025	41) — 0,135
12) — 0,184	27) — 0,012	42) — 0,118
13) — 0,035	28) + 0,019	43) — 0,062
14) + 0,071	29) — 0,037	44) + 0,022
15) + 0,075	30) + 0,087	45) + 0,028

L'erreur probable d'une seule équation primitive s'en suit = 0^{s},059, valeur sensiblement égale à celle que nous avons trouvée par les déterminations de 1844. Le plus petit nombre de comparaisons faites par chaque observateur, pour la détermination de son

équation personnelle, s'élevant à 15, il est évident que l'erreur probable à craindre, dans les valeurs définitives précédentes, reste en dedans de 0ˢ,020, limite que nous nous étions proposés d'atteindre dans cette recherche.

Passons maintenant à l'équation personnelle de M. Alexandrov, pour l'évaluation de laquelle nous avons les 21 équations primitives 46 à 66. Les 16 premières équations dépendent des observations faites avant son départ pour Valdai, les trois équations 62—64 des observations faites dans l'intervalle entre les deux expéditions, et les deux dernières des observations faites après son retour de Vilkomir. En nous servant des valeurs précédentes de a, b et c nous pouvons changer toutes les 21 équations dans des équations qui donnent directement e ou la quantité dont M. Alexandrov observe les passages plus tard que moi. C'est ainsi que nous trouvons:

46)	Mai	8	$e = +0^s,518$	53)	Mai	10	$e = +0^s,318$	60)	Mai	11	$e = -0^s,250$
47)	«	8	$+0,506$	54)	«	10	$+0,271$	61)	«	11	$-0,500$
48)	«	8	$+0,422$	55)	«	10	$+0,318$	62)	Juill.	4	$+0,134$
49)	«	8	$+0,365$	56)	«	10	$-0,052$	63)	«	5	$+0,237$
50)	«	9	$-0,561$	57)	«	10	$-0,102$	64)	«	7	$+0,229$
51)	«	9	$-0,246$	58)	«	11	$-0,090$	65)	Nov.	6	$-0,213$
52)	«	10	$+0,321$	59)	«	11	$-0,188$	66)	«	8	$-0,299$

La variabilité extraordinaire dans la manière d'observer de M. Alexandrov se prononce très distinctement dans ce tableau; elle s'élève en différents jours au delà d'une seconde en temps. Évidemment cette variabilité ne peut pas être attribuée qu'en très petite partie aux astronomes qui se sont comparés avec M. Alexandrov, pour lesquels la constance dans la manière d'observer est prouvée par la petitesse des erreurs des 45 premières équations primitives. Il parait que pendant peu d'heures de suite M. Alexandrov a conservé une certaine constance de l'observation; mais, dès que l'intervalle entre deux séries d'observation a été un peu prolongé, comme par exemple entre les observations du 10 Mai qui ont fourni les équations 55 et 56, sa manière d'observation s'est altérée. Il est donc presque impossible d'indiquer une valeur définitive de l'équation personnelle de M. Alexandrov. La moyenne arithmétique des 21 déterminations précédentes est: $e = +0^s,054$, quantité dont l'erreur probable, telle qu'elle suit de l'accord des déterminations isolées, s'élève à 0ˢ,050 à peu près, et qui, par conséquent, augmente considérablement l'erreur probable que nous déduirons plus tard pour la longitude de Vilkomir. J'ai déjà dit plus haut pag. 9, par quelles considérations nous étions engagés à supposer que la variabilité dans la manière d'observer de M. Alexandrov avait cessé d'exister après le premier temps de ses observations. Réellement nous voyons que les trois équations 62 à 64, déduites des observations faites au commencement du mois de Juillet, dans l'intervalle entre les deux expéditions, s'accordent entre elles

aussi bien, qu'on le peut attendre même des observateurs les plus expérimentés. Cependant les dernières deux équations ne viennent pas à l'appui de notre supposition, et il est à regretter, par rapport à l'exactitude de la longitude de Vilkomir, que nous n'ayons pas envoyé à cet endroit encore un second astronome, pour la détermination du temps absolu, de même que nous l'avions fait pour Valdai.

III. COMPARAISONS DES CHRONOMÈTRES ET PREMIÈRE DÉDUCTION DES LONGITUDES.

§ 10. Comparaisons et corrections du chronomètre auxiliaire Kessels 1290.

Les comparaisons du chronomètre auxiliaire Kessels 1290, avec les horloges destinées à garder le temps, nous donnent par un simple calcul, pour les époques des comparaisons, les corrections de ce chronomètre par rapport au temps sidéral. La majeure partie de nos chronomètres de voyage étant réglés sur le temps moyen, il était convenable, pour simplifier les calculs, de changer les corrections trouvées par rapport au temps sidéral, en des corrections correspondantes au temps moyen. Cette réduction fut opérée à l'aide des données du *Nautical Almanac*. Ces éphémérides donnent le temps sidéral au midi moyen de Greenwich. Or, les longitudes approximatives de nos lieux d'observation étant supposées:

pour Poulkova =	2^h	1^m	19^s	à l'Est de Greenwich			
Moscou	2	30	17	«	«	«	
Varsovie	1	24	8	«	«	«	
Valdai	2	12	58	«	«	«	
Vilkomir	1	39	5	«	«	«	

nous devions appliquer aux temps sidéraux donnés pour les midis moyens de Greenwich, les réductions suivantes:

par rapport à Poulkova	— 19ˢ,93
Moscou	— 24,69
Varsovie	— 13,80
Valdai	— 21,84
Vilkomir	— 16,23

Dans les tableaux suivants, je rassemblerai les corrections du chronomètre auxiliaire Kessels 1290, relatives au temps moyen de chaque lieu, pour toutes les époques des comparaisons des

chronomètres de voyage. Chaque nombre donné dans ces tableaux est le résultat au moins de deux comparaisons successives, entre le chronomètre auxiliaire et les horloges qui gardaient le temps. En général on trouve, pour chaque époque de comparaisons, trois valeurs des corrections du chronomètre auxiliaire, correspondantes la première au commencement, la seconde au milieu et la dernière à la fin de chaque série de comparaisons des chronomètres de voyage. Ces valeurs nous conduisent à porter un jugement sur le degré de précision dont jouissent les comparaisons isolées.

En donnant les moyennes arithmétiques des corrections C du chronomètre auxiliaire, j'ajoute un terme qui indique les petites variations dans les centièmes de seconde, dues à la marche du chronomètre auxiliaire et déduites des différences entre les résultats de la première et de la dernière comparaison, faites à chaque époque, entre ce chronomètre et les horloges qui gardaient le temps. Dans ce terme, t signifie le nombre de minutes écoulées depuis l'époque moyenne des comparaisons. Le signe presque constamment positif de ce terme nous prouve que la marche du chronomètre auxiliaire, quelque petite qu'elle était, s'est distinctement prononcée dans les intervalles comparativement brefs entre le commencement et la fin de chaque série de comparaisons, et que même la quantité de sa marche a été reconnue très exactement. En comparant, par exemple, la première et la dernière correction du chronomètre auxiliaire, déterminées à Poulkova pendant l'expédition de Moscou, nous déduisons la marche journalière de ce chronomètre $= + 2^s\!,0$, ce qui donnerait le coefficient moyen de $t = + 0,14$. La moyenne arithmétique entre les différentes valeurs de ce coefficient, déduites des comparaisons faites pendant cette expédition, donne ce coefficient $= + 0,12$, avec un accord qui ne laisse rien à désirer.

A) *A Poulkova.*

Date.	Pendule Norm. de Kessels.	K. 1290.	*C.*		
	h m s	h m s	h m s		
Mai 29	22 2 58,00	16 12 56,77	+ 1 20 57,38	16h 32m	$C = + 1^h\ 20^m\ 57^s\!,44 + 0,28\ t$
	41 46,00	51 38,30	57,49		
Juin 5	13 29 30,00	7 13 8,11	+ 1 21 11,69		
	44 38,00	28 13,61	11,72	7 29	$C = + 1\ 21\ 11,71 + 0,17\ t$
	14 1 27,33	45 0,15	11,74		
Juin 6	12 51 49,67	6 31 37,54	+ 1 21 12,23		
	13 10 26,50	50 11,31	12,24	6 49	$C = + 1\ 21\ 12,26 + 0,22\ t$
	24 9,33	7 3 51,84	12,30		
Juin 12	4 18 19,67	21 31 43,23	+ 1 21 29,72		
	30 31,50	43 53,08	29,71	21 44	$C = + 1\ 21\ 29,73 + 0,11\ t$
	44 15,38	57 34,61	29,77		

Date.	Pendule Norm. de Kessels.	K. 1290.	C.		
	h m s	h m s	h m s		
Juin 13	15 36 40,00	8 48 12,46	+ 1 21 29,73		
	54 2,00	9 5 31,62	29,74	9h 7m	$C = + 1^h\ 21^m\ 29^s,75 + 0,14\ t$
	16 5 36,00	17 3,69	29,77		
Juin 19	4 12 13,67	20 57 52,92	+ 1 21 43,51		
	25 40,50	21 11 17,54	43,51	21 11	$C = + 1\ 21\ 43,51 + 0,00\ t$
	37 31,67	23 6,77	43,51		
Juin 21	16 45 6,00	9 24 46,62	+ 1 21 42,71		
	17 6 6,00	45 43,16	42,72	9 45	$C = + 1\ 21\ 42,73 + 0,16\ t$
	23 51,33	10 3 25,53	42,77		
Juin 27 *)	1 23 43,33	17 38 8,77	+ 1 21 56,29		
	42 36,50	56 58,84	56,30	17 56	$C = + 1\ 21\ 56,32 + 0,25\ t$
	59 12,00	18 13 31,54	56,38		
Juillet 25	3 18 25,67	19 4 6,62	+ 0 0 13,46	19h 24m	$C = + 0^h\ 0^m\ 13^s,46 - 0,02\ t$
	58 49,67	44 24,00	13,45		
Août 5	19 28 42,67	10 31 57,23	+ 0 0 40,53		
	20 9 57,00	11 13 4,77	40,55	11 7	$C = + 0\ 0\ 40,55 + 0,08\ t$
	32 8,67	35 12,77	40,58		
Août 7	15 45 17,00	6 41 14,00	+ 0 0 42,51		
	16 19 16,00	7 15 7,38	42,56	7 11	$C = + 0\ 0\ 42,55 + 0,11\ t$
	39 23,00	35 11,08	42,57		
Août 18 **)	19 28 11,67	4 2 39,69	+ 5 38 18,00		
	57 56,00	32 19,16	17,99	4 30	$C = + 5\ 38\ 18,00 + 0,04\ t$
	20 20 38,00	54 57,38	18,02		
Août 19	7 4 36,67	21 11 14,62	+ 0 0 17,63		
	35 14,00	41 46,92	17,64	21 40	$C = + 0\ 0\ 17,63 + 0,00\ t$
	8 2 19,66	22 8 48,15	17,63		

*) La correction de la pendule normale, correspondante aux comparaisons du 27 Juillet, a été déduite des observations du 24 et du 30 Juin. Une interpolation simple entre les corrections trouvées pour ces deux jours, aurait donné, pour le 27 Juin, la correction = + 58 19. Eu égard à l'action de la pression variable de l'atmosphère, sur la marche de la pendule, cette correction se change en + 58s,14.

**) Pendant le retour des chronomètres, de Varsovie à Poulkova, on a oublié un jour de monter le chronomètre auxiliaire. Par cette raison il s'est arrêté pendant 6 heures à peu près. Après la fin des comparaisons du 18 Août l'index du chronomètre fut de nouveau placé approximativement sur le temps moyen de Poulkova.

Date.	Pendule Norm. de Kessels.	K. 1290.	C.		
	h m s	h m s	h m s		
Août 30	0 32 59,00	13 57 5,23	+ 0 0 37,65		
	56 39,00	14 20 41,30	37,69	14h 18m	C = + 0h 0m 37s,68 + 0,12 t
	1 12 55,00	36 54,62	37,70		
Sept. 1	5 57 18,33	19 12 38,46	+ 0 0 38,27		
	6 30 0,00	45 14,77	38,27	19 45	C = + 0 0 38,27 + 0,00 t
	53 49,25	20 9 0,12	38,27		
Sept. 13	18 47 40,00	7 17 23,38	+ 0 0 52,92		
	19 13 46,50	43 25,62	52,91	7 41	C = + 0 0 52,92 + 0,00 t
	33 58,67	8 3 34,46	52,92		

B) *A Moscou.*

Date.	Pendule de Kessels.	K. 1290.	C.		
	h m s	h m s	h m s		
Juin 1	2 15 29,50	19 45 16,85	+ 1 50 2,97	20h 5m	C = + 1h 50m 2s,98 + 0,05 t
	55 12,00	20 24 52,85	2,99		
Juin 2	12 19 11,00	5 47 19,38	+ 1 50 3,33	6 18	C = + 1 50 3,34 + 0,04 t
	13 10 49,00	6 38 48,92	3,35		
Juin 9	22 25 35,00	15 24 18,92	+ 1 50 20,33		
	23 3 48,00	16 2 25,62	20,37	15 57	C = + 1 50 20,36 + 0,08 t
	27 14,00	25 47,77	20,38		
Juin 16	13 46 44,00	6 19 6,46	+ 1 50 35,84		
	14 18 38,33	50 55,45	35,86	6 46	C = + 1 50 35,87 + 0,12 t
	36 39,33	7 8 53,54	35,90		
Juin 16	20 50 9,33	13 21 22,15	+ 1 50 36,18		
	21 18 57,00	50 5,08	36,20	13 49	C = + 1 50 36,19 + 0,00 t
	43 51,67	14 14 55,69	36,18		
Juin 24	23 57 59,00	15 57 3,08	+ 1 50 48,43		
	0 22 34,00	16 21 34,00	48,48	16 20	C = + 1 50 48,47 + 0,14 t
	43 1,67	41 58,31	48,49		
Juin 24	2 42 34,00	18 41 10,92	+ 1 50 48,63		
	3 10 6,33	19 8 38,77	48,60	19 5	C = + 1 50 48,62 + 0,00 t
	26 48,33	25 18,00	48,63		

C) *A Varsovie.*

Date.	Pendule Gugenmus S.	Pendule Gugenmus A	Pendule Shelton.	K. 1290.	C.	
Juill. 30	$0^h 47^m 49^s,33$			$16^h 48^m 49^s,08$	$-0^h 36^m 44^s,74$	
		$0^h 50^m 27^s,50$		52 56,31	44,74	
		1 30 20,00		17 32 42,23	44,67	$17^h 12^m$ $C = -0^h 36^m 44^s,71 + 0,11\,t$
	1 34 47,00			35 39,00	44,69	
	6 34 59,00			22 35 1,69	44,46	
		6 38 36,00		40 7,66	44,44	
	7 30 34,00			23 30 27,54	44,39	23 13 $C = -0\ 36\ 44,40 + 0,16\,t$
		7 35 0,50		36 22,84	44,34	
	7 44 5,33			43 56,61	44,35	
Juill. 31	9 15 5,00			1 14 41,30	−0 36 44,24	
		9 15 44,50		16 50,31	44,26	
	9 30 38,50			30 12,23	44,21	1 24 $C = -0\ 36\ 44,24 + 0,19\,t$
		9 31 58,00		33 1,15	44,23	
		18 2 6,67		10 1 46,00	43,70	
	18 7 15,66			5 24,46	43,71	
	18 40 7,00			38 10,38	43,64	
		18 40 4,50		39 37,61	43,68	10 34 $C = -0\ 36\ 43,66 + 0,15\,t$
	18 59 9,00			57 9,23	43,60	
		19 0 25,33		59 55,08	43,64	
Août 12	16 24 54,67			7 35 50,92	−0 36 16,48	
			$16^h 28^m 43^s,00$	40 56,61	16,51	
	16 35 14,67			46 9,23	16,48	
	17 36 9,33			8 46 53,84	16,39	8 28 $C = -0\ 36\ 16,42 + 0,15\,t$
			18 16 33,33	9 28 29,08	16,35	
	18 22 6,00			32 42,92	16,31	
Août 13	18 29 49,67			9 36 28,31	−0 36 14,67	
			18 35 46,66	43 41,38	14,67	
	19 24 21,00			10 30 50,62	14,57	10 24 $C = -0\ 36\ 14,58 + 0,22\,t$
			19 53 0,33	11 0 42,15	14,45	
	20 0 28,33			6 52,00	14,52	
Août 24	1 48 58,50			16 11 51,58	−0 36 46,07	
			1 58 1,66	21 52,31	45,77	
	2 6 26,66			29 16,92	46,11	
	2 48 27,33			17 11 10,61	45,99	
			3 16 49,33	40 26,92	45,67	
	3 24 38,67			47 16,00	45,96	

Le 24 et le 25 Août, les c, déduits des comparaisons avec les deux pendules, diffèrent considérablement entre eux. Or pour ne pas donner un poids inégal aux deux pendules, il fallait réunir à part les résultats offerts par chaque pendule, et les combiner ensuite. Nous avons ainsi,

par Gugenmus 3, pour $16^h\ 55^m$, $C = -0^h\ 36^m\ 46^s{,}03 + 0{,}17\,t$
par Shelton, pour $17\quad 1$, $C = -0\ 36\ 45{,}72 + 0{,}13\,t$
Moyenne $16\ 58$, $C = -0\ 36\ 45{,}88 + 0{,}15\,t$

Date.	Pendule Gugenmus 3.	Pendule Gugenmus A.	Pendule Shelton.	K. 1290.	C.
Août 25			$8^h\ 3^m\ 1{,}66^s$	$22^h\ 21^m\ 53{,}84^s$	$-0^h\ 36^m\ 43{,}76^s$
	$8^h\ 8^m\ 47{,}50^s$			26 40,62	43,53
	8 44 19,75			23 2 7,04	43,49
	9 3 59,75			21 43,85	43,52
			9 10 21,00	29 2,08	43,73

Gugenmus 3 donne pour $22^h\ 57^m$ $C = -0^h\ 36^m\ 43^s{,}51 + 0{,}05\,t$
Shelton « « $22\ 56$ $C = -0\ 36\ 43{,}74 + 0{,}05\,t$
Moyenne $22\ 56$ $C = -0\ 36\ 43{,}63 + 0{,}05\,t$

Date.	Pendule Gugenmus 3.	Pendule Gugenmus A.	Pendule Shelton.	K. 1290.	C.	
Sept. 6	$9^h\ 7^m\ 53{,}33^s$			$22^h\ 38^m\ 32{,}46^s$	$-0^h\ 36^m\ 26{,}15^s$	
			$9^h\ 12^m\ 26{,}00^s$	43 32,46	26,11	
	9 16 52,33			47 30,00	26,15	
	9 56 46,33			23 27 17,53	26,14	$23^h\ 13^m$ $C = -0^h\ 36^m\ 26^s{,}14 - 0{,}02\,t$
			10 16 59,00	47 54,92	26,13	
	10 23 34,00			54 0,92	26,19	
Sept. 8	15 52 25,50			5 18 4,62	−0 36 25,31	
			15 57 1,00	23 4,62	25,38	
	16 3 31,33			29 8,62	25,28	
	16 36 5,33			6 1 37,39	25,34	$5\ 58$ $C = -0\ 36\ 25{,}35 + 0{,}03\,t$
	16 45 34,00			11 4,46	25,27	
			17 12 23,00	38 14,19	25,30	
	17 18 52,00			44 17,08	25,30	

D) *A Valdaï.*

Dans les comparaisons suivantes, je désignerai les indications de la pendule de **Muston** par M, du chronomètre **Hauth 26** par H, du chronomètre **Arnold et Dent 1005** par AD.

Date.	K. 1290.	Horloge comparée.	C.	
Mai 31	$2^h\ 24^m\ 18{,}23^s$	$8^h\ 32^m\ 4{,}00^s$ M	$+1^h\ 32^m\ 41{,}93^s$	
	27 31,08	8 35 22,67 H	41,72	
	31 9,46	3 37 3,00 AD	41,76	
	3 20 27,00	9 28 22,00 M	41,98	$2^h\ 55^m$ $C = +1^h\ 32^m\ 41^s{,}84 + 0{,}13\,t$
	22 0,46	9 30 1,00 H	41,80	
	23 18,46	4 29 12,00 AD	41,83	

Date.	K. 1290.	Horloge comparée.	C.	
	h m s	h m s	h m s	
Mai 31 *)	6 19 44,54	12 28 9,00 M	+1 32 42,13	
	21 55,15	7 27 48,50 AD	41,97	6^h 52^m $C = +1^h$ 32^m $42^s{,}05 + 0{,}00\,t$
	7 23 5,77	13 31 40,50 M	42,04	
	25 43,15	8 31 36,50 AD	42,06	
Juin 3	22 18 56,31	4 41 52,00 M	+1 32 50,57	
	20 39,46	4 43 38,00 H	50,30	
	24 3,00	23 29 57,00 AD	51,08	22 48 $C = +1$ 32 $50{,}62 - 0{,}09\,t$
	23 16 6,00	5 39 11,00 M	50,54	
	17 53,08	5 41 1,00 H	50,35	
	11 57,23	0 17 51,00 AD	50,92	
Juin 8	23 5 36,92	5 44 29,50 M	+1 32 57,71	
	7 27,69	5 46 20,00 H	57,73	
	8 39,23	0 14 30,00 AD	57,81	23 26 $C = +1$ 32 $57{,}75 + 0{,}10\,t$
	43 52,62	6 22 51,50 M	57,76	
	45 33,92	6 24 32,50 H	57,73	
	47 59,31	0 53 50,00 AD	57,81	
Juin 11	11 30 54,00	18 23 46,00 M	+1 33 8,60	
	33 54,69	18 26 43,00 H	8,59	
	35 45,00	12 41 36,00 AD	8,79	12 2 $C = +1$ 33 $8{,}61 - 0{,}18\,t$
	12 28 21,23	19 21 22,50 M	8,49	
	30 30,00	19 23 27,50 H	8,56	
	31 59,77	13 37 50,50 AD	8,63	
Juin 14 **)	16 45 24,07	23 51 0,00 M	+1 33 14,72	
	52 55,15	17 58 43,00 AD	14,82	17 24 $C = +1$ 33 $14{,}78 + 0{,}04\,t$
	17 56 30,42	1 2 18,00 M	14,72	
	18 0 27,23	19 6 15,00 AD	14,87	
Juin 18	5 59 53,98	13 19 34,00 M	+1 33 22,11	
	6 2 30,46	13 21 54,00 H	22,17	
	5 9,23	7 10 56,00 AD	22,07	6 29 $C = +1$ 33 $22{,}14 + 0{,}07\,t$
	54 36,00	14 14 25,00 M	22,14	
	56 54,46	14 16 27,00 H	22,30	
	58 8,31	8 3 55,00 AD	22,05	

*) Le chronomètre Hauth 26 étant employé pour les observations astronomiques pendant la durée des comparaisons, la comparaison avec ce chronomètre a été omise cette fois.

**) Les observations ont constaté, pour ce jour, une irrégularité extraordinaire dans la marche du chronomètre Hauth 26. Par cette raison nous ne l'avons pas employé cette fois, dans la déduction de la correction du chronomètre auxiliaire.

Date.	K. 1290.	Horloge comparée.	C.	
	h m s	h m s	h m s	
Juin 22.23	21 49 56,78	5 28 0,00 M	+ 1 33 27,63	
	52 28,85	5 30 10,50 H	27,75	
	54 11,77	22 59 54,00 AD	27,71	
	22 39 53,58	6 18 5,00 M	27,66	$22^h\ 16^m\ C = +1^h\ 33^m\ 27^s{,}72 + 0{,}09\,t$
	38 6,92	6 15 56,00 H	27,76	
	39 8,77	23 44 51,00 AD	27,79	
Juin 26	8 8 54,08	16 0 33,00 M	+ 1 33 35,15	
	11 57,23	16 3 10,50 H	35,18	
	13 54,00	9 19 35,00 AD	35,08	$8\ 40\ C = +1\ 33\ 35{,}16 + 0{,}09\,t$
	9 6 27,69	16 58 16,00 M	35,13	
	9 13,85	17 0 36,50 H	35,24	
	10 48,00	10 16 29,00 AD	35,19	

E) *A Vilkomir.*

Les trois horloges qui ont gardé le temps à Vilkomir, ont été la pendule de Muston = M, le chronomètre d'observation Kessels 1297 = K et le chronomètre Arnold et Dent 1005 = AD. En prenant les moyennes, j'ai donné le poids double à la pendule relativement à ceux des deux chronomètres.

Date.	K. 1290.	Horloge comparée.	C.	
	h m s	h m s	h m s	
Juillet 28	12 1 42,00	20 3 52,00 M	− 0 21 53,63	
	2 54,00	20 5 23,00 K	53,58	
	4 21,23	11 42 16,00 AD	53,62	
	49 48,00	20 52 6,00 M	53,44	$12^h\ 27^m\ C = -0^h\ 21^m\ 53^s{,}54 + 0{,}29\,t$
	51 54,00	20 54 31,00 K	53,50	
	53 42,69	12 31 37,50 AD	53,47	
Août 2	17 39 30,46	2 2 16,00 M	− 0 21 41,30	
	40 53,30	2 2 52,00 K	41,41	
	42 30,69	17 20 22,00 AD	41,27	
	18 24 25,15	2 47 18,00 M	41,27	$18\ 3\ C = -0\ 21\ 41{,}30 + 0{,}09\,t$
	25 48,00	2 48 54,00 K	41,35	
	27 11,77	18 5 3,00 AD	41,25	
Août 2	23 22 0,46	7 45 42,00 M	− 0 21 40,87	
	23 12,46	7 47 7,00 K	40,81	
	24 18,00	23 2 9,00 AD	40,82	
	57 14,77	8 21 2,00 M	40,90	$23\ 41\ C = -0\ 21\ 40{,}84 + 0{,}03\,t$
	58 59,19	8 22 59,50 K	40,81	
	24 0 18,00	23 38 9,00 AD	40,73	

Date.	K. 1290.	Horloge comparée.	C.	
	h m s	h m s	h m s	
Août 10	3 23 57,46	12 15 52,00 M	− 0 21 24,35	3h 53m $C = -0^h\ 21^m\ 24^s,47 + 0,03\,t$
	27 36,35	12 19 32,00 K	24,67	
	30 42,46	3 8 29,00 AD	24,55	
	4 15 18,90	13 7 21,75 M	24,39	
	18 43,27	13 10 47,25 K	24,58	
	20 42,46	3 58 29,00 AD	24,51	
Août 15	9 53 38,31	19 6 17,50 M	− 0 21 13,04	10 34 $C = -0\ 21\ 12,91 + 0,11\,t$
	57 32,92	19 10 4,33 K	12,79	
	10 0 34,85	9 38 21,00 AD	13,02	
	11 9 15,46	20 22 7,00 M	12,99	
	10 54,69	20 23 38,00 K	12,72	
	14 19,73	10 52 6,00 AD	12,79	
Août 22	14 51 55,04	0 32 1,00 M	− 0 21 52,03	15 27 $C = -0\ 21\ 52,10 + 0,02\,t$
	55 18,46	0 35 4,00 K	52,28	
	56 48,23	14 33 41,50 AD	52,05	
	15 47 31,50	1 27 46,50 M	52,03	
	49 24,69	1 29 19,00 K	52,24	
	52 53,77	15 29 47,00 AD	52,01	
Août 27	22 14 11,88	8 15 8,50 M	− 0 21 42,14	22 38 $C = -0\ 21\ 42,15 + 0,03\,t$
	15 58,16	8 16 27,50 K	42,24	
	17 20,77	21 54 13,50 AD	42,11	
	57 10,15	8 58 13,75 M	42,13	
	59 20,65	8 59 29,50 K	42,24	
	23 2 2,31	22 38 55,00 AD	42,07	
Sept. 4	20 45 52,73	7 17 56,50 M	− 0 21 31,55	21 11 $C = -0\ 21\ 31,56 + 0,05\,t$
	49 19,38	7 20 45,75 K	31,69	
	51 53,77	20 28 46,00 AD	31,49	
	21 29 40,61	8 1 51,50 M	31,55	
	31 47,77	8 3 21,00 K	31,67	
	34 41,77	21 11 29,00 AD	31,44	
Sept. 10	10 58 19,15	21 52 17,00 M	− 0 21 24,14	11 30 $C = -0\ 21\ 24,06 - 0,07\,t$
	11 0 53,31	21 54 8,50 K	23,90	
	3 56,77	10 40 41,00 AD	23,97	
	55 23,42	22 49 30,50 M	24,18	
	57 58,15	22 51 18,33 K	23,85	
	12 1 48,00	11 38 32,00 AD	24,12	

§ 11. Comparaisons et corrections des chronomètres de voyage.

Les tableaux suivants contiennent:

dans la colonne I, la date des comparaisons
« « « II, le lieu d'observation
« « « III, l'indication du chronomètre auxiliaire
« « « IV, l'indication correspondante du chronomètre comparé, dont le nom se trouve en tête de chaque série
« « « V, les corrections du chronomètre comparé, par rapport au temps moyen.

Pour abbréger, j'ai désigné, dans la colonne II, Poulkova, pendant l'expédition de Moscou par P, pendant l'expédition de Varsovie par 𝔓, Moscou par M, Varsovie par 𝔚, Valdai par v et Vilkomir par 𝔳.

Le calcul des corrections données dans la colonne V est trop simple, pour réclamer des explications ultérieures. Elles reposent entièrement sur les nombres donnés dans les colonnes III et IV et sur les corrections du chronomètre auxiliaire, données dans le § 10, d'où elles se déduisent par de simples additions et soustractions. Je remarque seulement que chaque correction est le résultat moyen de deux comparaisons successives entre le chronomètre respectif et le chronomètre auxiliaire.

Les chronomètres hebdomadaires qui, pour la longitude de Moscou, devaient fournir une détermination entièrement indépendante, et se trouvaient sur les deux lieux d'observation, à des époques où le chronomètre auxiliaire, faisant partie de l'envoi principal, était en voyage, ont été directement comparés avec les pendules normales des deux observatoires. C'est ainsi que, pour l'expédition de Moscou, nous trouvons, dans la colonne III du tableau des comparaisons des chronomètres hebdomadaires, les indications du chronomètre auxiliaire remplacées par celles des horloges normales des deux observatoires. La même comparaison directe entre les chronomètres hebdomaires et la pendule normale a obtenu encore, dans l'expédition de Varsovie, pour l'époque du premier départ des chronomètres de Poulkova. — A cause de ces comparaisons directes, le calcul des corrections de ces chronomètres est un peu plus prolixe que dans les cas où tous les chronomètres sont comparés à l'aide du même chronomètre auxiliaire. Toutes les quantités dont elles dépendent, sont données dans les colonnes III et IV des tableaux suivants et dans les tableaux des §§ 4, 5, 6.

Il paraît que les comparaisons, à l'aide de coïncidences, entre deux horloges dont l'une est reglée sur le temps sidéral, l'autre sur le temps moyen, peuvent introduire, dans les longitudes à déterminer, de petites erreurs de nature constante, dès que ces comparaisons sont exécutées par différents observateurs. Ces erreurs ont leur origine dans le fait incontestable que différents observateurs notent différemment les moments des coïncidences de deux hor-

loges. L'un note la première bonne coïncidence, l'autre, par estime, la coïncidence moyenne, un troisième a l'habitude de noter la dernière bonne coïncidence ou plutôt le premier moment où les deux battements s'éloignent sensiblement l'un de l'autre. Ces différences varient encore d'après la nature et la précision des battements des deux horloges à comparer et, par conséquent, il est presque impossible d'en évaluer la quantité exactement. Heureusement l'effet en est presque imperceptible dans les longitudes. Quoique l'existence de ces différences se soit prononcée distinctement dans nos comparaisons exécutées alternativement par deux astronomes, il a été prouvé en même temps que, pour deux observateurs exercés, les différences constantes ne s'élèvent qu'à 0ˢ02 tout au plus.

Les comparaisons exécutées à l'aide d'un chronomètre auxiliaire qui fait 13 battements en 6 secondes, quoique sujettes à des erreurs accidentelles un peu plus grandes, ne sont pas exposées à ces erreurs constantes, parce que toutes les 6 secondes il n'y a qu'une seule coïncidence entre les battements des deux horloges. Il ne faut que de très peu d'habitude pour ne se tromper jamais d'un seul battement dans ces comparaisons. Naturellemment il y a des cas où les coïncidences sont moins exactes que dans d'autres, mais on voit facilement que les erreurs qui en résultent, comptent parmi les erreurs accidentelles et doivent s'éliminer dans la moyenne d'un grand nombre de comparaisons. C'est ce qui a été prouvé aussi, pour M. Döllen et moi, par des expériences directes (Voyez Exp. chron. de 1844 pag. 11).

Date.	Lieu.	Dent 1747. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.	Hauth 30. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 16 42,69	16 57 5,25	+ 0 40 34,84	16 18 49,38	17 28 31,60	+ 0 11 15,18
31	v.	2 33 5,31	3 13 42,00	0 52 5,12	3 10 33,00	4 20 18,00	22 56,86
31	v.	6 23 42,46	7 4 21,00	0 52 3,51	7 13 46,15	8 23 31,60	22 56,60
Juin 1	M.	19 52 30,46	20 33 26,00	1 9 7,43	19 53 32,54	21 3 19,40	40 16,11
2	M.	5 56 42,00	6 37 41,00	1 9 4,33	5 58 2,31	7 7 49,00	40 16,64
3	v.	22 26 27,00	23 7 44,00	0 51 33,64	22 28 34,61	23 38 22,00	23 3,25
5	P.	7 14 12,23	7 55 43,00	0 39 40,82	7 15 22,38	8 25 12,20	11 21,87
6	P.	6 33 12,00	7 14 50,50	0 39 33,73	6 35 18,46	7 45 6,40	11 24,29
7	v.	23 10 37,62	23 52 33,00	0 51 2,36	23 12 18,93	0 22 9,13	23 7,54
9	M.	15 37 29,54	16 19 43,00	1 8 6,88	15 40 24,92	16 50 21,20	40 24,07
11	v.	11 37 48,00	12 20 20,00	0 50 36,65	11 39 27,00	12 49 26,80	23 8,84
12	P.	21 32 59,54	22 15 45,50	0 38 43,76	21 34 6,92	22 44 8,00	11 28,64
13	P.	8 49 42,23	9 32 31,50	0 38 40,46	8 51 7,08	10 1 8,00	11 28,81
14	v.	16 56 36,46	17 39 39,00	0 50 12,23	16 58 9,00	18 8 12,00	23 11,78
16	M.	6 26 56,77	7 10 15,50	1 7 17,11	6 28 15,00	7 38 22,60	40 28,25
16	M.	13 29 25,85	14 12 47,00	1 7 15,03	13 30 44,54	14 40 52,20	40 28,52
18	v.	6 8 30,00	6 52 7,00	0 49 45,12	6 10 3,00	7 20 13,60	23 11,53
19	P.	20 59 15,23	21 43 8,50	0 37 50,24	21 0 25,69	22 10 34,00	11 35,20
21	P.	9 26 39,23	10 10 43,00	0 37 38,93	9 28 10,38	10 38 17,00	11 36,08
22	v.	21 57 43,85	22 42 3,00	0 49 8,55	22 0 29,76	23 10 37,20	23 20,27
24	M.	16 2 3,92	16 46 41,00	1 6 11,36	16 3 9,46	17 13 21,40	40 36,50
24	M.	18 47 54,92	19 32 33,00	1 6 10,55	18 49 7,38	19 59 19,40	40 36,60
26	v.	8 18 12,00	9 3 6,00	0 48 41,14	8 20 1,15	9 30 16,80	23 19,50
27	P.	17 40 20,54	18 25 29,00	0 36 47,82	17 41 30,69	18 51 47,00	11 39,97
Juill. 25	P.	19 8 3,23	18 35 11,00	+ 0 33 5,69	19 9 23,31	18 58 23,80	+ 0 11 12,97
28	v.	12 5 50,08	11 33 27,50	+ 0 10 28,98	12 7 24,00	11 56 33,20	− 0 11 2,79
30	B.	16 58 4,62	16 26 6,00	− 0 4 46,10	16 59 18,00	16 48 33,20	− 0 25 59,97
31	B.	10 20 32,08	9 48 40,00	− 0 4 51,60	10 22 14,08	10 11 31,40	− 0 26 1,00
Août 2	v.	17 43 54,22	17 12 25,50	+ 0 9 47,38	17 45 29,77	17 34 52,80	− 0 11 4,36
2	v.	23 25 6,46	22 53 40,00	+ 0 9 45,64	23 27 3,00	23 16 26,80	− 0 11 4,62
5	P.	10 35 42,92	10 4 43,00	+ 0 31 40,45	10 36 50,08	10 26 20,20	+ 0 11 10,44
7	P.	6 44 34,15	6 13 50,50	+ 0 31 26,17	6 45 49,15	6 35 22,20	+ 0 11 9,47
10	v.	3 32 12,00	3 1 58,00	+ 0 8 49,45	3 33 39,00	3 23 19,00	− 0 11 4,55
12	B.	8 13 30,46	7 43 40,00	− 0 6 25,97	7 55 48,00	7 45 34,00	− 0 26 2,45
13	B.	9 37 57,46	9 18 17,00	− 0 6 34,16	9 49 44,77	9 39 33,40	− 0 26 3,25
15	v.	10 3 46,61	9 34 27,00	+ 0 8 6,71	10 6 9,00	9 56 2,00	− 0 11 5,90
18	P.	4 4 38,31	9 13 0,50	+ 0 29 55,80	4 6 8,08	9 33 17,00	+ 0 11 9,07
19	P.	21 14 24,92	20 44 58,50	+ 0 29 44,05	21 16 11,54	21 5 20,00	+ 0 11 9,17
22	v.	14 58 45,00	14 29 46,00	+ 0 7 6,84	15 1 5,54	14 50 17,60	− 0 11 4,21
24	B.	16 35 9,69	16 7 32,00	− 0 9 8,22	16 38 19,85	16 27 33,80	− 0 25 59,85
25	B.	22 29 9,92	22 1 44,50	− 0 9 18,24	22 31 17,31	22 20 32,80	− 0 25 59,15
27	v.	22 18 27,23	21 50 23,00	+ 0 6 22,06	22 20 43,61	22 10 2,60	− 0 11 1,16
30	P.	14 5 22,62	13 37 47,00	+ 0 28 13,28	14 7 7,38	13 56 32,40	+ 0 11 12,65
Sept. 1	P.	19 19 42,46	18 52 26,50	+ 0 27 54,23	19 21 13,15	19 10 39,00	+ 0 11 12,42
4	v.	20 54 30,23	20 27 46,00	+ 0 5 12,63	20 56 9,92	20 45 42,60	− 0 11 4,28
6	B.	22 50 3,69	22 23 41,00	− 0 10 3,46	22 54 29,54	22 44 2,40	− 0 25 59,01
8	B.	5 31 35,31	5 5 24,75	− 0 10 14,76	5 33 59,54	5 23 32,60	− 0 25 58,38
10	v.	11 5 53,77	10 40 7,00	+ 0 4 22,79	11 7 39,00	10 57 12,00	− 0 10 56,98
13	P.	7 20 54,46	6 55 36,50	+ 0 26 10,88	7 22 48,92	7 12 22,60	+ 0 11 19,24

Date.	Lieu.	Hauth 32. K. 1290.	Hauth 32. Chronomètre comparé.	Hauth 32. Corr. du Chronomètre.	Kessels 1276. K. 1290.	Kessels 1276. Chronomètre comparé.	Kessels 1276. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 20 31,00	16 47 6,40	+ 0 53 54,01	16 22 10,85	17 46 31,40	+ 23 56 36,86
31	v.	3 12 36,00	3 39 37,60	1 5 40,26	3 16 30,00	4 41 3,80	0 8 8,06
31	v.	7 15 10,84	7 42 122,0	1 5 40,69	7 16 31,85	8 41 7,60	0 8 6,30
Juin 1	M.	19 55 59,08	20 22 59,00	1 23 3,06	19 57 58,62	21 22 51,60	0 25 10,00
2	M.	5 59 54,92	6 26 53,20	1 23 5,05	6 1 20,31	7 26 16,00	0 25 7,65
3	v.	22 30 21,00	22 57 18,00	1 5 53,64	22 32 6,00	23 57 19,20	0 7 37,43
5	P.	7 16 12,46	7 43 8,00	0 54 16,15	7 16 57,69	8 42 24,80	23 55 44,58
6	P.	6 38 12.92	7 5 6,40	0 54 18,76	6 39 31,38	8 5 6,40	23 55 37,22
7	v.	23 14 27,54	23 41 19,40	1 6 5,88	23 16 31,15	0 42 24,00	0 7 4,89
9	M.	15 42 36,00	16 9 28,80	1 23 27,55	15 43 56,31	17 10 10,80	0 24 5,86
11	v.	11 41 55,84	12 8 48,00	1 6 16,47	11 49 43,38	13 16 19,60	0 6 32,40
12	P.	21 35 18,69	22 2 9,00	0 54 39,41	21 36 18,00	23 3 8,80	23 54 38,92
13	P.	8 52 18,46	9 19 7,60	0 54 40,59	8 53 13,85	10 20 8,40	23 54 35,18
14	v.	17 7 15,00	17 34 2,80	1 6 26,98	17 9 54,00	18 37 4,00	0 6 4,78
16	M.	6 30 33,69	6 57 21,20	1 23 48,34	6 31 58,85	7 59 27,00	0 23 7,70
16	M.	13 32 54,23	13 59 41,40	1 23 49,02	13 34 16,85	15 1 47,80	0 23 5,24
18	v.	6 11 33,00	6 38 17,40	1 6 37,73	7 4 13,84	8 32 2,00	0 5 34,01
19	P.	21 1 27,46	21 28 8,00	0 55 2,97	21 3 5,54	22 31 6,80	23 53 42,25
21	P.	9 29 30,92	10 56 7,20	0 55 6,43	9 32 45,85	11 0 57,60	23 53 30,96
22	v.	22 3 27,00	22 30 1,40	1 6 53,31	22 6 3,69	23 34 31,20	0 5 0,20
24	M.	16 4 48,00	16 31 22,00	1 24 14,45	16 6 19,38	17 35 7,20	0 22 0,63
24	M.	18 50 32,54	19 17 6,20	1 24 14,96	18 53 23,08	20 22 12,00	0 21 59,70
26	v.	8 21 49,84	8 48 23,20	1 7 1,79	8 23 31,38	9 52 38,20	0 4 28,34
27	P.	17 43 6,69	18 9 37,60	0 55 25,38	17 44 35,54	19 13 55,60	23 52 36,23
Juill. 25	𝔓.	19 10 41,54	18 14 29,60	+ 0 56 25,40	19 11 52,85	19 23 15,80	— 0 11 9,49
28	𝔳.	12 9 4.61	11 12 53,40	34 17,62	12 11 10,00	12 23 6,00	33 49,58
30	𝔅.	17 1 5,54	16 4 52,40	19 28,42	17 2 28,62	17 14 50,80	49 6,90
31	𝔅.	10 23 10,62	9 26 57,00	19 29,95	10 24 32,31	10 37 2,00	49 13,36
Août 2	𝔳.	17 46 48,00	16 50 33,60	34 33,06	17 48 18,00	18 1 14,20	34 37,54
2	𝔳.	23 28 33,00	22 32 18,00	34 34,18	23 30 18,00	23 43 17,00	34 39,82
5	𝔓.	10 37 56,77	9 41 41,20	56 56,11	10 40 3,69	10 53 33,20	12 48,98
7	𝔓.	6 47 27,92	5 51 10,60	56 59,84	6 48 45,00	7 2 32,40	13 4,87
10	𝔳.	3 35 9,00	2 38 49,80	34 54,65	3 36 36,00	3 50 56,80	35 45,34
12	𝔅.	7 59 1,38	7 2 40,40	20 4,54	8 6 5,07	8 20 52,00	51 3,37
13	𝔅.	9 53 12.92	8 56 50,80	20 7,50	9 56 20,77	10 11 19,40	51 13,24
15	𝔳.	10 7 40,38	9 11 16,80	35 10,69	10 15 52,15	10 31 14,00	36 34,74
18	𝔓.	4 7 30,00	8 48 14,80	57 33,19	4 8 50,54	10 1 52,20	14 43,67
19	𝔓.	21 18 17,77	20 20 59,40	57 36,00	21 20 23,08	21 35 33,80	14 53,09
22	𝔳.	15 3 39,00	14 6 16,80	35 30,05	15 5 30,00	15 21 4,00	37 26,15
24	𝔅.	16 40 39,00	15 43 14,40	20 38,70	16 42 43,62	16 58 34,20	52 36,48
25	𝔅.	22 33 45,00	21 36 19,40	20 41,94	22 35 32,77	22 51 33,20	52 44,09
27	𝔳.	22 22 12,00	21 24 44,00	35 45,84	22 23 35,07	22 39 57,00	38 4,10
30	𝔓.	14 8 11,31	13 10 41,60	58 7,38	14 9 17,54	14 26 8,80	16 13,59
Sept. 1	𝔓.	19 22 17,31	18 24 41,80	58 13,78	19 23 59,77	19 41 11,00	16 32,96
4	𝔳.	20 57 36,00	19 59 53,60	36 10,80	20 59 15,69	21 16 56,00	39 11,91
6	𝔅.	22 59 36,23	22 1 47,80	21 22,28	23 2 32,08	23 20 32,80	54 26,86
8	𝔅.	5 38 3,69	4 40 13,20	21 25,17	5 39 58,38	5 58 10,80	54 37,74
10	𝔳.	11 9 9,00	10 11 13,20	59 10,75	11 10 42,00	11 29 17,20	39 59,18
13	𝔓.	7 24 19,62	6 26 16,60	58 55,94	7 25 20,31	7 44 23,80	18 10,57

Date.	Lieu.	Hauth 52. K. 1290.	Hauth 52. Chronomètre comparé.	Hauth 52. Corr. du Chronomètre.	Hauth 18. K. 1290.	Hauth 18. Chronomètre comparé.	Hauth 18. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 23 39,69	22 7 27,00	+19 37 10,11	16 24 29,54	22 14 18,50	+19 31 8,46
31	v.	2 34 43,38	8 23 56,00	19 43 29,19	2 36 47,08	8 32 16,50	37 12,40
31	v.	6 25 24,92	12 15 14,50	19 42 52,47	6 27 6,00	12 23 13,50	36 34,59
Juin 1	M.	19 59 12,69	1 55 0,25	19 54 15,42	20 0 7,62	2 2 29,25	47 41,35
2	M.	6 2 54,46	12 0 16,75	19 52 41,05	6 5 57,92	12 9 59,50	46 1,76
3	v.	22 34 0,00	4 37 46,00	19 29 4,64	22 35 18,46	4 46 3,00	22 6,10
5	P.	7 18 2,31	13 27 1,25	19 12 12,75	7 18 54,92	13 35 5,00	5 1,61
6	P.	6 40 36,92	12 53 17,25	19 8 31,91	6 41 16,15	13 1 17,25	1 11,14
7	v.	23 18 13,38	5 37 21,00	19 13 50,12	23 19 15,69	5 46 0,50	6 12,94
9	M.	15 45 37,15	22 11 16,75	19 24 40,75	15 47 7,62	22 20 36,25	16 51,73
11	v.	11 52 0,46	18 24 43,00	19 0 26,09	11 53 45,46	18 34 33,00	18 52 21,09
12	P.	21 37 3,46	4 15 8,75	18 43 24,43	21 38 15,92	4 24 38,75	35 6,89
13	P.	8 54 21,46	15 34 14,00	18 41 37,19	8 54 55,62	15 43 9,50	33 15,85
14	v.	17 15 56,31	0 0 57,00	18 48 14,09	17 17 17,07	0 10 53,00	39 38,86
16	M.	6 33 20,08	13 24 20,25	18 59 35,68	6 34 23,77	13 34 10,75	50 48,87
16	M.	13 35 39,22	20 27 47,25	18 58 28,86	13 37 18,69	20 38 15,50	49 39,38
18	v.	6 16 7,38	13 14 42,00	18 34 47,51	6 17 32,77	13 25 13,50	25 41,40
19	P.	21 3 36,69	4 8 17,50	18 17 2,70	21 4 7,38	4 18 14,25	7 36,64
21	P.	9 34 19,15	16 44 45,75	18 11 16,11	9 35 28,62	16 55 35,25	1 36,08
22	v.	22 7 18,46	5 23 33,00	18 17 13,17	22 8 10,15	5 34 20,00	7 17,87
24	M.	16 7 30,23	23 30 29,25	18 27 49,43	16 8 48,92	23 41 58,00	17 39,37
24	M.	18 55 35,54	2 19 1,25	18 27 22,90	18 57 29,31	2 31 6,25	17 11,67
26	v.	8 25 56,77	15 55 22,50	18 4 9,42	8 27 10,38	16 7 1,00	17 53 44,54
27	P.	17 45 28,62	1 20 11,00	17 47 13,91	17 46 15,00	1 31 37,00	36 34,30
Juill. 25	P.	19 13 30,00	3 12 44,50	+16 0 58,96	19 15 3,23	3 29 8,00	+15 46 8,69
28	v.	12 12 54,00	20 22 36,00	15 28 24,42	12 14 6,00	20 38 57,00	15 13 15,43
30	M.	17 4 8,31	1 22 20,50	15 5 3,09	17 5 9,69	1 38 47,00	14 49 37,97
31	M.	10 25 44,54	18 46 43,25	15 2 17,62	10 26 29,31	19 2 58,25	14 46 47,39
Août 2	v.	17 49 53,77	2 19 46,50	15 8 25,93	17 51 11,54	2 36 51,00	14 52 39,21
2	v.	23 31 50,77	8 2 38,00	15 7 31,95	23 32 50,77	8 19 27,00	14 51 42,90
5	P.	10 41 45,92	19 22 4,50	15 20 21,94	10 43 9,00	19 39 32,50	15 4 17,02
7	P.	6 56 39,00	15 44 1,75	15 13 19,78	6 57 51,00	16 1 32,25	14 57 1,28
10	v.	3 37 56,31	12 36 23,00	14 40 8,76	3 39 18,00	12 54 21,00	14 23 32,46
12	M.	8 15 16,38	17 22 10,00	14 16 49,95	8 16 53,08	17 40 41,00	13 59 55,65
13	M.	9 58 28,62	19 9 30,50	14 12 43,51	10 0 32,31	19 28 35,50	13 55 42,20
15	v.	10 17 30,00	19 36 14,00	14 20 3,10	10 18 39,00	19 54 44,00	14 2 42,12
18	P.	4 10 33,46	19 17 53,25	14 30 58,20	4 11 32,08	19 36 40,25	14 13 9,82
19	P.	21 22 35,31	6 57 33,75	14 25 19,19	21 23 53,08	7 16 52,50	14 7 18,21
22	v.	15 7 24,00	0 52 49,00	13 52 42,86	15 8 38,54	1 12 30,50	13 34 15,89
24	M.	16 44 32,31	2 37 48,50	13 29 57,91	16 46 33,00	2 58 39,00	13 11 8,10
25	M.	22 39 14,54	8 37 16,00	13 25 14,89	22 41 29,54	8 58 33,00	13 6 12,89
27	v.	22 25 20,77	8 30 58,00	13 32 40,60	22 27 44,31	8 52 43,00	13 13 19,14
30	P.	14 10 3,92	0 25 53,00	13 44 48,59	14 10 27,23	0 46 0,25	13 25 4,65
Sept. 1	P.	19 25 38,54	5 49 52,75	13 36 24,06	19 27 52,77	6 11 22,50	13 16 18,54
4	v.	21 0 50,31	7 36 43,50	13 2 35,22	21 2 33,69	7 59 5,00	12 40 57,10
6	M.	23 3 55,38	9 47 40,00	12 39 49,24	23 4 44,08	10 9 33,25	12 18 44,68
8	M.	5 41 43,62	16 30 17,25	12 35 1,05	5 42 46,85	16 52 39,75	12 13 41,78
10	v.	11 13 16,15	22 10 13,00	12 41 39,17	11 14 53,77	22 33 40,00	12 19 49,79
13	P.	7 26 42,46	18 34 26,00	12 53 9,38	7 27 27,23	18 57 30,50	12 30 49,65

Date.	Lieu.	Hauth 11. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.	Hauth 26. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s			
Mai 29	P.	16 25 12,23	22 22 8,00	+19 24 1,65			
31	v.	2 38 19,23	8 40 55,50	19 30 5,57			
31	v.	6 28 39,00	12 31 53,50	19 29 27,55			
Juin 1	M.	20 1 4,85	2 10 34,00	19 40 33,83			
2	M.	6 7 12,46	12 18 23,00	19 38 52,80			
3	v.	22 36 39,46	4 54 36,00	19 14 54,09			
5	P.	7 19 38,54	13 43 0,25	18 57 49,98			
6	P.	6 42 3,92	13 9 18,75	18 53 57,41			
7	v.	23 20 6,00	5 54 5,00	18 58 58,75			
9	M.	15 48 37,38	22 29 16,50	19 9 41,24			
11	v.	11 55 18,00	18 43 14,00	18 45 12,63			
12	P.	21 39 3,00	4 32 34,00	18 27 58,72			
13	P.	8 55 32,08	15 50 54,25	18 26 7,56			
14	v.	17 18 54,23	0 19 37,50	18 32 31,51			
16	M.	6 35 9,46	13 42 1,25	18 43 44,06			
16	M.	13 38 49,62	20 46 51,25	18 42 34,56			
18	v.	6 18 50,31	13 33 36,00	18 18 36,45			
19	P.	21 4 42,23	4 26 55,00	18 0 30,74			
21	P.	9 36 14,31	17 3 29,00	17 54 28,03			
22	v.	22 9 13,61	5 42 32,50	18 0 8,83			
24	M.	16 10 13,62	23 50 28,25	18 10 33,83			
24	M.	18 58 29,31	2 39 11,75	18 10 6,17			
26	v.	8 28 36,46	16 15 30,00	17 46 41,62			
27	P.	17 47 1,38	1 39 28,00	17 29 29,68			
					h m s	h m s	h m s
Juill. 25	P.				19 16 21,92	3 30 22,25	+15 46 13,13
28	v.				12 15 27,46	20 40 17,00	15 13 16,90
30	M.				17 6 3,23	1 39 41,50	14 49 37,01
31	M.				10 27 18,23	19 3 47,75	14 46 46,81
Août 2	v.				17 52 21,69	2 38 4,00	14 52 36,36
2	v.				23 33 48,46	8 20 27,00	14 51 40,64
5	P.				10 52 18,23	19 48 50,25	15 4 8,52
7	P.				6 59 27,46	16 3 14,25	14 56 55,75
10	v.				3 42 8,77	12 57 22,00	14 23 22,23
12	M.				8 18 14,77	17 42 13,50	13 59 44,84
13	M.				10 5 28,38	19 33 41,50	13 55 32,28
15	v.				10 21 31,38	19 57 47,00	14 2 31,50
18	P.				4 15 39,23	19 40 59,25	14 12 57,97
19	P.				21 26 35,31	7 19 44,25	14 7 8,69
22	v.				15 10 12,00	1 14 16,00	13 34 3,86
24	M.				16 48 26,31	3 0 44,50	13 10 55,92
25	M.				22 43 14,54	9 0 28,25	13 6 2,65
27	v.				22 29 3,23	8 54 13,50	13 13 7,56
30	P.				14 11 49,62	0 47 36,00	13 24 51,29
Sept. 1	P.				19 29 33,69	6 14 2,50	13 16 9,46
4	v.				21 6 36,00	8 3 13,00	12 41 51,41
6	M.				23 5 43,62	10 10 35,25	12 18 42,23
8	M.				5 44 25,62	16 54 18,25	12 13 42,05
10	v.				11 18 15,00	22 37 0,00	12 19 51,02
13	P.				7 28 39,92	18 58 40,00	12 30 52,84

Date.	Lieu.	Hauth 31. K. 1290.	Hauth 31. Chronomètre comparé.	Hauth 31. Corr. du Chronomètre.	Dent 1778. K. 1290.	Dent 1778. Chronomètre comparé.	Dent 1778. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 25 45,92	17 2 14,00	+ 0 44 29,34	16 26 22,62	16 40 20,00	+ 1 7 0,05
31	v.	2 39 57,00	3 16 24,00	0 56 14,84	2 41 30,46	2 55 33,00	18 39,30
31	v.	6 30 25,84	7 6 52,50	0 56 15,39	6 40 30,46	6 54 33,50	18 39,01
Juin 1	M.	20 1 59,08	20 38 24,00	1 13 38,06	20 2 40,15	20 16 51,00	35 52,13
2	M.	6 8 16,15	6 44 40,00	1 13 39,49	6 9 36,92	6 23 49,00	35 51,26
3	v.	22 38 21,46	23 14 43,00	0 56 29,09	22 40 36,46	22 54 56,00	18 31,09
5	P.	7 20 27,69	7 56 48,00	0 44 51,38	7 21 17,77	7 35 44,25	6 45,22
6	P.	6 42 45,27	7 19 3,75	0 44 53,76	6 43 26,08	6 57 56,00	6 42,33
7	v.	23 20 57,23	23 57 14,00	0 56 40,98	23 22 9,23	23 36 47,00	18 19,98
9	M.	15 50 35,77	16 26 53,00	1 14 3,13	15 51 44,08	16 6 33,00	35 31,44
11	v.	11 57 12,00	12 33 29,00	0 56 51,62	11 58 50,07	12 13 49,50	18 9,19
12	P.	21 39 38,08	22 15 54,00	0 45 13,80	21 40 26,77	21 55 32,50	6 24,00
13	P.	8 56 39,46	9 32 55,00	0 45 14,19	8 57 15,46	9 12 22,50	6 22,70
14	v.	17 20 24,46	17 56 39,00	0 57 0,24	17 21 48,46	17 37 2,00	18 1,24
16	M.	6 36 12,69	7 12 27,00	1 14 21,54	6 37 10,62	6 52 33,00	35 13,47
16	M.	13 39 57,00	14 16 11,00	1 14 22,19	13 40 36,46	13 56 0,00	35 12,65
18	v.	6 20 52,15	6 57 3,50	0 57 10,79	6 22 36,00	6 38 7,00	17 51,14
19	P.	21 5 17,77	21 41 27,50	0 45 33,78	21 5 57,92	21 21 35,00	6 6,43
21	P.	9 37 12,23	10 13 18,00	0 45 36,95	9 38 7,85	9 53 47,50	6 3,07
22	v.	22 11 36,69	22 47 41,50	0 57 22,91	22 12 54,46	22 28 40,00	17 42,18
24	M.	16 11 58,15	16 48 2,50	1 14 44,11	16 13 26,77	16 29 21,50	34 53,73
24	M.	18 59 14,77	19 35 19,00	1 14 44,38			
26	v.	8 30 24,46	9 6 28,00	0 57 31,62			
27	P.	17 48 5,77	18 24 8,00	0 45 54,07			
Juill. 25	P.	19 18 57,92	18 32 21,00	+ 0 46 50,38			
28	v.	12 16 42,00	11 30 5,00	24 43,45			
30	B.	17 7 7,85	16 20 30,00	9 53,14			
31	B.	10 27 56,08	9 41 17,00	9 55,41			
Août 2	v.	17 53 21,69	17 6 40,50	24 59,87			
2	v.	23 34 38,31	22 47 57,00	25 0,49			
5	P.	10 56 17,31	10 9 34,25	47 23,60			
7	P.	7 1 47,08	6 15 2,00	47 27,62			
10	v.	3 44 14,54	2 57 26,00	25 24,00			
12	B.	8 19 35,50	7 32 47,00	10 32,08			
13	B.	10 7 27,69	9 20 37,00	10 36,09			
15	v.	10 22 57,69	9 36 5,00	25 39,82			
18	P.	4 16 44,54	9 7 0,00	48 2,54			
19	P.	21 27 38,31	20 39 50,50	48 5,44			
22	v.	15 11 16,15	14 23 24,00	26 0,00			
24	B.	16 49 57,23	16 2 2,00	11 9,34			
25	B.	22 44 26,54	21 56 32,00	11 10,90			
27	v.	22 30 11,08	21 42 13,50	26 15,41			
30	P.	14 12 53,54	13 24 52,50	48 38,71			
Sept. 1	P.	19 31 3,46	18 42 59,50	48 42,23			
4	v.	21 8 3,00	20 19 53,00	26 38,41			
6	B.	23 6 55,38	22 18 41,00	11 48,24			
8	B.	5 45 35,77	4 57 18,25	11 52,21			
10	v.	11 19 50,31	10 31 28,50	26 57,82			
13	P.	7 30 22,38	6 41 54,75	49 20,55			

Date.	Lieu.	Dent 1613. K. 1290.	Dent 1613. Chronomètre comparé.	Dent 1613. Corr. du Chronomètre.	Dent 1630. K. 1290.	Dent 1630. Chronomètre comparé.	Dent 1630. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 56 25,38	15 41 16,50	+ 2 7 6,31	16 28 9,00	15 57 57,25	+ 1 51 9,18
31	v.	2 51 33,00	2 5 26,00	18 48,84	2 53 17,53	2 23 12,00	2 2 47,37
31	v.	6 52 27,23	6 6 20,00	18 49,28	6 54 14,77	6 24 10,00	2 2 46,82
Juin 1	M.	20 4 1,38	19 17 56,50	36 7,86	20 4 48,46	19 34 52,00	2 19 59,44
2	M.	6 12 45,69	5 26 41,00	36 8,03	6 13 34,15	5 43 39,00	2 19 58,49
3	v.	22 44 48,23	9 58 45,50	18 53,35	22 46 20,77	10 16 33,50	2 2 37,89
5	P.	7 23 23,08	6 37 21,50	7 13,28	7 23 59,54	6 54 18,50	1 50 52,74
6	P.	6 45 8,54	5 59 7,50	7 13,29	6 45 47,54	6 16 9,50	1 50 50,29
7	v.	23 23 30,23	22 37 30,50	18 57,48	23 24 30,46	22 55 0,00	2 2 28,21
9	M.	15 54 7,85	15 8 10,50	36 17,71	15 54 52,85	15 25 32,00	2 19 41,21
11	v.	12 2 42,00	11 16 46,00	19 4,58	12 4 10,61	11 34 59,00	2 2 20,19
12	P.	21 41 20,54	20 55 26,00	7 24,27	21 42 0,23	21 12 55,00	1 50 34,96
13	P.	8 58 22,15	8 12 27,50	7 24,39	8 59 2,54	8 29 58,50	1 50 33,78
14	v.	17 23 6,23	16 37 12,50	19 8,52	17 24 53,77	16 55 56,00	2 2 12,55
16	M.	6 39 12,92	5 53 21,50	36 27,27	6 40 8,31	6 11 19,00	2 19 25,16
16	M.	13 42 25,85	12 56 34,50	36 27,54	13 43 4,38	13 14 16,00	2 19 24,58
18	v.	6 24 18,23	5 38 27,50	19 12,87	6 25 38,31	5 56 57,00	2 2 3,45
19	P.	21 6 33,23	20 20 43,00	7 33,74	21 7 7,62	20 38 31,50	1 50 19,63
21	P.	9 40 6,23	8 54 15,00	7 33,95	9 41 15,23	9 12 42,00	1 50 15,95
22	v.	22 14 31,38	21 28 42,00	19 17,10	22 15 35,08	21 47 9,00	2 1 53,81
24	M.	16 14 45,23	15 28 58,00	36 35,69	16 15 22,38	15 47 5,00	2 19 5,85
24	M.	19 2 34,15	18 16 47,00	36 35,76	19 0 24,92	18 32 8,00	2 19 5,53
26	v.	8 47 39,23	8 1 53,00	19 21,08	8 31 51,46	8 3 43,00	2 1 43,63
27	P.	17 51 14,54	17 5 30,25	7 40,60	17 49 5,31	17 21 3,00	1 49 58,61
Juill. 25	𝔓.	19 29 5,31	17 21 45,50	+ 2 7 33,26	19 22 5,54	17 33 36,50	+ 1 48 42,50
28	𝔳.	12 19 18,00	10 12 3,00	1 45 21,46	12 17 47,54	10 29 33,00	26 21,00
30	𝔅.	17 9 53,54	15 2 41,00	1 30 27,83	17 8 3,69	15 20 1,00	11 17,98
31	𝔅.	10 29 16,15	8 22 4,00	1 30 28,49	10 28 31,38	8 40 31,50	11 16,21
Août 2	𝔳.	17 58 8,77	15 50 58,00	1 45 29,45	17 54 28,15	16 6 39,50	26 7,33
2	𝔳.	23 37 22,62	21 30 12,00	1 45 29,80	23 36 3,46	21 48 16,00	26 6,64
5	𝔓.	10 59 4,15	8 51 57,00	2 7 47,69	10 57 43,85	9 10 8,00	48 16,39
7	𝔓.	7 4 20,08	4 57 15,00	2 7 47,62	7 3 7,85	5 15 38,00	48 12,39
10	𝔳.	3 48 42,00	1 41 42,00	1 45 35,47	3 46 53,31	1 59 36,50	25 52,28
12	𝔅.	8 36 11,54	6 29 15,50	1 30 39,63	8 23 17,23	6 36 11,00	10 49,81
13	𝔅.	10 10 48,23	8 3 54,50	1 30 39,13	10 8 46,62	8 21 45,00	10 47,02
15	𝔳.	10 26 3,46	8 19 11,00	1 45 39,60	10 24 18,46	8 37 26,00	25 39,60
18	𝔓.	4 20 4,62	7 50 28,50	2 7 54,12	4 17 49,62	8 8 21,50	47 46,12
19	𝔓.	21 31 45,92	19 24 10,00	2 7 53,55	21 30 36,23	19 43 12,00	47 41,86
22	𝔳.	15 14 33,00	13 7 1,00	1 45 39,86	15 12 43,16	13 25 29,50	25 21,51
24	𝔅.	16 52 54,46	14 45 24,75	1 30 43,82	16 51 24,92	15 4 20,00	10 19,03
25	𝔅.	22 47 43,38	20 40 15,50	1 30 44,24	22 45 12,00	20 58 13,00	10 15,36
27	𝔳.	22 38 18,46	20 30 53,00	1 45 43,29	22 31 16,61	20 44 26,00	25 8,44
30	𝔓.	14 13 59,08	12 6 38,00	2 7 58,75	14 13 23,54	12 26 44,50	47 16,71
Sept. 1	𝔓.	19 35 2,08	17 27 41,50	2 7 58,85	19 33 34,85	17 47 2,00	47 11,12
4	𝔳.	21 11 12,00	19 3 56,00	1 45 44,41	21 9 18,46	19 22 56,00	24 50,87
6	𝔅.	23 10 47,54	21 3 33,25	1 30 48,15	23 7 58,38	21 21 42,50	9 49,74
8	𝔅.	5 48 24,69	3 41 11,25	1 30 48,13	5 46 45,92	4 0 34,00	9 46,60
10	𝔳.	11 23 5,53	9 15 54,00	1 45 47,54	11 21 18,00	9 35 13,00	24 41,01
13	𝔓.	7 32 56,77	5 25 49,50	2 8 0,19	7 31 17,08	5 45 21,50	46 48,50

Date.	Lieu.	Arnold et Dent 951. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.	Dent 1687. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 44 30,92	18 58 42,00	+ 23 6 46,38	16 30 2,77	15 41 0,50	+ 2 9 59,70
31	v.	2 54 24,69	5 10 42,00	23 16 24,53	2 55 35,54	2 6 37,00	21 40,39
31	v.	6 55 48,00	9 12 11,00	23 16 19,05	6 57 15,69	6 8 17,50	21 40,24
Juin 1	M.	20 5 48,92	22 23 38,00	23 32 13,90	20 6 45,69	19 17 53,50	38 55,17
2	M.	6 14 17,54	8 32 52,00	23 31 28,88	6 16 15,23	5 27 23,50	38 55,07
3	v.	22 47 51,00	1 8 41,00	23 12 0,63	22 50 45,69	22 1 59,00	21 37,31
5	P.	7 41 51,23	10 3 32,00	22 59 30,96	7 30 18,00	6 41 36,50	9 53,21
6	P.	7 1 39,92	9 24 15,50	22 58 36,71	6 47 8,08	5 58 28,00	9 52,34
7	v.	23 25 37,62	1 49 3,00	23 9 32,37	23 26 40,61	22 38 6,00	21 32,36
9	M.	15 57 22,62	18 19 59,00	23 27 43,98	15 58 4,62	15 9 39,00	38 45,99
11	v.	12 5 42,46	14 28 22,00	23 10 29,06	12 7 16,15	11 18 58,00	21 26,73
12	P.	21 55 57,23	0 19 26,50	22 58 0,47	21 44 49,15	20 56 35,75	9 43,13
13	P.	9 15 34,85	11 39 25,00	22 57 39,61	9 0 22,38	8 12 9,50	9 42,62
14	v.	16 54 50,30	19 19 8,00	23 8 57,07	17 26 12,00	16 38 4,00	21 22,78
16	M.	6 40 58,62	9 5 26,00	23 26 8,47	6 41 38,31	5 53 37,50	38 36.66
16	M.	13 43 45,23	16 8 25,00	23 25 56,43	13 44 44,08	12 56 44,00	38 36,28
18	v.	6 7 9,23	8 33 39,00	23 6 52,35	6 26 54,00	5 38 58,00	21 18,14
19	P.	21 21 13,15	23 49 40,50	22 53 16,16	21 8 20,08	20 20 28,00	9 35,59
21	P.	10 0 37,38	12 30 48,00	22 51 32,13	9 42 45,92	8 54 55,00	9 33,65
22	v.	21 56 26,54	0 27 57,00	23 1 57,24	22 16 39,92	21 28 54,00	21 13,64
24	M.	16 16 1,85	6 48 20,00	23 18 30,32	16 16 38,77	15 29 0,00	38 27,24
24	M.	19 3 45,69	21 36 10,00	23 18 24,30	19 4 15,46	18 16 37,00	38 27,07
26	v.	8 16 18,00	10 49 30,00	23 0 23,14	8 50 50,31	8 3 18,00	21 7,48
27	P.	18 11 55,15	20 46 47,00	22 47 4,51	17 54 3,00	17 6 35,00	9 24,32
Juill. 25	𝔓.	19 31 59,77	21 7 47,50	+ 22 24 25,72	19 33 38,08	17 25 13,00	+ 2 8 38,53
28	𝔳.	12 21 18,07	13 57 13,00	22 2 11,45	12 22 26,07	10 14 13,00	1 46 19,53
30	𝔅.	17 11 32,77	18 46 46,00	21 48 2,06	17 12 33,00	15 4 30,25	1 31 18,04
31	𝔅.	10 29 58,38	12 5 4,00	21 48 10,71	10 30 28,38	8 22 28,00	1 31 16,72
Août 2	𝔳.	17 59 8,77	19 33 9,50	22 4 17,95	18 1 18,00	15 53 28,00	1 46 8,68
2	𝔳.	23 38 27,46	1 12 21,00	22 4 25,64	23 39 29,77	21 31 40,50	1 46 8,45
5	𝔓.	10 59 55,85	12 32 34,50	22 28 1,89	11 2 17,08	8 54 39,50	2 8 18,13
7	𝔓.	7 4 55,38	8 37 46,50	22 27 51,42	7 5 42,92	4 58 10,50	2 8 14,96
10	𝔳.	3 50 27,46	5 22 51,00	22 6 11,93	3 52 14,54	1 44 54,00	1 45 56,01
12	𝔅.	8 38 16,15	10 10 48,00	21 51 11,74	8 44 26,77	6 37 16,00	1 30 54,37
13	𝔅.	10 14 6,92	11 46 31,00	21 51 21,33	10 15 46,62	8 8 39,00	1 30 53,03
15	𝔳.	10 28 19,15	12 1 39,00	22 5 27,29	10 30 12,00	8 23 11,00	1 45 48,15
18	𝔓.	4 21 3,92	11 33 34,25	22 25 47,67	4 22 3,92	7 52 24,00	2 7 57,92
19	𝔓.	21 32 13,62	23 7 31,00	22 25 0,25	11 32 50,08	19 25 12,50	2 7 55,21
22	𝔳.	15 25 24,23	17 3 20,50	22 0 11,59	15 27 0,46	13 19 31,00	1 45 37,32
24	𝔅.	16 54 24,00	18 34 17,25	21 43 20,87	16 55 53,31	14 48 29,25	1 30 38,18
25	𝔅.	22 49 2,08	0 29 36,75	21 42 41,69	22 50 9,69	20 42 49,50	1 30 36,55
27	𝔳.	22 39 34,61	0 21 7,00	21 56 45,44	22 40 30,00	20 33 16,00	1 45 31,23
30	𝔓.	14 14 36,23	15 56 44,00	22 18 29,91	14 15 1,85	12 7 58,25	2 7 41,28
Sept. 1	𝔓.	19 36 2,31	21 19 59,00	22 16 41,58	19 36 38,08	17 29 38,00	2 7 38,35
4	𝔳.	21 12 6,46	23 1 27,00	21 49 7,87	21 13 12,00	19 6 16,00	1 45 24,41
6	𝔅.	23 11 47,31	1 4 32,25	21 30 48,92	23 13 57,92	21 7 4,25	1 30 27,53
8	𝔅.	5 49 49,38	7 44 9,00	21 29 15,07	5 51 21,46	3 44 29,25	1 30 26,90
10	𝔳.	11 26 0,00	13 23 33,00	21 41 3,01	11 29 8,77	9 22 20,50	1 45 24,28
13	𝔓.	7 33 57,69	9 35 24,00	21 59 26,61	7 34 39,00	5 27 56,00	2 7 35,92

Date.	Lieu.	Dent 1730. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.	Dent 1739. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 30 48,23	15 28 42,25	+ 2 23 3,42	16 31 26,77	15 48 59,00	+ 2 3 25,21
31	v.	2 56 54,46	1 54 45,00	34 51,31	2 58 42,46	2 16 18,00	15 6,31
31	v.	6 58 30,00	5 56 20,00	34 52,05	6 59 51,23	6 17 27,00	15 6,28
Juin 1	M.	20 7 32,77	19 5 22,00	52 13,75	20 8 12,46	19 25 54,00	32 21,44
2	M.	6 17 32,31	5 15 20,50	52 15,15	6 18 30,46	5 36 12,50	32 21,30
3	v.	22 53 0,46	21 50 46,00	35 5,08	22 54 16,15	10 12 3,00	15 3,77
5	P.	7 30 55,38	6 28 39,50	23 27,59	7 31 32,77	6 49 23,50	3 20,98
6	P.	6 47 47,54	5 45 29,50	23 30,00	6 48 36,23	6 6 28,00	3 20,49
7	v.	23 27 43,85	22 25 24,00	35 17,60	23 28 38,31	22 46 35,00	15 1,06
9	M.	15 58 51,23	14 56 32,50	52 39,10	15 59 40,62	15 17 46,00	32 14,99
11	v.	12 8 58,15	11 6 39,50	35 27,23	12 10 6,00	11 28 19,00	14 55,58
12	P.	21 45 31,15	20 43 11,50	23 49,38	21 46 3,23	21 4 20,75	3 12,21
13	P.	9 0 57,46	7 58 36,50	23 50,70	9 1 37,15	8 19 55,00	3 11,89
14	v.	17 28 47,77	16 26 26,00	35 36,55	17 30 9,00	16 48 31,50	14 52,28
16	M.	6 42 34,62	5 40 13,00	52 57,47	6 43 14,08	6 1 44,00	32 5,94
16	M.	13 45 28,15	12 43 6,00	52 58,35	13 46 19,38	13 4 50,00	32 5,58
18	v.	6 28 40,61	5 26 16,00	35 46,75	6 29 54,46	5 48 30,00	14 46,60
19	P.	21 8 52,85	20 6 25,00	24 11,36	21 9 28,85	20 28 7,75	3 4,61
21	P.	9 43 27,23	8 40 53,25	24 16,71	9 44 9,00	9 2 48,00	3 3,73
22	v.	22 17 51,69	21 15 15,50	56 8,91	22 18 59,31	21 37 43,00	14 44,04
24	M.	16 17 36,92	15 14 59,50	53 25,89	16 18 18,46	15 37 8,50	31 58,43
24	M.	19 4 56,08	18 2 18,50	53 26,18	19 5 36,69	18 24 27,00	31 58,29
26	v.	8 52 13,61	7 49 35,00	36 13,78	8 53 48,00	8 12 44,00	14 39,17
27	P.	17 55 1,38	16 52 21,00	24 36,70	17 55 50,54	17 14 51,00	2 55,86
Juill. 25	𝔓.	19 35 6,23	17 9 21,00	+ 2 25 58,68	19 35 51,00	17 33 34,50	+ 2 2 29,95
28	𝔳.	12 23 53,77	9 58 7,00	2 3 53,23	12 25 53,77	10 23 49,00	1 40 11,24
30	𝔅.	17 13 31,38	14 47 44,00	1 49 2,67	17 14 22,62	15 12 27,00	1 25 10,91
31	𝔅.	10 31 6,23	8 5 18,00	1 49 4,57	10 31 54,46	8 30 1,00	1 25 9,80
Août 2	𝔳.	18 2 18,46	15 36 29,00	2 4 8,14	18 6 53,77	16 5 10,00	1 40 2,46
2	𝔳.	23 40 42,69	21 14 53,00	2 4 8,87	23 43 0,00	21 41 17,00	1 40 2,18
5	𝔓.	11 3 9,00	8 37 20,00	2 26 29,55	11 3 52,62	9 2 22,50	2 2 10,67
7	𝔓.	7 6 23,31	4 40 32,00	2 26 33,85	7 6 52,85	5 5 28,00	2 2 7,40
10	𝔳.	3 54 33,23	1 28 41,00	2 4 27,70	3 58 16,15	1 57 5,00	1 39 46,62
12	𝔅.	8 42 19,85	6 16 28,00	1 49 35,45	8 40 2,31	6 39 1,00	1 24 44,91
13	𝔅.	10 16 54,00	7 51 1,00	1 49 38,41	10 20 33,46	8 19 36,00	1 24 42,88
15	𝔳.	10 31 32,77	8 5 39,00	2 4 40,93	10 33 39,00	8 32 49,00	1 39 37,17
18	𝔓.	4 22 48,92	7 34 5,00	2 27 1,92	4 23 36,46	8 0 10,00	2 1 44,46
19	𝔓.	21 33 36,00	19 6 48,50	2 27 5,13	21 34 21,92	19 32 58,00	2 1 41,55
22	𝔳.	15 28 18,46	13 1 28,00	2 4 58,32	15 29 24,46	13 28 9,00	1 39 23,32
24	𝔅.	16 57 14,31	14 30 21,75	1 50 6,68	16 58 36,46	14 57 28,00	1 24 22,58
25	𝔅.	22 51 10,15	20 24 16,50	1 50 10,01	22 52 5,54	20 51 1,00	1 24 20,91
27	𝔳.	22 41 30,00	20 14 35,00	2 5 12,83	22 42 21,69	20 41 24,00	1 39 15,52
30	𝔓.	14 15 28,38	11 48 33,25	2 27 32,81	14 16 4,15	12 15 17,00	2 1 24,83
Sept. 1	𝔓.	19 37 13,38	17 10 14,00	2 27 37,65	19 37 49,85	17 37 7,50	2 1 20,62
4	𝔳.	21 14 6,00	16 47 1,00	2 5 33,41	21 15 24,00	19 14 52,00	1 39 0,41
6	𝔅.	23 15 46,85	20 48 36,00	1 50 44,71	23 17 11,54	21 16 45,50	1 23 59,90
8	𝔅.	5 52 5,31	3 24 50,75	1 50 49,25	5 52 54,46	3 52 31,00	1 23 58,15
10	𝔳.	11 30 54,00	9 3 34,00	2 5 56,01	11 32 12,23	9 31 54,50	1 38 53,74
13	𝔓.	7 35 20,77	5 7 56,00	2 28 17,69	7 36 23,31	5 36 13,55	2 1 2,98

Date.	Lieu.	Dent 1807. K. 1290.	Dent 1807. Chronomètre comparé.	Dent 1807. Corr. du Chronomètre.	Dent 1799. K. 1290.	Dent 1799. Chronomètre comparé.	Dent 1799. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 32 52,85	15 58 48,25	+ 1 55 2,04	16 38 40,62	16 27 44,50	+ 1 26 53,56
31	v.	2 59 51,23	2 25 52,00	2 6 41,08	3 3 21,23	2 57 37,50	38 25,59
31	v.	7 1 15,23	6 27 16,50	2 6 40,78	7 2 25,84	6 56 43,50	38 24,39
Juin 1	M.	20 9 20,77	19 35 29,00	2 23 54,75	20 10 15,69	20 4 47,50	55 31,17
2	M.	6 20 1,38	5 46 11,00	2 23 53,72	6 21 8,77	6 15 44,00	55 28,11
3	v.	22 55 45,69	10 22 2,00	2 6 34,31	22 57 6,00	10 51 56,00	38 0,62
5	P.	7 32 30,00	6 58 51,50	1 54 50,22	7 33 5,31	7 28 7,00	26 10,03
6	P.	6 51 28,15	6 17 52,00	1 54 48,41	6 52 12,23	6 47 21,00	26 3,50
7	v.	23 29 46,61	22 56 17,00	2 6 27,36	23 31 2,07	23 26 25,50	37 34,33
9	M.	16 5 1,38	15 31 41,00	2 23 40,75	16 6 5,54	16 1 45,50	54 40,41
11	v.	12 11 42,46	11 38 30,00	2 6 21,04	12 12 56,31	12 8 52,00	37 12,89
12	P.	21 47 0,00	21 13 53,00	1 54 36,23	21 47 46,62	21 43 54,50	25 21,85
13	P.	9 2 59,08	1 29 53,25	1 54 35,57	9 6 47,54	9 2 58,50	25 18.79
14	v.	17 34 18,00	17 1 18,00	2 6 14,78	17 35 18,46	17 31 41,00	36 52.24
16	M.	6 44 20,31	6 11 28,00	2 23 28,17	6 45 20,31	6 41 57,50	53 58,67
16	M.	13 52 57,23	13 20 5,50	2 23 27,93	13 53 40,15	13 50 19,50	53 56,85
18	v.	6 34 30,00	6 1 45,00	2 6 7,14	6 35 30,46	6 32 24,00	36 28,60
19	P.	21 12 42,23	20 40 2,50	1 54 23,24	21 13 18,23	21 10 24,50	24 37,24
21	P.	9 47 38,54	9 15 1,00	1 54 20,27	9 48 35,77	9 45 51,75	24 26,76
22	v.	22 22 53,54	21 50 22,00	2 5 59,26	22 24 6,00	22 21 35,00	35 58,72
24	M.	16 26 38,54	15 54 14,50	2 23 12,52	16 27 29,08	16 25 13,50	53 4,06
24	M.	19 11 21,23	18 38 57,50	2 23 12,23	19 12 10,15	19 9 55,50	53 3,26
26	v.	8 55 54,46	8 23 37,00	2 5 52,63	8 57 36,00	8 55 35,00	35 36,17
27	P.	17 58 21,23	17 26 9,50	1 54 8,06	17 54 17,77	17 54 28,75	23 45,35
Juill. 25	P.	19 36 39,23	17 43 41,00	+ 1 53 11,68	19 37 32,54	18 17 14,00	+ 1 20 31,99
28	v.	12 36 15,24	10 43 30,50	30 51,22	12 37 29,77	11 17 37,00	0 57 59,26
30	B.	17 16 8,54	15 23 34,25	15 49,58	17 17 24,00	15 57 51,50	0 42 47,79
31	B.	10 32 46,62	8 40 14,50	15 48,47	10 33 32,54	9 14 6,00	0 42 42,88
Août 2	v.	18 8 20,77	16 15 58,50	30 40,96	18 9 18,00	16 50 12,00	0 57 24,69
2	v.	23 44 6,46	21 51 45,00	30 40,64	23 45 18,00	22 26 14,00	0 57 23,18
5	P.	11 4 51,00	9 12 42,00	52 49,55	11 5 39,23	9 46 59,00	1 19 20,78
7	P.	7 7 51,23	5 15 47,50	52 46,28	7 8 35,31	5 50 10,00	1 19 7,86
10	v.	4 0 00,00	2 8 10,00	30 25,47	4 1 0,46	2 43 2,00	0 56 33,93
12	B.	8 52 38,08	6 0 58,00	15 23,69	8 56 12,00	7 38 34,00	0 41 21,61
13	B.	10 21 52,38	8 30 16,00	15 21,81	10 23 20,54	9 5 51,50	0 41 14,46
15	v.	10 46 36,46	8 55 8,00	30 15,63	10 48 9,23	9 30 58,00	0 55 58,40
18	P.	4 24 41,77	8 10 37,75	52 22,02	4 25 28,15	8 45 56,00	1 17 50,15
19	P.	21 35 25,15	19 43 24,00	52 18,78	21 36 2,54	20 18 41,00	1 17 39,17
22	v.	15 30 30,00	13 38 40,00	29 57,86	15 31 18,00	14 14 21,00	0 55 4,86
24	B.	17 1 52,62	15 10 11,00	14 55,74	17 4 17,54	15 47 38,50	0 39 53,17
25	B.	22 53 27,00	21 1 50,25	14 53,12	22 54 24,46	21 37 56,50	0 39 44,33
27	v.	22 43 16,15	20 51 47,50	29 46,48	22 46 42,00	21 30 32,00	0 54 27,83
30	P.	14 16 37,85	12 25 22,00	51 53,53	14 17 9,23	13 1 24,50	1 16 22,41
Sept. 1	P.	19 38 51,23	17 47 41,50	51 48,00	19 39 33,69	18 24 6,00	1 16 5,96
4	v.	21 16 55,85	19 26 1,00	29 23,26	21 17 51,23	20 2 52,00	0 53 27,64
6	B.	23 18 28,62	21 27 42,00	14 20,48	23 19 22,38	22 4 40,75	0 38 15,49
8	B.	5 55 2,31	4 4 20,00	14 17,00	5 55 57,00	3 41 25,75	0 38 5,94
10	v.	11 37 45,69	9 47 12,00	29 9,70	11 39 42,46	10 25 30,00	0 52 48,47
13	P.	7 37 23,08	5 47 1,00	51 15,00	7 38 11,08	6 24 23,50	1 14 40,50

Date.	Lieu.	Dent 1798. K. 1290. h m s	Dent 1798. Chronomètre comparé. h m s	Dent 1798. Corr. du Chronomètre. h m s	Dent 1789. K. 1290. h m s	Dent 1789. Chronomètre comparé. h m s	Dent 1789. Corr. du Chronomètre. h m s
Mai 29	P.	16 34 34,15	16 16 17,00	+ 1 39 14,60	16 35 24,00	16 9 11,25	+ 1 47 10,20
31	v.	3 4 36,00	2 46 28,50	1 50 49,36	3 6 0,00	2 39 55,00	1 58 46,86
31	v.	7 3 30,46	6 45 24,00	1 50 48,51	7 4 56,77	6 38 52,50	1 58 46,32
Juin 1	M.	20 11 11,08	19 53 16,50	2 7 57,56	20 12 30,46	19 46 35,50	2 15 57,94
2	M.	6 23 28,62	6 5 36,50	2 7 55,46	6 24 27,23	5 58 34,00	2 15 56,57
3	v.	22 58 8,31	10 40 28,00	1 50 30,92	22 59 24,00	10 33 40,00	1 58 34,61
5	P.	7 33 44,08	1 16 14,00	1 38 41,80	7 34 21,00	7 8 44,00	1 46 48,72
6	P.	6 53 1,15	6 35 37,00	1 38 36,42	6 53 41,77	6 28 8,00	1 46 46,04
7	v.	23 32 8,53	23 14 57,00	1 50 9,29	23 33 6,46	23 7 41,00	1 58 23,22
9	M.	16 7 10,62	15 50 15,00	2 7 15,99	16 7 53,31	15 42 38,00	2 15 35,68
11	v.	12 14 9,69	11 57 29,50	1 49 48,76	12 15 24,00	11 50 18,00	1 58 14,57
12	P.	21 48 32,54	21 32 3,00	1 37 59,28	21 49 17,77	21 24 18,50	1 46 29,01
13	P.	9 7 36,46	8 51 9,00	1 37 57,21	9 8 30,69	8 43 32,50	1 46 27,94
14	v.	17 36 27,23	17 20 11,00	1 49 31,02	17 38 14,76	17 13 23,00	1 58 6,55
16	M.	6 46 3,69	6 30 1,00	2 6 38,55	6 47 5,77	6 22 23,00	2 15 18,63
16	M.	13 54 31,85	13 38 31,00	2 6 37,05	13 55 38,31	13 30 56,50	2 15 18,01
18	v.	6 36 30,46	6 20 42,00	1 49 10,61	6 37 31,84	6 12 58,50	1 57 55,49
19	P.	21 13 55,38	20 58 17,00	1 37 21,89	21 14 39,92	20 50 14,00	1 46 9,43
21	P.	9 49 41,31	9 34 10,25	1 37 13,80	9 50 24,46	9 26 2,00	1 46 5,20
22	v.	22 25 12,00	22 9 52,00	1 48 47,73	22 26 17,08	22 2 2,00	1 57 42,81
24	M.	16 28 20,31	16 13 14,50	2 5 54,29	16 29 4,15	16 4 58,50	2 14 54,13
24	M.	19 12 39,00	18 57 34,00	2 5 53,61	19 13 24,69	18 49 19,50	2 14 53,80
26	v.	8 58 53,07	8 44 0,50	1 48 27,75	9 0 12,00	8 36 15,00	1 57 32,18
27	P.	18 0 21,23	17 45 39,00	1 36 38,56	18 1 50,31	17 38 0,50	1 45 46,14
Juill. 25	𝔓.	19 38 15,46	18 4 33,50	+ 1 33 55,41	19 39 0,00	17 54 47,00	+ 1 44 26,45
28	𝔳.	12 38 47,54	11 5 30,50	1 11 23,54	12 39 42,00	10 55 44,00	22 4,50
30	𝔙.	17 18 17,54	15 45 20,00	0 56 12,84	17 19 12,00	15 35 26,50	7 0,80
31	𝔙.	10 34 7,15	9 1 15,00	0 56 8,49	10 34 44,47	8 51 2,00	6 59,11
Août 2	𝔳.	18 10 6,46	16 37 34,00	1 10 51,15	18 11 11,77	16 27 40,50	21 49,97
2	𝔳.	23 46 11,08	22 13 40,50	1 10 49,76	23 47 20,77	22 3 50,50	21 49,45
5	𝔓.	11 6 34,85	9 34 28,00	1 32 47,40	11 7 35,31	9 24 19,00	43 56,86
7	𝔓.	7 9 53,54	5 38 0,00	1 32 36,09	7 10 54,92	5 27 45,50	43 51,97
10	𝔳.	4 3 15,23	2 31 48,00	1 10 2,70	4 4 24,00	2 21 30,00	21 29,48
12	𝔙.	8 58 33,46	7 27 26,00	0 54 51,07	9 4 35,77	7 21 54,00	6 25,39
13	𝔙.	10 24 43,62	8 53 45,00	0 54 44,04	10 26 23,77	8 43 47,00	6 22,19
15	𝔳.	10 49 48,00	9 19 6,00	1 9 29,18	10 52 3,00	9 9 37,00	21 13,18
18	𝔓.	4 26 22,62	8 33 16,50	1 31 24,12	4 27 24,92	8 22 26,00	43 16,92
19	𝔓.	21 36 44,31	20 5 47,50	1 31 14,44	21 37 43,85	19 54 49,00	43 12,48
22	𝔳.	15 32 56,77	14 2 22,00	1 8 42,63	15 34 15,23	13 51 35,00	20 48,09
24	𝔙.	17 6 1,38	15 35 43,00	0 53 32,51	17 7 8,31	15 24 38,50	5 43,94
25	𝔙.	22 55 18,00	21 25 9,50	0 53 24,87	22 56 15,69	21 13 51,50	5 40,56
27	𝔳.	22 47 48,46	21 17 56,00	1 8 10,29	22 48 42,46	21 6 29,00	20 31,29
30	𝔓.	14 17 34,38	12 48 5,00	1 30 7,06	14 18 13,85	12 36 15,25	42 36,28
Sept. 1	𝔓.	19 40 26,31	18 11 11,50	1 29 53,08	19 41 11,08	17 59 19,50	42 29,85
4	𝔳.	21 19 8,31	19 50 17,00	1 7 19,72	21 20 11,31	19 38 37,50	20 2,22
6	𝔙.	23 21 22,38	21 52 45,00	0 52 11,24	23 22 27,69	21 41 4,50	4 57,05
8	𝔙.	5 56 57,69	4 28 28,50	0 52 3,88	5 57 38,08	3 16 19,75	4 53,02
10	𝔳.	11 40 54,00	10 12 40,00	1 6 50,01	11 42 14,31	10 1 7,00	19 43,32
13	𝔓.	7 39 9,46	6 11 16,00	1 28 46,38	7 39 55,38	5 59 3,00	41 45,30

Date.	Lieu.	Dent 1787. K. 1290.	Dent 1787. Chronomètre comparé.	Dent 1787. Corr. du Chronomètre.	Dent 1776. K. 1290.	Dent 1776. Chronomètre comparé.	Dent 1776. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 36 5,08	15 46 1,50	+ 2 11 1,03	16 36 38,31	16 14 48,00	+ 1 42 47,78
31	v.	3 7 6,00	2 17 6,00	22 41,86	3 7 56,77	2 46 13,50	1 54 25,13
31	v.	7 6 14,77	6 16 15,00	22 41,82	7 7 23,07	6 45 40,50	1 54 24,62
Juin 1	M.	20 13 15,23	19 23 20,00	39 58,21	20 14 7,85	19 52 33,50	2 11 37,33
2	M.	6 25 25,38	5 35 31,00	39 57,72	6 26 21,69	6 4 49,00	2 11 36,04
3	v.	23 0 30,00	10 10 40,00	22 40,61	23 1 33,23	10 40 9,00	1 54 14,84
5	P.	7 35 3,69	6 45 17,25	10 58,16	7 35 42,92	7 14 24,00	1 42 30,64
6	P.	6 54 22,38	6 4 37,25	10 57,40	6 55 6,69	6 33 51,00	1 42 27,96
7	v.	23 34 13,85	22 44 33,00	22 38,61	23 35 10,15	23 14 2,00	1 54 5,91
9	M.	16 8 30,23	15 18 56,00	39 54,60	16 9 18,46	15 48 19,00	2 11 19,83
11	v.	12 16 48,00	11 27 19,00	22 37,57	12 18 6,46	11 57 15,00	1 54 0,03
12	P.	21 49 54,08	21 0 33,75	10 55,07	21 50 37,85	21 29 52,50	1 42 15,09
13	P.	9 9 9,46	8 19 44,50	10 45,71	9 9 50,77	8 49 6,25	1 42 14,27
14	v.	17 39 35,99	16 50 14,50	22 36,28	17 41 18,00	17 20 39,00	1 53 53,79
16	M.	6 47 50,31	5 58 34,50	39 51,67	6 48 38,31	6 28 7,00	2 11 7,17
16	M.	13 56 47,31	13 7 32,00	39 51,50	13 57 33,23	13 37 3,00	2 11 6,42
18	v.	6 38 51,23	5 49 39,50	22 33,88	6 43 6,46	6 22 44,00	1 53 44,61
19	P.	21 15 17,31	20 20 8,50	10 52,32	21 16 6,69	20 55 50,00	1 42 0,20
21	P.	9 51 20,77	9 2 12,50	10 51,01	9 52 14,54	9 32 1,00	1 41 56,28
22	v.	22 27 6,46	21 38 2,00	22 32,19	22 28 46,61	22 8 40,00	1 53 34,34
24	M.	16 29 37,15	15 40 38,00	39 47,63	16 30 31,15	16 10 32,00	2 10 47,63
24	M.	19 14 37,38	18 25 38,50	39 47,49	19 15 19,62	18 55 21,00	2 10 47,23
26	v.	9 1 51,69	8 12 57,50	22 29,37	9 3 20,54	8 43 29,00	1 53 26,72
27	P.	18 2 36,69	17 13 46,25	10 46,78	18 3 26,54	17 43 42,00	1 41 40,88
Juill. 25	P.	19 39 50,31	17 29 42,50	+ 2 10 21,26	19 40 41,54	18 0 21,50	+ 1 40 33,49
28	v.	12 40 42,00	10 30 43,00	1 48 5,51	12 41 36,00	11 1 29,00	18 13,51
30	B.	17 19 49,38	15 9 58,00	1 33 6,68	17 20 32,77	15 40 34,00	3 14,07
31	B.	10 35 39,69	8 25 50,00	1 33 6,03	10 36 33,23	8 56 36,50	3 13,07
Août 2	v.	18 13 40,15	16 3 57,50	1 48 1,35	18 15 0,00	16 35 11,00	18 7,70
2	v.	23 48 42,00	21 39 0,00	1 48 1,18	23 49 48,46	22 10 0,00	18 7,64
5	P.	11 8 23,77	8 58 50,00	2 10 14,32	11 9 36,92	9 29 59,00	40 18,47
7	P.	7 11 35,77	5 2 6,00	2 10 12,32	7 12 9,46	5 32 37,00	40 15,01
10	v.	4 5 22,62	1 56 2,00	1 47 56,10	4 6 33,23	2 27 14,00	17 54,71
12	B.	9 3 17,08	6 54 5,00	1 32 55,70	9 0 3,92	7 20 54,00	2 53,54
13	B.	10 27 48,69	8 18 38,50	1 32 55,61	10 29 11,77	8 50 5,00	2 52,20
15	v.	10 55 30,69	8 46 27,00	1 47 50,87	10 57 56,31	9 18 57,50	17 46,00
18	P.	4 28 20,31	9 56 38,00	2 10 0,31	4 29 6,92	8 27 32,50	39 52,42
19	P.	21 38 45,69	19 29 5,50	2 9 57,82	21 39 38,31	20 0 6,50	39 49,44
22	v.	15 35 18,00	13 25 46,00	1 47 39,87	15 36 6,00	13 56 46,00	17 27,87
24	B.	17 8 6,46	14 58 40,50	1 32 40,09	17 8 53,08	15 29 42,00	2 25,21
25	B.	22 57 14,08	20 47 52,00	1 32 38,45	22 59 52,62	21 20 46,75	2 22,24
27	v.	22 49 33,69	20 40 18,00	1 47 33,52	22 50 21,69	21 11 24,00	17 15,52
30	P.	14 18 45,00	12 9 39,00	2 9 43,68	14 19 14,08	12 40 28,00	39 23,76
Sept. 1	P.	19 42 4,85	17 33 3,00	2 9 40,12	19 42 48,85	18 4 4,00	39 18,12
4	v.	21 21 13,84	19 12 21,50	1 47 20,75	21 22 27,69	19 44 4,00	16 52,10
6	B.	23 23 16,62	21 14 29,00	1 32 21,48	23 24 53,08	21 46 37,50	1 49,44
8	B.	5 58 31,38	3 49 46,50	1 32 19,57	5 59 39,00	4 21 27,00	1 46,69
10	v.	11 43 12,46	9 34 38,00	1 47 15,47	11 44 15,69	10 6 12,00	16 39,70
13	P.	7 41 3,69	5 32 32,00	2 9 24,61	7 41 53,77	6 4 2,00	38 44,69

		Dent 1821.			Dent 1827.		
Date.	Lieu.	K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.	K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 38 17,08	15 51 5,00	+ 2 8 9,54	16 39 3,00	16 1 29,00	+ 1 58 31,46
31	V.	2 43 37,39	1 56 30,00	19 49,23	2 44 59,77	2 7 28,50	2 10 13,09
31	V.	6 44 7,15	5 57 0,50	19 48,70	6 45 36,00	6 8 5,00	2 10 13,05
Juin 1	M.	20 15 31,15	19 28 31,00	37 3,14	20 16 22,15	19 38 56,00	2 27 29,14
2	M.	6 28 2,77	5 41 3,00	37 3,12	6 29 7,85	5 51 42,00	2 27 29,20
3	V.	23 2 42,00	10 15 48,00	19 44,62	23 3 56,77	22 26 35,50	2 10 11,89
5	P.	7 36 41,31	6 49 51,00	8 2,03	7 37 23,31	7 0 6,50	1 58 28,53
6	P.	6 56 47,31	6 9 58,00	8 1,58	6 57 27,69	6 20 12,00	1 58 27,97
7	V.	23 36 24,92	22 49 40,00	19 42,68	23 37 22,61	23 0 11,50	2 10 8,87
9	M.	16 12 0,92	15 25 23,00	36 58,29	16 12 58,62	15 35 55,00	2 27 23,99
11	V.	12 19 36,00	11 33 5,00	19 39,58	12 20 45,00	11 43 48,00	2 10 5,58
12	P.	21 51 30,92	21 5 4,50	7 56,16	21 52 14,08	21 15 21,00	1 58 22,82
13	P.	9 11 11,54	8 24 45,50	7 55,80	9 11 57,92	8 35 5,50	1 58 22,18
14	V.	17 44 42,23	16 58 19,50	19 37,52	17 46 36,00	17 9 48,00	2 10 2,79
16	M.	6 53 30,92	6 7 15,00	36 51,79	6 54 19,85	6 17 37,50	2 27 18,22
16	M.	14 0 15,69	13 14 0,50	36 51,38	14 1 2,77	13 24 21,00	2 27 17,96
18	V.	6 45 6,00	5 58 56,00	19 32,15	6 45 55,84	6 9 17,50	2 10 0,49
19	P.	21 17 15,46	20 31 10,00	7 48,97	21 17 45,92	20 41 11,50	1 58 17,93
21	P.	9 54 50,31	9 8 45,00	7 48,06	9 55 32,77	9 18 59,00	1 58 16,52
22	V.	22 30 18,69	21 44 18,00	19 28,42	22 31 28,15	21 54 58,00	2 9 57,88
24	M.	16 31 47,31	15 45 53,00	36 42,79	16 32 47,31	15 56 23,00	2 27 12,80
24	M.	19 16 30,92	18 30 37,00	36 42,53	19 17 32,54	18 41 8,50	2 27 12,65
26	V.	8 33 48,46	7 48 0,00	19 23,62	8 35 13,38	7 58 54,00	2 9 54,54
27	P.	18 5 12,46	17 19 29,00	7 39,80	18 6 3,69	17 29 48,00	1 58 12,04
Juill. 25	𝔓.	19 23 56,31	17 17 14,00	+ 2 6 55,77	19 24 37,15	17 27 2,00	+ 1 57 48,61
28	𝔳.	12 42 45,23	10 36 12,00	1 44 39,74	12 43 36,00	10 46 11,00	35 31,52
30	𝔅.	17 22 19,85	15 15 54,00	1 29 41,15	17 23 23,77	15 26 7,00	20 32,07
31	𝔅.	10 41 8,54	8 34 44,25	1 29 40,64	10 42 5,54	8 44 51,25	20 30,64
Août 2	𝔳.	18 18 4,85	16 11 48,00	1 44 35,55	18 19 12,00	16 22 6,00	35 24,70
2	𝔳.	23 50 52,15	21 44 36,00	1 44 35,33	23 51 56,31	21 54 51,00	35 24,49
5	𝔓.	11 16 6,69	9 9 59,00	2 6 48,25	11 18 13,85	9 21 19,50	57 34,91
7	𝔓.	7 16 42,46	5 10 38,00	2 6 47,02	7 17 34,15	5 20 44,50	57 32,21
10	𝔳.	4 8 10,16	2 2 15,50	1 44 30,14	4 9 15,69	2 12 37,00	35 14,17
12	𝔅.	8 25 0,00	6 19 13,50	1 29 30,08	8 28 0,92	6 31 31,00	20 13,50
13	𝔅.	10 33 33,23	8 27 50,00	1 29 28,66	10 34 55,85	8 38 30,00	20 11,28
15	𝔳.	10 59 33,46	8 53 58,00	1 44 22,65	11 0 59,00	9 4 40,00	35 6,19
18	𝔓.	4 34 4,15	8 5 52,00	2 6 30,15	4 35 21,69	8 16 23,00	57 16,69
19	𝔓.	21 45 42,46	19 39 34,50	2 6 25,59	21 46 32,77	19 49 36,50	57 13,90
22	𝔳.	15 38 21,23	13 32 24,00	1 44 5,10	15 39 38,08	13 42 48,50	34 57,45
24	𝔅.	17 15 46,62	15 9 58,00	1 29 2,76	17 16 31,85	15 19 47,75	19 58,24
25	𝔅.	23 5 38,77	20 59 56,00	1 28 59,15	23 6 28,15	21 9 49,00	19 55,53
27	𝔳.	22 51 6,46	20 45 32,00	1 43 52,29	22 51 56,31	20 55 22,50	34 51,64
30	𝔓.	14 22 15,46	12 16 52,00	2 6 1,14	14 22 43,62	12 26 19,00	57 2,30
Sept. 1	𝔓.	19 47 28,15	17 42 12,00	2 5 54,42	19 48 9,46	17 51 48,50	56 59,23
4	𝔳.	21 24 10,15	19 19 3,00	1 43 35,56	21 25 3,23	19 28 48,00	34 43,64
6	𝔅.	23 30 17,54	21 25 16,00	1 28 35,41	23 31 11,07	21 34 59,00	19 45,94
8	𝔅.	6 14 23,07	4 9 26,00	1 28 31,77	6 15 10,15	4 29 0,00	19 44,85
10	𝔳.	11 45 50,77	9 41 1,00	1 43 25,78	11 46 56,31	9 50 51,00	34 41,32
13	𝔓.	7 45 3,00	5 40 22,50	2 5 33,42	7 45 49,85	5 49 50,00	56 52,77

Date.	Lieu.	Dent 1941. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.	Dent 1808. K. 1290.	Chronomètre comparé.	Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Mai 29	P.	16 39 45,69	16 34 8,00	+ 1 26 35,15	16 40 33,46	16 12 57,25	+ 1 48 33,67
31	v.	2 46 20,77	2 40 52,50	38 10,09	2 47 30,00	2 20 4,00	2 0 7,88
31	v.	6 46 55,38	6 41 28,00	38 9,43	6 48 12,00	6 20 47,00	2 0 7,05
Juin 1	M.	20 17 15,69	20 12 0,25	55 18,43	20 18 24,00	19 51 11,00	2 17 15,99
2	M.	6 30 58,15	6 25 45,00	55 16,50	6 32 6,92	6 4 54,00	2 17 16,27
3	v.	23 5 9,23	23 0 8,00	37 51,85	23 6 20,77	10 39 22,50	1 59 48,88
5	P.	7 37 52,15	7 33 0,50	26 3,37	7 38 25,15	7 11 40,00	1 47 56,88
6	P.	6 58 10,38	6 53 23,50	25 59,16	6 58 50,08	6 32 12,00	1 47 50,36
7	v.	23 38 31,15	23 33 56,00	37 32,91	23 39 32,77	23 13 10,00	1 59 20,53
9	M.	16 13 47,77	16 9 27,00	54 41,14	16 14 52,62	15 48 47,50	2 16 25,50
11	v.	12 22 18,00	12 18 11,00	37 15,58	12 23 18,46	11 57 31,00	1 58 56,03
12	P.	21 52 39,69	21 48 42,25	25 27,18	21 53 15,00	21 27 41,25	1 47 3,49
13	P.	9 12 35,77	9 8 40,50	25 25,03	9 13 10,85	8 47 41,50	1 46 59,11
14	v.	17 47 48,46	17 44 3,00	37 0,25	17 49 6,00	17 23 50,00	1 58 30,79
16	M.	6 55 11,08	6 51 37,50	54 9,45	6 55 52,38	6 30 52,00	2 15 36,25
16	M.	14 1 53,54	13 58 21,50	54 8,23	14 2 41,54	13 37 44,00	2 15 33,73
18	v.	6 47 54,23	6 44 33,00	36 43,38	6 48 54,00	6 24 11,00	1 58 5,15
19	P.	21 18 20,08	21 15 9,50	24 54,09	21 18 55,15	20 54 22,00	1 46 16,66
21	P.	9 56 18,69	9 53 14,00	24 47,44	9 57 7,38	9 32 37,00	1 46 13,13
22	v.	22 32 45,23	22 29 50,50	36 22,46	22 33 42,00	22 9 19,00	1 57 50,73
24	M.	16 33 23,31	16 30 41,00	53 30,80	16 34 8,08	16 9 58,00	2 14 58,57
24	M.	19 18 6,69	19 15 25,00	53 30,31	19 18 40,62	18 54 31,50	2 14 57,74
26	v.	8 36 36,00	8 34 5,00	36 6,16	8 37 59,84	8 14 5,50	1 57 29,50
27	P.	18 7 35,54	18 5 14,00	24 17,89	18 8 23,08	17 44 41,00	1 45 38,43
Juill. 25	𝔓.	19 25 17,31	18 3 19,00	+ 1 22 11,77	19 25 56,08	17 44 3,50	+ 1 42 6,04
28	𝔳.	12 44 47,77	11 23 10,00	0 59 44,29	12 47 2,77	11 5 35,00	19 34,29
30	𝔅.	17 24 24,92	16 3 4,00	0 44 36,22	17 25 8,77	15 44 1,00	4 23,07
31	𝔅.	10 42 45,69	9 21 29,00	0 44 33,04	10 43 44,31	9 2 42,50	4 18,16
Août 2	𝔳.	18 20 18,00	16 59 18,00	0 59 18,70	18 21 49,62	16 41 8,00	19 0,33
2	𝔳.	23 53 27,46	22 32 29,00	0 59 17,64	23 54 49,15	22 14 9,50	18 58,84
5	𝔓.	11 19 9,92	9 58 31,00	1 21 19,48	11 19 49,15	9 39 32,50	40 57,21
7	𝔓.	7 18 20,77	5 57 52,50	1 21 10,83	7 19 4,38	5 39 3,50	40 43,44
10	𝔳.	4 10 21,46	2 50 14,00	0 58 42,94	4 11 35,77	2 31 59,50	18 11,76
12	𝔅.	8 30 26,77	7 10 35,50	0 43 34,86	8 31 16,62	6 52 0,00	8 0,20
13	𝔅.	10 36 13,62	9 16 29,75	0 43 29,30	10 37 45,92	8 58 38,00	2 53,35
15	𝔳.	11 4 17,54	9 44 47,50	0 58 17,23	11 5 54,00	9 27 2,00	17 39,19
18	𝔓.	4 36 36,23	8 54 37,00	1 20 17,23	4 38 0,46	8 36 44,00	39 34,46
19	𝔓.	21 47 35,54	20 27 43,00	1 20 10,17	21 48 20,54	20 9 13,00	39 25,17
22	𝔳.	15 41 9,23	14 21 34,00	0 57 43,09	15 42 24,46	14 3 38,00	16 54,33
24	𝔅.	17 18 2,77	15 58 41,00	0 42 35,91	17 18 51,69	15 40 20,00	1 45,83
25	𝔅.	23 8 12,23	21 48 58,25	0 42 30,35	23 7 11,77	21 28 49,25	1 38,90
27	𝔳.	22 53 30,46	21 34 30,00	0 57 18,28	22 52 42,46	21 14 36,00	16 24,29
30	𝔓.	14 23 30,46	13 4 49,00	1 19 19,15	14 23 5,31	12 45 20,50	38 22,49
Sept. 1	𝔓.	19 49 52,15	18 31 22,00	1 19 8,42	19 48 53,77	18 11 18,00	38 14,04
4	𝔳.	21 27 4,61	20 8 53,50	0 56 39,52	21 26 9,69	19 48 54,50	15 43,61
6	𝔅.	23 32 58,85	22 15 0,25	0 41 32,47	23 32 9,69	21 55 8,25	0 35,31
8	𝔅.	6 16 51,23	4 58 59,50	0 41 26,43	6 15 55,62	4 19 1,25	0 29,07
10	𝔳.	11 49 52,80	10 32 15,50	0 56 13,30	11 47 57,69	10 11 19,00	15 14,70
13	𝔓.	7 47 19,38	6 29 58,50	1 18 13,80	7 46 34,15	6 10 14,00	37 13,07

Date.	Lieu.	Dent 1774. K. 1290.			Dent 1774. Chronomètre comparé.			Dent 1774. Corr. du Chronomètre.			Kessels 1297. K. 1290.			Kessels 1297. Chronomètre comparé.			Kessels 1297. Corr. du Chronomètre.		
		h	m	s	h	m	s	h	m	s	h	m	s	h	m	s	h	m	s
Mai 29	P.	16	41	19,15	17	22	5,75	+ 0	40	10,86									
31	v.	2	48	45,00	3	29	42,00	0	51	44,83									
31	v.	6	49	24,00	7	30	22,00	0	51	44,05									
Juin 1	M.	20	19	57,69	21	1	9,00	1	8	51,68									
2	M.	6	32	53,08	7	14	7,00	1	8	49,43									
3	v.	23	7	36,00	11	49	3,00	0	51	23,61									
5	P.	7	39	0,92	8	20	38,75	0	39	33,90									
6	P.	6	59	25,15	7	41	0,00	0	39	28,43	7	0	2,77	5	28	23,25	+ 2	52	51,80
7	v.	23	40	46,15	0	22	43,50	0	51	0,41	23	42	5,53	22	17	3,00	2	58	0,30
9	M.	16	15	57,23	16	58	10,50	1	8	7,11	16	17	16,85	14	58	53,50	3	8	43,73
11	v.	12	24	21,69	13	6	50,50	0	50	39,76	12	25	30,00	11	14	19,00	2	44	19,56
12	P.	21	54	13,15	22	36	53,00	0	38	49,89	21	54	48,00	20	49	4,25	2	27	13,49
13	P.	9	13	50,08	9	56	32,50	0	38	47,34	9	14	34,62	8	10	40,25	2	25	24,13
14	v.	17	50	18,46	18	33	12,00	0	50	21,25	17	52	16,15	16	53	40,50	2	31	50,45
16	M.	6	57	6,69	7	40	14,00	1	7	28,56	6	57	53,31	6	5	22,75	2	43	6,44
16	M.	14	4	32,54	14	47	42,00	1	7	26,73	14	5	27,00	13	14	5,75	2	41	57,44
18	v.	6	49	56,31	7	33	18,00	0	50	0,46	6	50	51,23	6	6	7,00	2	18	6,39
19	P.	21	19	33,92	22	3	8,50	0	38	8,93	21	20	9,23	20	41	39,25	2	0	13,49
21	P.	9	58	1,15	10	41	43,00	0	38	0,90	9	58	53,31	9	26	16,50	1	54	19,56
22	v.	22	34	44,31	23	18	38,50	0	49	33,54	22	35	50,77	22	9	11,00	2	0	7,51
24	M.	16	35	10,62	17	19	19,50	1	6	39,61	16	36	21,23	16	16	32,50	2	10	37,22
24	M.	19	19	31,85	20	3	41,50	1	6	38,97	19	20	28,85	19	1	6,75	2	10	10,72
26	v.	8	41	36,46	9	25	59,00	0	49	12,63	8	42	57,46	8	29	40,00	1	46	52,62
27	P.	18	9	20,77	18	53	54,50	0	37	22,62	18	10	39,00	18	2	48,25	1	29	47,11
Juill. 25	𝔓.	19	26	54,69	18	52	36,50	+ 0	34	31,65									
28	𝔳.	12	48	26,07	12	14	34,00	0	11	58,59									
30	𝔅.	17	26	12,46	16	52	41,50	23	56	46,26									
31	𝔅.	10	44	33,69	10	11	8,50	23	56	41,54									
Août 2	𝔳.	18	23	15,23	17	50	11,00	0	11	22,94									
2	𝔳.	23	55	55,84	23	22	53,50	0	11	21,53									
5	𝔓.	11	20	43,15	10	48	5,00	0	33	18,71									
7	𝔓.	7	20	0,46	6	47	37,50	0	33	5,52									
10	𝔳.	4	13	12,47	3	41	17,00	0	10	30,96									
12	𝔅.	8	32	14,77	8	0	41,00	23	55	17,35									
13	𝔅.	10	39	56,54	10	8	32,50	23	55	9,47									
15	𝔳.	11	7	24,46	10	36	19,00	0	9	52,66									
18	𝔓.	4	39	0,92	9	45	34,00	0	31	44,92									
19	𝔓.	21	49	2,77	21	17	46,50	0	31	33,90									
22	𝔳.	15	44	16,62	15	13	24,00	0	9	0,49									
24	𝔅.	17	19	40,15	16	49	5,50	23	53	48,79									
25	𝔅.	23	9	12,69	22	38	49,00	23	53	40,07									
27	𝔳.	22	54	25,16	22	24	19,50	0	8	23,49									
30	𝔓.	14	23	54,69	13	54	14,00	0	30	18,37									
Sept. 1	𝔓.	19	50	37,85	19	21	14,00	0	30	2,12									
4	𝔳.	21	28	6,00	20	59	8,00	0	7	26,42									
6	𝔅.	23	34	14,08	23	5	33,25	23	52	14,70									
8	𝔅.	6	17	27,69	5	48	57,00	23	52	5,39									
10	𝔳.	11	51	0,00	11	22	49,00	0	6	47,00									
13	𝔓.	7	48	27,00	7	20	39,50	0	28	40,42									

Date.	Lieu.	Dent 1635. Pendule normale.	Dent 1635. Chronomètre comparé.	Dent 1635. Corr. du Chronomètre.	Dent 1636. Pendule normale.	Dent 1636. Chronomètre comparé.	Dent 1636. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Juin 3	P.	7 13 21	0 25 0,00	+2 1 44,05	7 17 11	0 30 21,50	+2 0 31,87
6	M.	3 6 3	19 35 21,75	30 46,47	3 12 0	19 42 40,25	29 23,99
7	M.	8 39 26	1 7 50,25	30 46,44	8 46 55	1 16 40,75	29 23,71
9	P.	6 12 38	22 57 10,25	1 50,04	6 17 21	23 3 19,75	0 22,77
10	P.	8 15 24,5	0 59 36,75	1 49,92	8 19 48	1 5 26,75	0 22,70
12	M.	5 23 35	21 28 53,25	30 50,20	5 34 11	21 41 0,75	29 16,97
13	M.	9 14 46	1 19 26,25	30 50,38	9 20 49	1 27 1,75	29 16,89
15	P.	6 3 12	22 24 6,75	1 53,47	6 9 26,5	22 32 0,25	0 13,45
17	P.	8 41 29	0 58 0,75	1 54,60	8 45 33,5	1 3 47,25	0 11,94
20	M.	8 23 26	0 0 33,50	31 1,04	8 26 30	0 5 33,50	29 4,54
20	M.	10 48 35	2 25 18,50	31 1,30	10 50 43	2 29 23,00	29 4,45
22	P.	5 56 27,5	21 49 37,25	2 7,67	6 3 24,5	21 58 39,75	0 1,03
24	P.	9 4 20	0 53 0,75	2 4,72	9 10 23	1 1 12,75	1 59 59,73
26	M.	6 30 24	21 40 5,50	31 14,92	6 31 27	21 43 30,50	2 28 52,74
28	M.	9 57 36	1 2 45,50	31 17,16	10 0 14	1 7 49,50	2 28 50,73
30	P.	4 57 28,5	20 19 2,25	2 24,77	5 2 42	20 26 53,25	1 59 46,42
Juill. 25	𝔓.	4 8 33,5	17 50 53,75	+2 3 25,93	4 15 25,5	18 2 5,75	+1 59 4,81
		K. 1290.			K. 1290.		
31	𝔅.	1 20 55,85	23 17 46,00	1 26 25,61	22 59 25,15	21 0 57,00	21 43,74
31	𝔅.	10 45 21,69	8 42 11,50	1 26 26,54	10 46 1,85	8 47 35,00	21 43,20
Août 5	𝔓.	11 23 38,31	9 20 30,50	2 3 48,37	11 24 27,69	9 26 21,00	58 47,25
7	𝔓.	7 23 53,54	5 20 41,50	2 3 54,60	7 24 42,46	5 26 41,00	58 44,02
12	𝔅.	9 6 48,69	7 3 36,00	1 26 56,31	9 8 15,92	7 10 37,00	21 22,54
13	𝔅.	10 42 27,92	8 39 14,00	1 26 59,36	10 43 35,54	8 46 0,00	21 20,98
18	𝔓.	4 41 41,54	8 15 32,50	2 4 27,04	4 42 35,77	8 22 34,00	58 19,77
19	𝔓.	21 53 23,77	19 49 9,00	2 4 32,40	21 54 35,08	19 56 36,50	58 16,21
24	𝔅.	17 22 36,00	15 18 11,25	1 27 38,90	17 24 1,38	15 26 23,25	20 52,28
25	𝔅.	23 10 18,92	21 5 51,50	1 27 43,81	23 11 0,00	21 13 26,00	20 50,39
30	𝔓.	14 24 24,23	12 19 51,00	2 5 10,92	14 25 9,23	12 27 55,00	57 51,92
Sept. 1	𝔓.	19 52 57,00	17 48 15,00	2 5 20,27	19 53 41,54	17 56 32,50	57 47,31
6	𝔅.	23 35 36,92	21 30 33,00	1 28 37,79	23 36 45,23	21 39 56,00	20 23,10
8	𝔅.	6 19 24,23	4 14 14,50	1 28 44,43	6 20 4,61	4 23 19,00	20 20,31
13	𝔓.	7 50 2,77	5 44 34,00	2 6 21,69	7 50 53,08	5 54 26,50	57 19,50

Date.	Lieu.	Dent 1637. Pendule normale.	Dent 1637. Chronomètre comparé.	Dent 1637. Corr. du Chronomètre.	Dent 1794. Pendule normale.	Dent 1794. Chronomètre comparé.	Dent 1794. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Juin 3	P.	7 23 23	0 36 30,50	+2 0 33,86	7 32 43	0 46 41,00	+1 59 41,83
6	M.	8 18 11	19 48 47,25	29 26,99	8 24 11	19 56 2,75	2 28 10,51
7	M.	8 52 15	1 21 57,25	29 26,35	9 0 7	1 31 11,75	2 28 2,56
9	P.	6 24 18,5	23 10 13,75	0 25,12	6 30 34,5	23 18 0,75	1 58 53,10
10	P.	8 24 8,5	23 9 44,25	0 24,99	8 28 58,5	1 16 5,75	1 58 52,70
12	M.	5 38 32	21 45 17,75	29 20,26	5 43 54	21 52 20,75	2 27 38,38
13	M.	9 25 40	1 31 48,75	29 20,09	9 31 57	1 39 47,75	2 27 37,08
15	P.	6 13 22	22 35 49,75	0 18,80	6 17 39	22 42 1,25	1 58 23,60
17	P.	8 51 44,5	1 9 52,75	0 16,42	8 56 4	1 16 5,75	1 58 22,21
20	M.	8 28 28	0 7 21,50	29 14,21	8 30 15	0 11 12,00	2 27 10,42
20	M.	10 52 53	2 31 23,00	29 14,10	10 53 38	2 34 7,00	2 27 9,99
22	P.	6 7 37,5	22 2 42,25	0 10,83	6 11 49	22 9 4,25	1 57 59,65
24	P.	9 15 22,5	1 6 2,75	0 8,31	9 19 47,5	1 12 51,75	1 57 43,69
26	M.	6 33 27	21 45 20,50	29 2,42	6 34 44	21 49 8,50	2 26 31,21
28	M.	10 2 30	1 9 56,00	28 59,86	10 3 41	1 13 41,50	2 26 25,16
30	P.	5 7 46	20 31 46,75	1 59 56,09	5 12 33	20 39 17,75	1 57 11,31
Juill. 25	𝔓.	4 20 13,5	18 7 17,25	+1 58 40,53	4 27 28,5	18 20 51,25	+1 52 20,33
		K. 1290.			K. 1290.		
31	𝔅.	1 22 38,31	23 24 38,50	21 15,57	1 23 28,62	23 31 53,50	14 50,88
31	𝔅.	10 46 46,62	8 48 48,50	21 14,47	10 47 29,54	8 55 56,00	14 49,89
Août 5	𝔓.	11 29 17,08	9 27 43,50	58 14,14	11 26 4,15	9 35 1,50	51 43,22
7	𝔓.	7 25 24,46	5 27 58,00	58 9,02	7 26 18,00	5 35 9,50	51 51,07
12	𝔅.	9 9 34,85	7 12 34,00	20 44,47	9 10 37,85	7 20 25,00	13 56,47
13	𝔅.	10 44 51,23	8 47 56,00	20 40,67	10 46 0,00	8 56 5,00	13 40,45
18	𝔓.	4 43 18,92	8 23 58,00	57 38,92	4 44 34,15	8 32 30,00	50 22,16
19	𝔓.	21 55 25,85	19 58 10,50	57 32,98	21 56 19,85	20 6 43,50	49 53,98
24	𝔅.	17 25 8,31	15 28 13,50	20 8,96	17 26 10,15	15 37 46,00	11 38,31
25	𝔅.	23 11 33,23	21 14 45,00	20 4,62	23 12 29,08	21 24 29,50	11 15,97
30	𝔓.	14 25 50,31	12 29 25,50	57 2,50	14 26 20,54	12 38 46,00	48 12,23
Sept. 1	𝔓.	19 54 48,00	17 58 32,00	56 54,27	19 55 39,23	18 7 56,00	48 21,50
6	𝔅.	23 37 56,31	21 41 54,00	19 36,18	23 38 38,31	21 51 1,00	11 11,18
8	𝔅.	6 20 54,46	4 24 58,00	19 31,16	6 22 19,85	4 34 45,00	11 9,55
13	𝔓.	7 51 51,23	5 56 15,00	56 29,15	7 52 46,62	6 5 23,00	48 16,52

Date.	Lieu.	Dent 1901. Pendule normale.	Dent 1901. Chronomètre comparé.	Dent 1901. Corr. du Chronomètre.	Dent 1910. Pendule normale.	Dent 1910. Chronomètre comparé.	Dent 1910. Corr. du Chronomètre.
Juin 3	P.	7h 38m 49s	0h 52m 7s,00	+2h 0m 20s,83	7h 45m 31s	0h 55m 57s,0	+2h 3m 11s,73
6	M.	3 31 1	20 1 49,75	2 29 12,39	3 37 12	20 5 4,25	32 7,87
7	M.	9 4 45	1 34 39,75	2 29 11,80	9 8 54	1 35 52,75	32 7,12
9	P.	6 36 47,5	23 23 0,75	2 0 5,08	6 40 46,5	23 24 2,75	3 1,43
10	P.	8 34 9,5	1 20 3,75	2 0 4,85	8 40 2,5	1 22 59,25	3 1,39
12	M.	5 49 36	21 56 44,25	2 28 55,94	5 54 17	21 58 32,25	31 48,18
13	M.	9 37 29	1 44 0,25	2 28 55,67	9 40 53	1 44 31,25	31 48,11
15	P.	6 22 23	22 45 18,75	1 59 49,33	6 27 53	22 47 54,75	2 42,43
17	P.	9 0 48	1 19 24,25	1 59 46,94	9 7 20	1 23 0,75	2 41,37
20	M.	8 31 2	0 10 29,00	2 28 40,29	8 32 34	0 9 6,00	31 35,04
20	M.	10 55 29	2 34 32,50	2 28 40,17	10 57 6	2 33 14,50	31 34,91
22	P.	6 17 6	22 12 44,75	1 59 35,28	6 24 16,5	22 17 5,25	2 24,11
24	P.	9 26 21,5	1 17 35,25	1 59 33,11	9 30 18,5	1 18 47,25	2 17,47
26	M.	6 36 7	21 48 38,50	2 28 23,98	6 39 24	21 49 15,00	31 3,94
28	M.	10 5 6	1 13 10,50	2 28 20,93	10 6 46	1 12 12,00	30 59,16
30	P.	5 18 42,5	20 43 22,75	1 59 14,80	5 24 50	20 46 56,25	1 47,79
Juill. 25	𝔓.	4 33 46,5	18 21 25,75	+1 58 2,80	4 39 27,5	18 24 32,25	+2 0 36,37
		K. 1290.			K. 1290.		
31	𝔅.	1 24 12,00	23 26 49,00	20 38,76	1 24 53,08	23 25 3,00	1 23 5,84
31	𝔅.	10 48 12,23	8 50 51,00	20 37,58	10 48 49,38	8 49 1,00	23 4,73
Août 5	𝔓.	11 26 54,92	9 29 59,50	57 35,99	11 27 41,54	9 28 28,00	59 54,11
7	𝔓.	7 27 0,92	5 30 13,00	57 30,49	7 27 4,62	5 28 35,00	59 48,19
12	𝔅.	9 12 30,92	7 16 7,00	20 7,55	9 14 1,38	7 15 31,00	22 14,01
13	𝔅.	10 47 54,69	8 51 36,00	20 4,14	10 49 14,77	8 50 51,00	22 9,22
18	𝔓.	4 45 18,00	8 26 32,00	57 4,01	4 46 5,08	8 25 21,00	59 2,09
19	𝔓.	21 57 7,38	20 0 25,50	56 59,51	21 57 46,15	19 59 4,50	58 59,28
24	𝔅.	17 27 24,92	15 31 2,25	19 36,83	17 28 53,55	15 30 38,00	21 29,71
25	𝔅.	23 13 22,15	21 17 4,75	19 33,79	23 14 21,23	21 16 10,50	21 27,12
30	𝔓.	14 26 43,15	12 30 46,00	56 34,84	14 27 19,15	12 29 37,75	58 19,09
Sept. 1	𝔓.	19 56 29,54	18 0 40,00	56 27,81	19 57 8,08	17 59 31,00	58 15,35
6	𝔅.	23 39 19,38	21 43 50,25	19 3,00	23 40 7,38	21 42 46,00	20 55,25
8	𝔅.	6 23 14,31	4 27 50,00	18 59,01	6 23 58,62	4 26 40,00	20 53,32
13	𝔓.	7 53 36,00	5 58 30,50	55 58,42	7 54 36,69	5 57 35,00	57 54,61

Date.	Lieu.	Dent 1913. Pendule normale.	Dent 1913. Chronomètre comparé.	Dent 1913. Corr. du Chronomètre.	Dent 1978. Pendule normale.	Dent 1978. Chronomètre comparé.	Dent 1978. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Juin 3	P.	7 52 41	1 2 51,00	+2 3 26,56	7 56 18	1 8 35,50	+2 1 18,46
6	M.	3 44 2	20 11 22,75	32 38,26	3 48 36	20 18 14,75	30 19,51
7	M.	9 13 30	1 39 56,25	32 38,87	9 20 52	1 49 36,75	30 19,16
9	P.	6 47 36,5	23 30 3,25	3 49,81	6 53 3,5	23 37 56,25	1 22,92
10	P.	8 45 11	1 27 18,25	3 50,05	8 49 36	1 34 9,75	1 22,82
12	M.	5 59 7	22 2 12,25	32 57,39	6 4 6	22 9 43,75	30 24,08
13	M.	9 45 30	1 47 57,75	32 57,86	9 49 45	1 54 45,75	30 24,16
15	P.	6 32 18,5	22 50 54,75	4 7,20	6 40 5,5	23 1 19,75	1 27,92
17	P.	9 13 10,5	1 27 22,75	4 8,91	9 19 1	1 35 52,75	1 28,45
20	M.	8 33 26	0 8 17,00	33 15,90	8 35 10	0 12 45,00	30 31,61
20	M.	10 58 40	2 33 7,00	33 16,15	11 1 40	2 38 51,00	30 31,67
22	P.	6 28 44	22 19 30,75	4 25,38	6 32 37,5	22 26 14,25	1 34,74
24	P.	9 36 54	1 23 11,25	4 27,89	9 40 37	1 29 46,75	1 34,78
26	M.	6 41 19	21 48 40,50	33 33,13	6 42 58	21 53 16,50	30 35,86
28	M.	10 9 26	1 12 15,00	33 35,72	10 11 18	1 17 7,00	30 35,41
30	P.	5 30 33,5	20 49 42,75	4 43,96	5 37 20,5	20 59 34,75	1 37,74
Juill. 25	𝔓.	4 46 41,5	18 27 8,25	+2 5 13,18	4 51 6,5	18 35 27,75	+2 1 17,96
		K. 1290.			K. 1290.		
31	𝔅.	1 25 34,62	23 20 37,50	1 28 12,88	1 26 6,00	23 25 15,25	1 24 6,51
31	𝔅.	10 49 51,00	8 44 54,00	1 28 13,36	10 50 35,54	8 49 45,50	1 24 6,40
Août 5	𝔓.	11 28 34,62	9 23 40,50	2 5 34,69	11 29 23,54	9 28 47,00	2 1 17,11
7	𝔓.	7 28 21,69	5 23 28,50	2 5 35,76	7 29 7,15	5 28 35,00	2 1 14,72
12	𝔅.	9 15 22,62	7 10 31,00	1 28 35,25	9 16 33,46	7 16 14,00	1 24 3,09
13	𝔅.	10 50 26,77	8 45 36,00	1 28 36,22	10 51 24,00	8 51 7,00	1 24 2,45
18	𝔓.	4 46 43,85	8 19 4,50	2 5 57,36	4 47 46,62	8 24 49,50	2 1 15,13
19	𝔓.	21 58 36,23	19 52 56,00	2 5 57,86	21 59 21,00	19 58 24,00	2 1 14,63
24	𝔅.	17 35 49,15	15 30 7,00	1 28 55,82	17 29 57,69	15 29 8,00	1 24 3,85
25	𝔅.	23 14 58,15	21 9 18,00	1 28 56,54	23 15 48,00	21 15 1,50	1 24 2,89
30	𝔓.	14 27 54,23	12 22 13,00	2 6 18,92	14 28 21,69	12 27 46,00	2 1 13,38
Sept. 1	𝔓.	19 57 48,23	17 52 6,00	2 6 20,50	19 58 55,62	17 58 21,00	2 1 12,89
6	𝔅.	23 40 55,83	21 35 11,00	1 29 18,70	23 41 34,62	21 41 3,00	1 24 5,49
8	𝔅.	6 25 13,38	4 19 28,00	1 29 20,08	6 25 56,77	4 25 26,50	1 24 4,97
13	𝔓.	7 55 28,62	5 49 39,00	2 6 42,54	7 57 2,77	5 56 39,00	2 1 16,69

Date.	Lieu.	Dent 1979. Pendule normale.	Dent 1979. Chronomètre comparé.	Dent 1979. Corr. du Chronomètre.	Dent 1983. Pendule normale.	Dent 1983. Chronomètre comparé.	Dent 1983. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Juin 3	P.	8 2 11	1 14 58,50	+2 0 47,50	8 6 15	1 18 16,50	+2 1 32,83
6	M.	3 53 42	20 23 42,25	29 47,17	3 58 27	20 27 53,75	30 29,90
7	M.	9 24 24	1 53 40,25	29 47,08	9 28 14	1 56 46,75	30 29,96
9	P.	6 58 53,5	23 44 11,25	0 56,96	7 5 17,5	23 49 50,25	1 35,91
10	P.	8 54 55,5	1 39 54,25	0 56,95	9 1 4,5	1 45 23,25	1 35,94
12	M.	6 12 38	22 18 40,75	29 57,68	6 16 21	22 21 44,75	30 36,07
13	M.	9 53 21	1 58 47,75	29 57,57	9 59 20	2 4 7,25	30 36,09
15	P.	6 44 55	23 6 33,75	1 2,63	6 50 37,5	23 11 42,25	1 35,70
17	P.	9 26 35,5	1 43 54,25	1 0,21	9 30 32	1 47 14,75	1 35,57
20	M.	8 38 11	0 16 19,50	29 57,63	8 43 26	0 20 59,00	30 32,26
20	M.	11 2 30	2 40 15,00	29 57,53	11 4 24	2 41 34,00	30 32,22
22	P.	6 36 40	22 30 50,75	1 0,08	6 42 17	22 35 53,75	1 33,16
24	P.	9 45 51	1 35 36,75	0 58,02	9 49 26,5	1 38 37,25	1 32,33
26	M.	6 46 10	21 57 8,00	29 55,83	6 48 21	21 58 45,00	30 29,48
28	M.	10 13 27	1 19 57,00	29 54,06	10 16 53	1 22 48,50	30 28,00
30	P.	5 44 12,5	21 7 7,25	0 56,12	5 50 16	21 12 37,25	1 28,63
Juill. 25	𝔓.	4 57 51,5	18 43 27,25	+2 0 2,36	5 4 20,5	18 49 15,25	+2 0 42,30
		K. 1290.			K. 1290.		
31	𝔅.	1 26 48,46	23 27 12,00	1 22 52,22	1 27 33,00	23 27 31,50	1 23 17,26
31	𝔅.	10 51 14,54	8 51 39,00	1 22 51,90	10 52 21,46	8 52 21,00	1 23 16,82
Août 5	𝔓.	11 30 37,15	9 31 9,00	2 0 8,72	11 31 22,85	9 31 47,00	2 0 16,42
7	𝔓.	7 29 41,54	5 30 18,00	2 0 6,11	7 30 34,15	5 31 3,50	2 0 13,22
12	𝔅.	9 17 36,46	7 18 27,00	1 22 53,09	9 18 44,31	7 19 41,75	1 22 46,19
13	𝔅.	10 52 37,62	8 53 31,25	22 51,82	10 54 18,92	8 55 20,75	1 22 43,62
18	𝔓.	4 48 31,38	8 26 52,00	59 57,39	4 49 24,23	8 28 7,00	1 59 35,24
19	𝔓.	21 59 53,77	20 0 18,00	59 53,40	22 0 37,85	20 1 23,50	59 31,98
24	𝔅.	17 30 40,85	15 31 22,25	22 32,76	17 31 47,55	15 32 57,00	22 4,71
25	𝔅.	23 16 34,15	21 17 21,00	22 29,54	23 17 17,77	21 18 31,50	22 2,66
30	𝔓.	14 29 4,62	12 30 4,00	59 38,31	14 29 45,69	12 31 29,50	58 53,88
Sept. 1	𝔓.	20 0 13,38	18 1 21,00	59 30,65	20 1 9,23	18 2 57,50	58 50,00
6	𝔅.	23 42 30,00	21 43 59,50	22 4,37	23 43 22,85	21 45 31,25	21 25,47
8	𝔅.	6 26 44,77	4 28 20,00	21 59,47	6 27 58,85	4 30 11,25	21 22,30
13	𝔓.	7 56 16,85	5 58 13,25	58 56,52	7 58 6,92	6 0 43,50	58 16,34

Date.	Lieu.	Dent 1985. Pendule normale.	Dent 1985. Chronomètre comparé.	Dent 1985. Corr. du Chronomètre.	Dent 1966. Pendule normale.	Dent 1966. Chronomètre comparé.	Dent 1966. Corr. du Chronomètre.
		h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
Juin 3	P.	8 10 57	1 23 26,50	+ 2 1 4,07	8 16 26	1 28 55,00	+ 2 1 3,67
6	M.	4 2 47	20 32 37,25	30 5,70	4 11 57	20 41 55,25	29 56,19
7	M.	9 32 52	2 1 48,25	30 5,70	9 38 35	2 7 40,75	29 55,27
9	P.	7 11 17,5	23 56 15,75	1 14,43	7 15 37,5	24 1 1,25	0 46,22
10	P.	9 7 26,5	1 52 5,75	1 14,40	9 13 35,5	1 58 40,25	0 47,89
12	M.	6 24 31	22 30 12,25	30 17,23	6 33 28	22 39 45,25	29 39,77
13	M.	10 4 27	2 9 32,25	30 17,25	10 10 43	2 16 25,25	29 39,22
15	P.	6 55 19	23 16 36,25	1 22,43	7 0 1,5	22 22 7,25	0 33,16
17	P.	9 35 51	1 52 46,25	1 22,36	9 40 40	1 58 26,25	0 30,41
20	M.	8 46 5	0 23 46,00	30 23,83	8 50 59	0 29 35,00	29 28,04
20	M.	11 6 55	2 44 13,00	30 23,81	11 10 27	2 48 40,50	29 27,73
22	P.	6 47 10	22 40 50,75	1 28,36	6 52 10,5	22 46 56,75	0 22,04
24	P.	9 53 56	1 43 10,25	1 28,10	9 57 31	1 47 54,75	0 18,01
26	M.	6 51 21	22 1 45,00	30 28,98	6 54 45	22 6 27,00	29 10,43
28	M.	10 18 16	1 24 11,00	30 28,27	10 19 28	1 26 45,00	29 6,08
30	P.	6 56 25	21 18 41,75	1 32,12	6 2 44	21 26 32,75	1 59 59,08
Juill. 25	𝔓.	5 10 43,5	18 55 21,25	+ 2 0 57,75	5 14 32,5	19 2 5,25	+ 1 58 2,62
		K. 1290.			K. 1290.		
31	𝔅.	1 28 3,46	23 27 31,00	1 23 48,22	1 28 34,62	23 31 19,00	20 31,38
31	𝔅.	10 52 57,46	8 52 26,00	1 23 47,82	10 53 33,46	8 56 20,75	20 29,07
Août 5	𝔓.	11 32 1,85	9 31 39,50	2 1 2,92	11 33 5,31	9 36 23,00	57 22,88
7	𝔓.	7 31 23,08	5 31 4,00	2 1 1,65	7 32 4,85	5 35 34,00	57 13,42
12	𝔅.	9 20 14,31	7 20 8,00	1 23 49,95	9 21 41,92	7 25 43,50	19 42,06
13	𝔅.	10 56 9,92	8 56 7,00	1 23 48,38	10 57 21,23	9 1 31,00	19 35,69
18	𝔓.	4 50 18,00	8 27 38,50	2 0 57,51	4 51 2,31	8 32 51,00	56 29,32
19	𝔓.	22 1 40,15	20 1 4,00	2 0 53,78	22 2 47,08	20 6 42,50	56 22,21
24	𝔅.	17 32 38,31	15 32 12,00	1 23 40,47	17 33 18,00	15 37 38,00	18 54,16
25	𝔅.	23 18 3,69	21 17 42,00	1 23 38,09	23 18 50,54	21 23 19,25	18 47,69
30	𝔓.	14 30 14,31	12 30 4,00	2 0 48,01	14 30 45,00	12 35 43,50	55 39,20
Sept. 1	𝔓.	20 2 11,54	18 2 7,50	2 0 42,31	20 3 0,69	18 8 10,00	55 29,96
6	𝔅.	23 44 34,85	21 44 41,25	1 23 27,47	23 45 18,00	21 50 39,50	18 12,37
8	𝔅.	6 28 53,54	4 29 3,75	1 23 24,49	6 31 8,54	4 36 35,50	18 7,74
13	𝔓.	7 59 19,38	5 59 40,50	2 0 31,80	8 0 15,92	6 5 57,25	55 11,59

§ 12. Première évaluation de la longitude de Moscou.

Les règles que nous avons suivies dans le calcul des longitudes fournies par chaque chronomètre isolé, se trouvent exposées en détail dans le rapport sur l'expédition chronométrique de 1843 pag. 117—122. Les poids à assigner aux résultats obtenus dans les différents voyages, ont été calculés sur la formule $g' = \frac{k'}{T\sqrt{\tau\tau'}}$, pag. 126 de l'ouvage cité. k' étant une constante arbitraire, qu'on choisit telle que les poids résultants se prêtassent à un calcul commode, nous avons supposé, pour les voyages de Moscou, $g' = 1$ pour $\tau = \tau' = 75$ heures, et $\rho = 15$ heures, ce qui fait $k' = 12375$. En désignant maintenant les différents voyages faits entre les deux observatoires, par P^I, P^{II}... ou M^I, M^{II}... d'après le lieu d'où ils ont été commencés, nous avons:

Pour l'envoi principal des chronomètres.

Voyage.	τ.	ρ.	τ'.	T.	g'.
	h	h	h	h	
P^I	75,6	10,2	73,2	159,0	1,05
M^I	73,2	23,3	81,2	177,7	0,90
P^{II}	81,2	0,0	77,6	158,8	0,98
M^{II}	77,6	11,3	69,7	158,7	1,06
P^{III}	69,7	7,1	79,3	156,1	1,07
M^{III}	79,3	36,6	78,6	194,5	0,81
P^{IV}	78,6	2,7	70,8	152,1	1,09
					$\Sigma g' = 6,96$

Pour les voyages des chronomètres hebdomadaires.

Voyage.	τ.	ρ.	τ'.	T.	g'.
	h	h	h	h	
P^I	91,2	5,5	69,8	166,5	0,93
M^I	69,8	2,0	68,6	140,4	1,27
P^{II}	68,6	3,8	69,1	141,5	1,27
M^{II}	69,1	26,6	70,8	166,5	1,06
P^{III}	70,8	2,4	67,7	140,9	1,27
M^{III}	67,7	27,0	68,5	163,2	1,11
P^{IV}	68,5	27,4	67,6	163,5	1,11
					$\Sigma \gamma' = 8,02$

On voit qu'en général, pour chaque section de chronomètres, les poids des différents voyages ne varient pas considérablement entre eux, mais en même temps il est bien visible que le poids moyen des voyages des chronomètres hebdomaires est considérablement plus haut, que celui des voyages des autres chronomètres. Il fallait en conclure que les longitudes isolées, trouvées par les chronomètres hebdomadaires, fourniraient relativement un beaucoup meilleur accord; ce que l'expérience n'a pas prouvé. Ce résultat défavorable s'explique par la circonstance que la majeure partie de nos chronomètres hebdomadaires n'avaient été confectionnés, par M. Dent, que quelques mois avant le commencement de nos voyages, et qu'ils n'avaient pas encore atteint cette uniformité de marche, qui se produit seulement après un usage plus prolongé. Les mêmes chronomètres hebdomadaires qui nous offrent ici des résultats très peu satisfaisants, après

avoir été en marche pendant deux ans, se sont tellement améliorés, qu'à l'époque actuelle ils peuvent ranger parmi les chefs-d'oeuvre de l'art chronométrique.

Les tableaux suivants donnent, pour chaque chronomètre, les longitudes trouvées dans chaque voyage isolé, et les moyennes de tous les voyages $= \lambda$. J'ai ajouté les poids des chronomètres γ, calculés d'après la formule $\gamma = \frac{n-1}{\Sigma g' v^2}$.

La moyenne des résultats trouvés par tous les chronomètres, a été calculée par $\varLambda = \frac{\Sigma \gamma \lambda}{\Sigma \gamma}$ et le poids à assigner à cette moyenne, par $\Gamma = \Sigma G$, où $G = \gamma \Sigma g'$.

1. *Tableau des longitudes de Moscou, fournies par l'expédition principale.*

	1. Kessels 1290.		2. Dent 1747.		3. Hauth 30.		4. Hauth 32.	
Voyages.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.
P^{I}	$0^h\,28^m\,58^s,43$	$+0^s,64$	$0^h\,28^m\,58^s,39$	$+0^s,41$	$0^h\,28^m\,57^s,80$	$-0^s,42$	$0^h\,28^m\,58^s,82$	$-0^s,66$
M^{I}	59,45	− 0,38	59,55	− 0,75	57,15	+ 0,23	58,34	− 0,18
P^{II}	59,18	− 0,11	58,63	+ 0,17	57,56	− 0,18	58,26	− 0,10
M^{II}	58,80	+ 0,20	58,58	+ 0,22	57,55	− 0,17	58,50	− 0,34
P^{III}	59,83	− 0,76	59,13	− 0,33	56,58	+ 0,80	57,62	+ 0,54
M^{III}	59,25	− 0,18	58,46	+ 0,34	58,43	− 1,05	57,10	+ 1,06
P^{IV}	58,67	+ 0,40	58,88	− 0,08	56,89	+ 0,49	58,33	− 0,27
$\lambda =$	$0^h\,28^m\,59^s,07$		$0^h\,28^m\,58^s,80$		$0^h\,28^m\,57^s,38$		$0^h\,28^m\,58^s,16$	
$\gamma =$	4,09		6,13		2,87		3,22	

	5. Kessels 1276.		6. Hauth 52.		7. Hauth 18.		8. Hauth 11.	
Voyages.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.
P^{I}	$0^h\,28^m\,58^s,49$	$-0^s,95$	$0^h\,28^m\,57^s,83$	$-0^s,77$	$0^h\,28^m\,58^s,24$	$+0^s,55$	$0^h\,28^m\,59^s,31$	$+0^s,95$
M^{I}	57,23	+ 0,31	55,60	+ 1,46	59,18	− 0,39	62,23	− 1,97
P^{II}	58,37	− 0,83	57,88	− 0,82	58,69	+ 0,10	59,21	+ 1,05
M^{II}	58,20	− 0,66	58,53	− 1,47	58,61	+ 0,18	59,41	+ 0,85
P^{III}	56,08	+ 1,46	55,99	+ 1,07	59,64	− 0,85	62,08	− 1,82
M^{III}	56,18	+ 1,36	55,43	+ 1,63	58,62	+ 0,17	60,56	− 0,30
P^{IV}	57,96	− 0,42	57,74	− 0,68	58,54	+ 0,25	59,33	+ 0,93
$\lambda =$	$0^h\,28^m\,57^s,54$		$0^h\,28^m\,57^s,06$		$0^h\,28^m\,58^s,79$		$0^h\,28^m\,60^s,26$	
$\gamma =$	0,98		0,64		4,40		0,55	

	9. Hauth 31.		10. Dent 1778.		11. Dent 1613.		12. Dent 1630.	
Voyages.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.
P^{I}	$0^h\,28^m\,58^s,25$	$+0^s,20$	$0^h\,28^m\,59^s,17$	$-0^s,71$	$0^h\,28^m\,58^s,10$	$+0^s,38$	$0^h\,28^m\,58^s,13$	$+0^s,17$
M^{I}	58,19	+ 0,26	58,01	+ 0,45	59,34	− 0,86	58,72	− 0,42
P^{II}	59,14	− 0,69	58,47	− 0,01	58,82	− 0,34	58,75	− 0,45
M^{II}	58,84	− 0,39	58,65	− 0,19	58,42	+ 0,06	58,41	− 0,11
P^{III}	58,49	− 0,04	57,99	+ 0,47	58,63	− 0,15	57,72	+ 0,58
M^{III}	57,83	+ 0,62	58,40	+ 0,06	57,79	+ 0,69	57,39	+ 0,91
P^{IV}	58,30	+ 0,15			58,28	+ 0,20	58,85	− 0,55
$\lambda =$	$0^h\,28^m\,58^s,45$		$0^h\,28^m\,58^s,46$		$0^h\,28^m\,58^s,48$		$0^h\,28^m\,58^s,30$	
$\gamma =$	5,62		5,06		4,32		3,41	

13. Arnold et Dent 951.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,45^s,22$	
M^I	30 36,73	
P^{II}	29 25,73	
M^{II}	29 4,02	
P^{III}	30 25,96	
M^{III}	29 47,76	
P^{IV}	29 15,23	

14. Dent 1687.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,72$	$-0^s,69$
M^I	57,97	+ 0,06
P^{II}	58,35	− 0,32
M^{II}	58,21	− 0,18
P^{III}	57,15	+ 0,88
M^{III}	57,12	+ 0,91
P^{IV}	58,41	− 0,38
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,03$	
γ =	2,83	

15. Dent 1730.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,76$	$-0^s,36$
M^I	57,63	+ 0,77
P^{II}	59,06	− 0,66
M^{II}	58,71	− 0,31
P^{III}	57,52	+ 0,88
M^{III}	58,14	+ 0,26
P^{IV}	58,82	− 0,42
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,40$	
γ =	2,64	

16. Dent 1739.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,31$	$-0^s,20$
M^I	57,56	+ 0,55
P^{II}	58,73	− 0,62
M^{II}	58,18	− 0,07
P^{III}	57,29	+ 0,82
M^{III}	57,82	+ 0,29
P^{IV}	58,77	− 0,66
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,11$	
γ =	3,07	

17. Dent 1807.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,19$	$+0^s,17$
M^I	58,21	+ 0,15
P^{II}	58,56	− 0,20
M^{II}	58,24	+ 0,12
P^{III}	58,26	+ 0,10
M^{III}	58,44	− 0,08
P^{IV}	58,58	− 0,22
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,36$	
γ =	34,89	

18. Dent 1799.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,17$	$+0^s,18$
M^I	58,56	− 0,21
P^{II}	58,19	+ 0,16
M^{II}	58,16	+ 0,19
P^{III}	58,46	− 0,11
M^{III}	58,36	− 0,01
P^{IV}	58,66	− 0,31
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,35$	
γ =	24,19	

19. Dent 1798.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,56$	$-0^s,51$
M^I	57,50	+ 0,55
P^{II}	58,55	− 0,50
M^{II}	58,06	− 0,01
P^{III}	57,16	+ 0,89
M^{III}	57,76	+ 0,29
P^{IV}	58,67	− 0,62
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,05$	
γ =	2,82	

20. Dent 1789.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,57^s,96$	$+0^s,65$
M^I	59,22	− 0,61
P^{II}	58,34	+ 0,27
M^{II}	58,24	+ 0,37
P^{III}	59,06	− 0,45
M^{III}	58,71	− 0,10
P^{IV}	58,78	− 0,17
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,61$	
γ =	4,74	

21. Dent 1787.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,39$	$-0^s,08$
M^I	58,44	− 0,13
P^{II}	58,39	− 0,08
M^{II}	58,17	+ 0,14
P^{III}	58,00	+ 0,31
M^{III}	57,89	+ 0,42
P^{IV}	58,77	− 0,46
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,31$	
γ =	11,43	

22. Dent 1776.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,57^s,61$	$+1^s,06$
M^I	58,99	− 0,32
P^{II}	58,45	+ 0,22
M^{II}	58,50	+ 0,17
P^{III}	59,14	− 0,47
M^{III}	58,75	− 0,08
P^{IV}	59,24	− 0,57
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,67$	
γ =	3,23	

23. Dent 1821.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,57^s,41$	$+1^s,34$
M^I	59,01	− 0,26
P^{II}	59,48	− 0,73
M^{II}	58,89	− 0,14
P^{III}	58,99	− 0,24
M^{III}	58,55	+ 0,20
P^{IV}	58,94	− 0,19
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,75$	
γ =	2,29	

24. Dent 1827.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,59^s,15$	$-0^s,66$
M^I	58,47	+ 0,02
P^{II}	58,65	− 0,16
M^{II}	58,47	+ 0,02
P^{III}	57,91	+ 0,58
M^{III}	58,15	+ 0,34
P^{IV}	58,56	− 0,07
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,49$	
γ =	6,37	

25. Dent 1941.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,45$	$-0^s,02$
M^I	58,38	+ 0,07
P^{II}	58,33	+ 0,12
M^{II}	58,39	+ 0,06
P^{III}	58,32	+ 0,13
M^{III}	58,68	− 0,23
P^{IV}	58,65	− 0,20
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,45$	
γ =	47,33	

26. Dent 1808.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,61^s,16$	
M^I	63,17	
P^{II}	59,11	
M^{II}	58,36	
P^{III}	55,82	
M^{III}	61,18	
P^{IV}	63,26	

27. Dent 1774.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I	$0^h\,28^m\,58^s,46$	$-0^s,14$
M^I	58,07	+ 0,25
P^{II}	58,39	− 0,07
M^{II}	58,25	+ 0,07
P^{III}	58,34	− 0,02
M^{III}	58,17	+ 0,15
P^{IV}	58,51	− 0,19
λ =	$0^h\,28^m\,58^s,32$	
γ =	41,67	

28. Kessels 1297.

Voyages.	Longitudes.	v.
P^I		
M^I		
P^{II}	$0^h\,28^m\,58^s,81$	$-0^s,83$
M^{II}	57,98	0,00
P^{III}	57,05	+ 0,93
M^{III}	57,80	+ 0,18
P^{IV}	58,30	− 0,32
λ =	$0^h\,28^m\,57^s,98$	
γ =	2,30	

Le calcul de λ et de γ a été omis pour le chronomètre non-compensé Arnold et Dent 951, qui n'était destiné qu'à nous indiquer les corrections thermométriques à ajouter aux longitudes isolées, obtenues à l'aide des autres chronomètres. Également, le calcul des mêmes quantités a été omis pour le chronomètre Dent 1808 dont la marche, à ce qu'on voit dans le tableau précédent, a été troublée extraordinairement pendant l'expédition de Moscou.

2. *Tableau des longitudes de Moscou, obtenues à l'aide des chronomètres hebdomadaires.*

	1. Dent 1635.		2. Dent 1636.		3. Dent 1637.		4. Dent 1794.	
Voyages.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.
P^{I}	$0^h\,28^m\,59^s,01$	$+1^s,02$	$0^h\,28^m\,58^s,12$	$+0^s,05$	$0^h\,28^m\,57^s,72$	$+1^s,21$	$0^h\,28^m\,51^s,77$	
M^{I}	58,36	+1,67	57,58	+0,59	58,22	+0,71	57,47	
P^{II}	58,60	+1,43	58,34	−0,17	58,27	+0,66	59,54	
M^{II}	61,61	−1,58	58,09	+0,08	59,56	−0,63	61,02	
P^{III}	59,96	+0,07	58,15	+0,02	60,60	−1,67	59,03	
M^{III}	61,83	−1,80	58,26	−0,09	58,73	+0,20	59,01	
P^{IV}	61,20	−1,17	58,72	−0,55	58,99	−0,06	60,80	
λ =	$0^h\,28^m\,60^s,03$		$0^h\,28^m\,58^s,17$		$0^h\,28^m\,58^s,93$			
γ =	0,40		7,20		0,91			

	5. Dent 1901.		6. Dent 1910.		7. Dent 1913.		8. Dent 1978.	
Voyages.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.
P^{I}	$0^h\,28^m\,60^s,15$	$-1^s,13$	$0^h\,28^m\,61^s,55$	$-2^s,55$	$0^h\,28^m\,58^s,88$	$-0^s,29$	$0^h\,28^m\,58^s,33$	$+0^s,81$
M^{I}	58,84	+0,18	56,16	+2,84	58,28	+0,31	58,77	+0,37
P^{II}	58,69	+0,33	56,20	+2,80	59,03	−0,44	58,76	+0,38
M^{II}	59,93	−0,91	59,75	−0,75	58,73	−0,14	59,66	−0,52
P^{III}	59,26	−0,24	62,43	−3,43	58,71	−0,12	59,98	−0,84
M^{III}	57,94	+1,08	58,71	+0,29	57,97	+0,62	59,00	+0,14
P^{IV}	58,50	+0,52	59,00	0,00	58,46	+0,13	59,37	−0,23
λ =	$0^h\,28^m\,59^s,02$		$0^h\,28^m\,59^s,00$		$0^h\,28^m\,58^s,59$		$0^h\,28^m\,59^s,14$	
γ =	1,53		0,14		6,45		2,68	

	9. Dent 1979.		10. Dent 1983.		11. Dent 1985.		12. Dent 1986.	
Voyages.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.
P^{I}	$0^h\,28^m\,54^s,26$	$+2^s,48$	$0^h\,28^m\,55^s,36$	$+2^s,66$	$0^h\,28^m\,55^s,77$	$+2^s,14$	$0^h\,28^m\,60^s,75$	$-0^s,56$
M^{I}	55,48	+1,26	57,12	+0,90	57,10	+0,81	59,40	+0,79
P^{II}	57,85	−1,11	60,26	−2,24	58,84	−0,93	58,95	+1,24
M^{II}	56,17	+0,57	58,56	−0,54	58,11	−0,20	61,89	−1,70
P^{III}	57,44	−0,70	57,90	+0,12	58,41	−0,50	61,74	−1,55
M^{III}	57,63	−0,89	58,11	−0,09	58,16	−0,25	59,07	+1,12
P^{IV}	57,88	−1,14	58,26	−0,24	58,51	−0,60	59,73	+0,46
λ =	$0^h\,28^m\,56^s,74$		$0^h\,28^m\,58^s,02$		$0^h\,28^m\,57^s,91$		$0^h\,28^m\,60^s,19$	
γ =	0,48		0,42		+0,85		0,56	

En prenant la moyenne de tous les 37 λ, eu égard aux poids des différents chronomètres, nous avons, comme première valeur de la différence en longitude entre les observatoires de Poulkova et de Moscou,

$$\Lambda = 0^h\,28^m\,58^s,405, \text{ avec le poids } \Gamma = 1771,7.$$

§ 13. Première évaluation de la longitude de Varsovie.

Les longitudes de Varsovie ont été calculées, sous tous les rapports, comme celles de Moscou. Nous n'avons pas même changé la constante arbitraire k', dans le calcul des poids relatifs des différents voyages, afin de pouvoir comparer entre eux directement les poids des chronomètres, déterminés dans les deux expéditions. Or, les voyages de Varsovie étant d'une durée considérablement plus longue que ceux de Moscou, il s'en suit que les poids à assigner aux différents voyages sont beaucoup plus petits. En effet nous avons:

Voyage.	τ.	ρ.	τ'.	T.	g'.
$\mathfrak{P}^{I}$	$117^h,7$	$17^h,3$	$120^h,5$	$255^h,5$	0,41
$\mathfrak{B}^{I}$	120,5	43,9	121,9	286,3	0,36
$\mathfrak{P}^{II}$	121,9	25,4	119,7	267,0	0,38
$\mathfrak{B}^{II}$	119,7	41,2	115,5	276,4	0,38
$\mathfrak{P}^{III}$	115,5	29,8	111,4	256,7	0,43
$\mathfrak{B}^{III}$	111,4	53,4	123,7	288,5	0,37
$\mathfrak{P}^{IV}$	123,7	30,6	121,8	276,1	0,37

Dans les tableaux suivants le calcul de γ et de λ a été omis pour le chronomètre sans compensation Arnold et Dent 951 et pour le chronomètre Dent 1794 dont la marche se montrait encore très dérangée. Il est bien remarquable que le chronomètre Dent 1808 qui, pendant l'expédition de Moscou, avait eu la marche très peu régulière, a fourni ici des résultats très satisfaisants, sans que, dans l'intervalle entre les deux expéditions, il ait été entre les mains de l'artiste. Il est donc bien probable que l'irrégularité antérieure de sa marche, fût produite par un corpuscule étranger qui s'était introduit dans ses rouages, et qui, dans l'intervalle entre les deux expéditions, s'est éloigné spontanément.

Tableau des longitudes de Varsovie.

	1. Kessels 1290.		2. Dent 1747.		3. Hauth 30.		4. Hauth 32.	
Voyages.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,11^s,06$	$+0^s,92$	$0^h\,37^m\,12^s,32$	$-0^s,62$	$0^h\,37^m\,12^s,19$	$-0^s,41$	$0^h\,37^m\,11^s,42$	$-0^s,51$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,61	+0,37	11,90	−0,20	11,16	+0,62	10,79	+0,12
$\mathfrak{P}^{II}$			10,78	+0,92	12,12	−0,34	10,58	+0,33
$\mathfrak{B}^{II}$			11,92	−0,22	10,55	+1,23	11,23	−0,32
$\mathfrak{P}^{III}$	12,57	−0,59	11,22	+0,48	10,43	+1,35	11,60	−0,69
$\mathfrak{B}^{III}$	13,31	−1,33	12,42	−0,72	11,63	+0,15	9,33	+1,58
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,38	+0,60	11,35	+0,35	14,54	−2,76	11,27	−0,36
$\lambda =$	$0^h\,37^m\,11^s,98$		$0^h\,37^m\,11^s,70$		$0^h\,37^m\,11^s,78$		$0^h\,37^m\,10^s,91$	
$\gamma =$	3,00		7,09		1,33		4,39	

Voyages.	5. Kessels 1276. Longitudes.	v.	6. Hauth 52. Longitudes.	v.	7. Hauth 18. Longitudes.	v.	8. Hauth 26. Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,11^s,37$	$-1^s,41$	$0^h\,37^m\,11^s,69$	$-0^s,72$	$0^h\,37^m\,12^s,17$	$-0^s,65$	$0^h\,37^m\,11^s,72$	$-0^s,84$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,24	−1,28	12,09	−1,12	12,56	−1,04	11,88	−1,00
$\mathfrak{P}^{II}$	13,78	−3,82	15,16	−4,19	9,17	+2,35	10,77	+0,11
$\mathfrak{B}^{II}$	7,18	+2,78	9,09	+1,88	10,67	+0,85	11,14	−0,26
$\mathfrak{P}^{III}$	6,34	+3,62	9,28	+1,69	11,71	−0,19	11,49	−0,61
$\mathfrak{B}^{III}$	10,06	−0,10	7,01	+3,96	12,87	−1,35	8,16	+2,72
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,20	−0,24	12,70	−1,73	11,54	−0,02	9,83	+1,05
$\lambda =$	$0^h\,37^m\,9^s,96$		$0^h\,37^m\,10^s,97$		$0^h\,37^m\,11^s,52$		$0^h\,37^m\,10^s,88$	
$\gamma =$	0,39		0,36		1,66		1,51	

Voyages.	9. Hauth 31. Longitudes.	v.	10. Dent 1630. Longitudes.	v.	11. Dent 1613. Longitudes.	v.	12. Arnold et Dent 951. Longitudes.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,12^s,54$	$-0^s,93$	$0^h\,37^m\,12^s,48$	$-1^s,02$	$0^h\,37^m\,12^s,24$	$+0^s,02$	$0^h\,38^m\,6^s,20$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,92	−0,31	11,34	+0,12	13,61	−1,35	38 15,85
$\mathfrak{P}^{II}$	11,09	+0,52	10,77	+0,69	11,51	+0,75	35 32,51
$\mathfrak{B}^{II}$	11,00	+0,61	11,18	+0,28	12,30	−0,04	38 6,89
$\mathfrak{P}^{III}$	11,68	−0,07	11,91	−0,45	12,16	+0,10	38 40,76
$\mathfrak{B}^{III}$	11,76	−0,15	10,85	+0,61	12,71	−0,45	40 34,78
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,30	+0,31	11,56	−0,10	11,39	+0,87	37 58,56
$\lambda =$	$0^h\,37^m\,11^s,61$		$0^h\,37^m\,11^s,46$		$0^h\,37^m\,12^s,26$		
$\gamma =$	8,96		6,89		4,88		

Voyages.	13. Dent 1687. Longitudes.	v.	14. Dent 1730. Longitudes.	v.	15. Dent 1739. Longitudes.	v.	16. Dent 1807. Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,11^s,06$	$-0^s,44$	$0^h\,37^m\,10^s,32$	$+0^s,28$	$0^h\,37^m\,10^s,07$	$+1^s,35$	$0^h\,37^m\,11^s,71$	$+0^s,29$
$\mathfrak{B}^{I}$	10,96	−0,34	11,75	−1,15	11,64	−0,22	11,78	+0,22
$\mathfrak{P}^{II}$	12,78	−2,16	11,05	−0,45	11,95	−0,53	11,31	+0,69
$\mathfrak{B}^{II}$	11,08	−0,46	10,74	−0,14	10,44	+0,98	11,83	+0,17
$\mathfrak{P}^{III}$	10,77	−0,15	10,83	−0,23	11,32	+0,10	11,53	+0,47
$\mathfrak{B}^{III}$	7,62	+3,00	8,64	+1,96	11,88	−0,46	13,27	−1,27
$\mathfrak{P}^{IV}$	9,91	+0,71	10,84	−0,24	12,72	−1,30	12,64	−0,64
$\lambda =$	$0^h\,37^m\,10^s,62$		$0^h\,37^m\,10^s,60$		$0^h\,37^m\,11^s,42$		$0^h\,37^m\,12^s,00$	
$\gamma =$	1,10		2,91		3,09		5,52	

Voyages.	17. Dent 1799. Longitudes.	v.	18. Dent 1798. Longitudes.	v.	19. Dent 1789. Longitudes.	v.	20. Dent 1787. Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,11^s,45$	$+0^s,21$	$0^h\,37^m\,11^s,12$	$+0^s,39$	$0^h\,37^m\,11^s,86$	$+0^s,11$	$0^h\,37^m\,11^s,48$	$+0^s,02$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,89	−0,23	11,79	−0,28	12,09	−0,12	12,43	−0,93
$\mathfrak{P}^{II}$	10,85	+0,81	12,26	−0,75	10,51	+1,46	10,60	+0,90
$\mathfrak{B}^{II}$	11,48	+0,18	11,55	−0,04	11,44	+0,53	11,35	+0,15
$\mathfrak{P}^{III}$	11,44	+0,22	11,51	−0,00	11,84	+0,13	11,37	+0,13
$\mathfrak{B}^{III}$	12,39	−0,73	10,46	+1,05	13,30	−1,33	11,58	−0,08
$\mathfrak{P}^{IV}$	12,21	−0,55	11,93	−0,42	12,38	−0,41	11,78	−0,28
$\lambda =$	$0^h\,37^m\,11^s,66$		$0^h\,37^m\,11^s,51$		$0^h\,37^m\,11^s,97$		$0^h\,37^m\,11^s,50$	
$\gamma =$	9,55		7,63		3,89		9,02	

21. Dent 1776.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,12^{s},49$	$+0^{s},25$
$\mathfrak{B}^{I}$	13,39	−0,65
$\mathfrak{P}^{II}$	10,73	+2,01
$\mathfrak{B}^{II}$	12,44	+0,30
$\mathfrak{P}^{III}$	12,63	+0,11
$\mathfrak{B}^{III}$	14,41	−1,67
$\mathfrak{P}^{IV}$	13,21	−0,47

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,12^{s},74$
$\gamma =$ 2,09

22. Dent 1821.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,11^{s},16$	$-0^{s},03$
$\mathfrak{B}^{I}$	12,30	−1,17
$\mathfrak{P}^{II}$	9,18	+1,95
$\mathfrak{B}^{II}$	12,34	−1,21
$\mathfrak{P}^{III}$	12,21	−1,08
$\mathfrak{B}^{III}$	10,32	+0,81
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,25	+0,88

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,11^{s},13$
$\gamma =$ 1,70

23. Dent 1827.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,10^{s},48$	$+0^{s},41$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,47	−0,58
$\mathfrak{P}^{II}$	12,02	−1,13
$\mathfrak{B}^{II}$	10,63	+0,26
$\mathfrak{P}^{III}$	11,13	−0,24
$\mathfrak{B}^{III}$	9,86	+1,03
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,59	+0,30

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,10^{s},89$
$\gamma =$ 5,21

24. Dent 1941.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,11^{s},27$	$+0^{s},07$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,14	+0,20
$\mathfrak{P}^{II}$	11,81	−0,47
$\mathfrak{B}^{II}$	11,50	−0,16
$\mathfrak{P}^{III}$	11,11	+0,23
$\mathfrak{B}^{III}$	11,12	+0,22
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,44	−0,10

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,11^{s},34$
$\gamma =$ 39,14

25. Dent 1808.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,11^{s},36$	$-0^{s},09$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,06	+0,21
$\mathfrak{P}^{II}$	11,98	−0,71
$\mathfrak{B}^{II}$	11,49	−0,22
$\mathfrak{P}^{III}$	11,99	−0,72
$\mathfrak{B}^{III}$	9,69	+1,58
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,16	+0,11

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,11^{s},27$
$\gamma =$ 4,41

26. Dent 1774.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,11^{s},65$	$-0^{s},28$
$\mathfrak{B}^{I}$	12,58	−1,21
$\mathfrak{P}^{II}$	11,57	−0,20
$\mathfrak{B}^{II}$	10,89	+0,48
$\mathfrak{P}^{III}$	11,06	+0,31
$\mathfrak{B}^{III}$	10,96	+0,41
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,89	+0,48

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,11^{s},37$
$\gamma =$ 7,07

27. Dent 1635.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,11^{s},27$	$-1^{s},04$
$\mathfrak{B}^{I}$	10,11	+0,12
$\mathfrak{P}^{II}$	13,12	−2,89
$\mathfrak{B}^{II}$	10,29	−0,06
$\mathfrak{P}^{III}$	10,59	−0,36
$\mathfrak{B}^{III}$	6,02	+4,21
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,12	+0,11

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,10^{s},23$
$\gamma =$ 0,59

28. Dent 1636.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,12^{s},48$	$-0^{s},58$
$\mathfrak{B}^{I}$	12,73	−0,83
$\mathfrak{P}^{II}$	10,04	+1,86
$\mathfrak{B}^{II}$	11,57	+0,33
$\mathfrak{P}^{III}$	12,52	−0,62
$\mathfrak{B}^{III}$	12,26	−0,36
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,59	+0,31

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,11^{s},90$
$\gamma =$ 3,01

29. Dent 1637.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,12^{s},09$	$-1^{s},64$
$\mathfrak{B}^{I}$	12,06	−1,61
$\mathfrak{P}^{II}$	11,28	−0,83
$\mathfrak{B}^{II}$	11,35	−0,90
$\mathfrak{P}^{III}$	10,71	−0,26
$\mathfrak{B}^{III}$	7,45	+3,00
$\mathfrak{P}^{IV}$	7,95	+2,50

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,10^{s},45$
$\gamma =$ 0,73

30. Dent 1794.

Voyages.	Longitudes.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,11^{s},07$
$\mathfrak{B}^{I}$	23,84
$\mathfrak{P}^{II}$	17,83
$\mathfrak{B}^{II}$	29,51
$\mathfrak{P}^{III}$	35,21
$\mathfrak{B}^{III}$	2,92
$\mathfrak{P}^{IV}$	8,63

31. Dent 1901.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,10^{s},99$	$+0^{s},47$
$\mathfrak{B}^{I}$	10,62	+0,84
$\mathfrak{P}^{II}$	11,30	+0,16
$\mathfrak{B}^{II}$	11,46	0,00
$\mathfrak{P}^{III}$	11,66	−0,20
$\mathfrak{B}^{III}$	12,29	−0,83
$\mathfrak{P}^{IV}$	12,00	−0,54

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,11^{s},46$
$\gamma =$ 8,20

32. Dent 1910.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,9^{s},60$	$+0^{s},61$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,68	−1,47
$\mathfrak{P}^{II}$	12,83	−2,62
$\mathfrak{B}^{II}$	11,54	−1,33
$\mathfrak{P}^{III}$	10,42	−0,21
$\mathfrak{B}^{III}$	5,28	+4,93
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,10	+0,11

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,10^{s},21$
$\gamma =$ 0,45

33. Dent 1913.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,11^{s},00$	$+0^{s},65$
$\mathfrak{B}^{I}$	10,88	+0,77
$\mathfrak{P}^{II}$	10,92	+0,73
$\mathfrak{B}^{II}$	11,43	+0,22
$\mathfrak{P}^{III}$	12,41	−0,76
$\mathfrak{B}^{III}$	12,65	−1,00
$\mathfrak{P}^{IV}$	12,22	−0,57

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,11^{s},65$
$\gamma =$ 5,01

34. Dent 1978.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,11^{s},05$	$-0^{s},28$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,17	−0,40
$\mathfrak{P}^{II}$	12,16	−1,39
$\mathfrak{B}^{II}$	11,71	−0,94
$\mathfrak{P}^{III}$	10,63	+0,14
$\mathfrak{B}^{III}$	9,02	+1,75
$\mathfrak{P}^{IV}$	9,58	+1,19

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,10^{s},77$
$\gamma =$ 2,13

35. Dent 1979.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,13^{s},53$	$+0^{s},04$
$\mathfrak{B}^{I}$	14,91	−1,34
$\mathfrak{P}^{II}$	9,26	+4,31
$\mathfrak{B}^{II}$	13,23	+0,34
$\mathfrak{P}^{III}$	14,60	−1,03
$\mathfrak{B}^{III}$	17,95	−4,38
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,53	+2,04

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,13^{s},57$
$\gamma =$ 0,36

36. Dent 1983.

Voyages.	Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^{h}\,37^{m}\,12^{s},12$	$-1^{s},98$
$\mathfrak{B}^{I}$	13,24	−3,10
$\mathfrak{P}^{II}$	9,15	+0,99
$\mathfrak{B}^{II}$	9,74	+0,40
$\mathfrak{P}^{III}$	8,90	+1,24
$\mathfrak{B}^{III}$	8,77	+1,37
$\mathfrak{P}^{IV}$	9,15	+0,99

$\lambda = 0^{h}\,37^{m}\,10^{s},14$
$\gamma =$ 0,83

Voyages.	37. Dent 1985 Longitudes.	v.	38. Dent 1986. Longitudes.	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\ 37^m\ 12^s,36$	$-0^s,60$	$0^h\ 37^m\ 12^s,24$	$-1^s,93$
$\mathfrak{M}^{I}$	13,41	− 1,65	12,49	− 2,18
$\mathfrak{P}^{II}$	10,41	+ 1,35	12,32	− 2,01
$\mathfrak{M}^{II}$	11,26	+ 0,50	11,13	− 0,82
$\mathfrak{P}^{III}$	11,57	+ 0,19	9,42	+ 0,89
$\mathfrak{M}^{III}$	12,28	− 0,52	3,86	+ 6,45
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,05	+ 0,71	10,66	− 0,35
$\lambda =$	$0^h\ 37^m\ 11^s,76$		$0^h\ 37^m\ 10^s,31$	
$\gamma =$	2,71		0,29	

La moyenne obtenue par le concours de 36 chronomètres, eu égard à leur poids relatif, est:

$$A = 0^h\ 37^m\ 11^s,460$$

avec le poids $\Gamma = 452,1$

§ 14. Première évaluation de la longitude de Valdai.

Les longitudes des stations intermédiaires, Valdai et Vilkomir, devaient être chronométriquement interpolées entre celles des points principaux Poulkova, Moscou et Varsovie. Or, en supposant que la différence en longitude entre les points principaux, soit déterminée avec une exactitude absolue, chaque voyage entre deux de ces points, dans lequel les chronomètres avaient été comparés à la station intermédiaire, devait fournir une détermination indépendante de la longitude de ce dernier point. C'est ainsi que les voyages de Moscou et retour nous offrent 8 déterminations de la longitude de Valdai; et le même nombre de déterminations résulte, pour Vilkomir, de l'expédition de Varsovie.

Le calcul de l'interpolation chronométrique des longitudes se fait simplement, en réduisant, à l'aide de la longitude connue du second point principal, les corrections des chronomètres, déterminées sur ce second point, sur les corrections correspondantes à la longitude du point de sortie, ou vice versa. On procède alors dans le calcul, d'après les méthodes connues, comme si les chronomètres étaient retournés sur le point de sortie.

Dans l'application nous nous sommes servis d'abord, pour Valdai, d'une valeur approximative de la longitude de Moscou. L'erreur dans cette valeur supposée, doit altérer la longitude déduite de Valdai dans chaque voyage, d'une quantité constante pour tous les chronomètres. Cette influence s'exprime par $dl = \frac{\tau}{\tau + \tau'}\, d\lambda$, où $d\lambda$ désigne la correction à ajouter à la longitude supposée de Moscou, τ l'intervalle de temps écoulé entre les comparaisons des chronomètres à Valdai et Poulkova, et τ' l'intervalle entre les comparaisons de Valdai et de Moscou.

Les voyages entre Poulkova, Valdai et Moscou ayant été exécutés toujours à peu près avec la même vitesse, cette correction ne varie guères pour les différents voyages. En effet, en désignant par p^{I}, p^{II}... les voyages qui commencent à Poulkova, et par m^{I}, m^{II}... ceux dans lesquels Moscou était le point de sortie, nous avons les durées suivantes τ, τ' du transport du temps, exprimées en heures:

Voyage.	τ.	τ′.
	h	h
p^{I}	34,4	37,1
m^{I}	32,6	40,6
p^{II}	40,6	40,6
m^{II}	33,6	44,1
p^{III}	32,5	37,2
m^{III}	38,6	40,7
p^{IV}	36,6	42,1
m^{IV}	33,0	37,7

et, par conséquent, les corrections à ajouter aux longitudes calculées de Valdai, comptées de Poulkova,

pour le voyage p^{I}	$dl = +0{,}48\ d\lambda$
m^{I}	$+0{,}45\ d\lambda$
p^{II}	$+0{,}50\ d\lambda$
m^{II}	$+0{,}44\ d\lambda$
p^{III}	$+0{,}47\ d\lambda$
m^{III}	$+0{,}49\ d\lambda$
p^{IV}	$+0{,}47\ d\lambda$
m^{IV}	$+0{,}47\ d\lambda$

Il s'en suit que, dès que la longitude employée de Moscou a été exacte en dedans d'une seconde en temps, les corrections à ajouter aux longitudes de Valdai, déterminées par les différents voyages, ne varieront entre elles que dans les centièmes de seconde.

Les poids relatifs des longitudes obtenues par les différents voyages, calculés d'après la formule $g' = \frac{k'}{T\sqrt{\tau\tau'}}$, varient assez considérablement entre eux. En assignant l'unité du poids à un voyage dans lequel $\tau = \tau' = 37{,}5$ heures et $\rho = 0$, et eu égard à ce que, dans le premier voyage, les chronomètres se sont arrêtés à Valdai pendant 4 heures, nous trouvons les poids suivants des différents voyages:

pour p^{I}	$g' = 1{,}04$
m^{I}	1,06
p^{II}	0,85
m^{II}	0,94
p^{III}	1,15
m^{III}	0,89
p^{IV}	0,90
m^{IV}	1,13

Malgré la diversité de ces g', nous avons cru devoir attribuer le même poids à toutes les déterminations de la longitude de Valdai, obtenues par les différents voyages. On verra plus tard qu'à cause de la brièveté des durées du transport du temps et de la haute qualité des chronomètres employés, l'exactitude du transport du temps est, pour Valdai, égale ou même supérieure à celle de la détermination absolue du temps. Toutes les déterminations du temps, faites à Valdai, peuvent être supposées également sûres. Voilà pourquoi nous avons pris, pour chaque chronomètre, la moyenne arithmétique des longitudes fournies dans les différents voyages.

Les poids à assigner aux longitudes obtenues par les différents chronomètres, se déduisent des différences entre les déterminations isolées et leurs moyennes respectives. Ces différences augmenteront en général avec la durée du transport du temps. Par conséquent les poids des chronomètres se déduiront beaucoup plus exactement des déterminations de la longitude de Moscou, que de celles de Valdai, et seront, en même temps, moins influencées par les erreurs accidentelles dans les déterminations du temps. Donc, il sera plus juste de se servir, pour Valdai, des poids des chronomètres déduits, à la même époque, des longitudes de Moscou, que de ceux que nous auraient fournis les longitudes de Valdai.

Le tableau suivant donne les longitudes du lieu d'observation à Valdai, par rapport à Poulkova, telles qu'elles sont calculées directement, en y ayant employé la valeur approximative de la longitude de Moscou $= 0^h\ 28^m\ 58^s{,}20$ à l'Est de Poulkova. Les λ sont les moyennes arithmétiques des longitudes trouvées par chaque chronomètre.

Tableau des longitudes de Valdai, déterminées par 28 chronomètres.

	1. Kessels 1290.	2. Dent 1747.	3. Hauth 30.	4. Hauth 32.	5. Kessels 1276.	6. Hauth 52.	7. Hauth 18.
p^{I}	$0^h\ 11^m\ 40^s{,}97$	$41^s{,}74$	$40^s{,}22$	$41^s{,}17$	$42^s{,}56$	$41^s{,}24$	$41^s{,}19$
m^{I}	41,84	41,44	42,91	41,65	41,73	43,52	41,79
p^{II}	40,53	41,18	42,46	41,81	42,47	43,69	41,44
m^{II}	42,16	42,04	41,41	41,44	41,01	41,69	41,94
p^{III}	41,37	41,71	42,40	41,97	41,52	43,40	41,44
m^{III}	41,32	42,28	38,72	40,70	39,91	39,70	41,84
p^{IV}	41,48	41,59	43,16	42,31	42,53	43,65	42,29
m^{IV}	41,62	41,77	40,27	40,47	40,22	39,91	41,28
$\lambda =$	0 11 41,41	41,72	41,44	41,44	41,49.	42,10	41,65

	8. Hauth 11.	9. Hauth 31.	10. Dent 1778.	11. Dent 1613.	12. Dent 1630.	13. Arn. et D. 951	14. Dent 1687.
p^{I}	$0^h\ 11^m\ 41^s{,}54$	$40^s{,}73$	$42^s{,}03$	$41^s{,}13$	$41^s{,}74$	$0^h\ 11^m\ 16^s{,}40$	$41^s{,}92$
m^{I}	40,29	42,22	42,37	41,61	41,79	11 9,18	42,47
p^{II}	39,30	41,63	42,20	41,08	41,57	10 51,14	42,30
m^{II}	42,73	41,66	41,19	42,37	41,75	12 8,93	41,59
p^{III}	40,92	41,79	42,00	41,95	41,94	11 30,84	42,09
m^{III}	42,30	41,78	40,80	41,27	40,53	11 46,77	41,34
p^{IV}	40,12	41,79	42,62	41,50	41,73	11 20,20	42,13
m^{IV}	43,48	41,26		42,22	40,92	12 11,09	41,04
$\lambda =$	0 11 41,34	41,61	41,89	41,64	41,50	11 31,82	41,86

	15. Dent 1730.	16. Dent 1739.	17. Dent 1807.	18. Dent 1799.	19. Dent 1798.	20. Dent 1789.	21. Dent 1787.
p^{I}	$0^h\ 11^m\ 42^s,41$	$42^s,03$	$41^s,54$	$41^s,39$	$41^s,70$	$41^s,44$	$41^s,30$
m^{I}	42,23	41,84	41,73	41,74	42,23	41,59	41,84
p^{II}	41,99	42,42	41,88	41,48	42,19	41,46	41,71
m^{II}	41,51	41,39	42,07	42,24	41,48	41,90	41,93
p^{III}	41,86	42,32	41,82	42,00	41,67	42,12	42,15
m^{III}	40,85	40,64	40,74	40,94	40,47	41,01	41,08
p^{IV}	42,09	41,94	41,76	41,69	42,18	41,92	41,92
m^{IV}	41,15	41,29	41,74	41,63	41,34	41,63	41,42
$\lambda =$	0 11 41,75	41,75	41,66	41,64	41,66	41,63	41,67

	22. Dent 1776.	23. Dent 1821.	24. Dent 1827.	25. Dent 1941.	26. Dent 1808.	27. Dent 1774.	28. Kessels 1297.
p^{I}	$0^h\ 11^m\ 41^s,28$	$41^s,63$	$41^s,86$	$41^s,73$	$41^s,35$	$41^s,88$	
m^{I}	40,99	41,30	42,26	41,83	42,58	42,01	
p^{II}	41,12	41,85	41,99	41,87	41,71	41,75	$42^s,20$
m^{II}	42,12	41,72	40,45	41,60	42,26	41,66	41,64
p^{III}	42,00	42,75	41,62	41,68	41,53	41,85	42,63
m^{III}	40,52	41,13	41,67	41,55	39,33	42,01	40,99
p^{IV}	41,25	41,98	42,25	41,93	43,54	41,72	42,15
m^{IV}	42,04	41,68	41,36	41,54	41,08	41,43	41,74
$\lambda =$	0 11 41,42	41,75	41,68	41,72	41,67	41,79	41,89

En employant les poids des chronomètres tels qu'ils furent déduits des longitudes de Moscou, et en rejetant, dans la moyenne, comme pour Moscou, les deux chronomètres Arnold et Dent 951 et Dent 1808, nous avons pour Valdai, par 26 chronomètres, $\varDelta = 0^h\ 11^m 41^s,698$.

L'accord admirable des λ obtenus par les différents chronomètres, indique que, dans ce cas, nous sommes presque indépendants de leurs poids relatifs. Réellement la simple moyenne arithmétique des 26 λ nous donne $\varDelta = 0^h\ 11^m\ 41^s,657$, quantité qui ne diffère que de $0^s,041$ de la valeur précédente, déduite à l'aide des poids relatifs des chronomètres.

§ 15. Première évaluation de la longitude de Vilkomir.

Tout ce que nous avons dit, dans le paragraphe précédent, par rapport à la déduction de la longitude de Valdai, s'applique également à celle de Vilkomir, à la seule exception près qu'il faut remplacer partout Moscou par Varsovie. Ici les poids des différents voyages ne different pas autant entre eux, que pour Valdai. Nous avons:

	τ	τ'	$\mathfrak{g}'$
	h	h	
$\mathfrak{p}^{I}$	65,3	52,7	0,98
$\mathfrak{v}^{I}$	59,4	55,6	0,98
$\mathfrak{p}^{II}$	68,9	52,3	0,93
$\mathfrak{v}^{II}$	71,2	48,5	0,96
$\mathfrak{p}^{III}$	65,9	49,6	1,03
$\mathfrak{v}^{III}$	63,5	47,8	1,11
$\mathfrak{p}^{IV}$	73,6	50,1	0,90
$\mathfrak{v}^{IV}$	68,0	53,5	0,92

Dans le calcul des poids nous avons supposé l'unité des poids, pour un voyage dans lequel $\tau = 67^h$; $\tau' = 50^h$, $\rho = 0$, et par conséquent $T = 117^h$. Nous avons pris en considération que, dans le voyage $\mathfrak{v}^{I}$, les chronomètres étaient restés à Vilkomir pendant 5,5 heures.

Les corrections dl de la longitude de Vilkomir, dues à une correction $d\lambda$ de la longitude approximative de Varsovie, employée dans les premiers calculs, se présentent ici

$$\begin{array}{lll} \text{pour } \mathfrak{p}^{I} & dl = & +0{,}55\, d\lambda \\ \mathfrak{v}^{I} & & 0{,}52\, d\lambda \\ \mathfrak{p}^{II} & & 0{,}57\, d\lambda \\ \mathfrak{v}^{II} & & 0{,}59\, d\lambda \\ \mathfrak{p}^{III} & & 0{,}57\, d\lambda \\ \mathfrak{v}^{III} & & 0{,}57\, d\lambda \\ \mathfrak{v}^{IV} & & 0{,}60\, d\lambda \\ \mathfrak{p}^{IV} & & 0{,}56\, d\lambda \end{array}$$

La valeur de la longitude de Varsovie, employée dans le calcul des longitudes données dans le tableau suivant, a été $0^h\ 37^m\ 11^s{,}34$ à l'Ouest de Poulkova.

Tableau des longitudes de Vilkomir, obtenues à l'aide de 26 chronomètres.

	1. Kessels 1290.	2. Dent 1747.	3. Hauth 30.	4. Hauth 32.	5. Kessels 1276.	6. Hauth 52.	7. Hauth 18.
	h m s	s	s	s	s	s	s
$\mathfrak{p}^{I}$	0 22 14,26	14,42	14,88	15,70	14,68	14,37	13,87
$\mathfrak{v}^{I}$	14,98	14,20	14,86	14,85	13,91	14,45	15,27
$\mathfrak{p}^{II}$	14,02	13,56	13,63	14,23	13,66	15,01	12,50
$\mathfrak{v}^{II}$		13,86	14,43	13,97	16,05	13,36	13,74
$\mathfrak{p}^{III}$	14,18	13,84	14,65	13,90	14,74	15,12	13,36
$\mathfrak{v}^{III}$	14,10	13,96	13,52	13,46	13,83	12,57	13,88
$\mathfrak{p}^{IV}$	13,95	13,96	16,62	14,76	13,59	16,32	13,69
$\mathfrak{v}^{IV}$	13,12	13,76	12,77	13,30	13,44	10,78	14,19
$\lambda =$	0 22 14,09	13,94	14,42	14,27	14,24	14,00	13,81

	8. Hauth 26.	9. Hauth 31.	10. Dent 1630.	11. Dent 1613.	12. Arn. et D. 951	13. Dent 1687.	14. Dent 1730.
$\mathfrak{p}^{I}$	$0^h\ 22^m\ 13^s,83$	$14^s,70$	$14^s,23$	$15^s,06$	$0^h\ 22^m\ 40^s,54$	$13^s,96$	$13^s,90$
$\mathfrak{v}^{I}$	14,07	14,70	15,16	14,01	22 17,61	14,70	14,01
$\mathfrak{p}^{II}$	14,03	12,51	13,68	13,98	21 56,91	13,66	13,41
$\mathfrak{v}^{II}$	14,43	13,75	13,88	12,39	21 58,97	13,67	13,77
$\mathfrak{p}^{III}$	14,47	14,07	13,76	14,56	22 15,53	14,60	14,12
$\mathfrak{v}^{III}$	13,92	13,86	13,95	13,62	22 31,87	13,19	13,41
$\mathfrak{p}^{IV}$	13,85	14,12	14,24	14,79	22 23,24	14,22	15,16
$\mathfrak{v}^{IV}$	14,20	13,28	12,84	12,32	22 18,62	13,01	12,19
$\lambda =$	0 22 14,10	13,87	13,97	13,84	22 17,91	13,88	13,75

	15. Dent 1739.	16. Dent 1807.	17. Dent 1799.	18. Dent 1798.	19. Dent 1789.	20. Dent 1787.	21. Dent 1776.
$\mathfrak{p}^{I}$	$0^h\ 22^m\ 14^s,47$	$14^s,51$	$14^s,57$	$14^s,62$	$14^s,05$	$13^s,96$	$15^s,52$
$\mathfrak{v}^{I}$	13,75	14,04	14,08	13,66	14,15	14,62	13,86
$\mathfrak{p}^{II}$	14,40	14,39	14,12	14,28	13,82	13,17	14,51
$\mathfrak{v}^{II}$	13,17	13,07	13,02	13,60	13,67	13,43	13,08
$\mathfrak{p}^{III}$	13,82	14,19	14,48	14,29	14,51	14,25	14,16
$\mathfrak{v}^{III}$	13,52	13,26	13,51	13,36	13,87	13,61	13,81
$\mathfrak{p}^{IV}$	14,59	15,07	14,99	15,16	14,82	14,99	15,67
$\mathfrak{v}^{IV}$	12,95	12,82	12,65	12,54	12,69	12,73	12,51
$\lambda =$	0 22 13,83	13,92	13,93	13,94	13,95	13,84	14,14

	22. Dent 1821.	23. Dent 1827.	24. Dent 1941.	25. Dent 1808.	26. Dent 1774.
$\mathfrak{p}^{I}$	$0^h\ 22^m\ 14^s,21$	14,21	$14^s,08$	$14^s,24$	$14^s,20$
$\mathfrak{v}^{I}$	14,73	13,96	14,15	14,26	14,09
$\mathfrak{p}^{II}$	13,64	13,79	13,85	13,50	13,56
$\mathfrak{v}^{II}$	13,41	14,08	13,97	13,30	13,66
$\mathfrak{p}^{III}$	13,88	13,93	13,95	14,82	14,09
$\mathfrak{v}^{III}$	14,16	13,24	13,71	14,01	13,71
$\mathfrak{p}^{IV}$	14,27	14,40	14,23	14,10	14,20
$\mathfrak{v}^{IV}$	13,13	13,43	13,97	13,74	13,80
$\lambda =$	0 22 13,93	13,88	13,99	14,00	13,91

En employant les poids des chronomètres, tels qu'ils furent déduits de l'accord des longitudes de Varsovie, nous avons la longitude de Vilkomir, par 25 chronomètres, $\varLambda = 0^h 22^m 13^s,954$ à l'Ouest de Poulkova. La moyenne arithmétique aurait donné $\varLambda = 0^h\ 22^m\ 13^s,978$.

IV. DÉDUCTION DÉFINITIVE DES RÉSULTATS DES DEUX EXPÉDITIONS.

§ 16. Recherches sur la compensation des chronomètres.

En général la compensation d'un bon chronomètre peut être supposée exacte à un centième près de sa valeur totale c. à d. l'effet produit par la température sur la marche d'un bon chronomètre, est environ un centième de celui qui se serait manifesté si la balance n'avait pas été compensée. Nous voyons, dans le tableau précédent des longitudes de Varsovie, que notre chronomètre non-compensé, Arnold et Dent 951, avait donné, pendant le voyage $\mathfrak{W}^{III}$, la longitude qui s'écarte le plus de la moyenne obtenue par tous les chronomètres compensés,

savoir de 203^s. Par conséquent il fallait s'attendre à voir, pour ce voyage, dans les résultats fournis par les autres chronomètres, des différences de $\pm 2^s$ environ. L'inspection superficielle de notre tableau montre que les oscillations des longitudes sont les plus fortes précisément dans ce voyage, et qu'elles s'élèvent en moyenne à la quantité indiquée de 2^s, pour une longitude isolée. En examinant le tableau des longitudes de Varsovie de plus près, on remarque encore que, dans la majeure partie des chronomètres, les longitudes données par les voyages $\mathfrak{P}^{II}$ et $\mathfrak{W}^{III}$ diffèrent dans un sens opposé de la longitude moyenne. Le chronomètre non-compensé ayant indiqué également, pour les mêmes deux voyages, des différences très fortes dans un sens opposé, nous parvenons à la conclusion que l'effet de la température s'est distinctement prononcé dans les longitudes fournies par les autres chronomètres. Il était donc d'urgence d'examiner de combien la température a pu agir sur les résultats, et d'en éliminer l'influence autant que possible.

En soustrayant des longitudes données dans chaque voyage isolé, par le chronomètre non-compensé, Arnold et Dent 951, les longitudes moyennes de chaque lieu, fournies par le concours de tous les chronomètres, nous avons les quantités x, par lesquelles les coefficients de compensation μ des autres chronomètres doivent être multipliés, afin de donner les corrections thermométriques à ajouter aux longitudes isolées. Par ce procédé nous obtenons les longitudes telles qu'elles auraient été trouvées dans chaque voyage, si la température avait été constante pendant tout le voyage, ou plutôt si la somme des températures qui ont agi sur les chronomètres en allant, avait été égale à la somme des températures pendant le voyage de retour. Dans ce raisonnement, il a été supposé que l'effet de la température, sur la marche des chronomètres compensés, reste, pour toutes les températures, dans une proportion constante à l'effet qu'elle produit sur la marche du chronomètre non-compensé. Nous avons:

pour la longitude de Moscou

Voyage.	P^{I}	$x = -13^s,2$
	M^{I}	$+98,3$
	P^{II}	$+27,3$
	M^{II}	$+5,6$
	P^{III}	$+87,5$
	M^{III}	$+49,3$
	P^{IV}	$+16,7$

pour la longitude de Varsovie

Voyage.	$\mathfrak{P}^{I}$	$x = +54^s,7$
	$\mathfrak{W}^{I}$	$+64,4$
	$\mathfrak{P}^{II}$	$-99,0$
	$\mathfrak{W}^{II}$	$+55,4$
	$\mathfrak{P}^{III}$	$+89,3$
	$\mathfrak{W}^{III}$	$+203,3$
	$\mathfrak{P}^{IV}$	$+47,1$

pour la longitude de Valdai

Voyage.	p^{I}	$x = -25^s,3$
	m^{I}	$-32,5$
	p^{II}	$-50,6$
	m^{II}	$+27,2$
	p^{III}	$-10,9$
	m^{III}	$+5,1$
	p^{IV}	$-21,5$
	m^{IV}	$+29,4$

pour la longitude de Vilkomir

Voyage.	$\mathfrak{p}^{I}$	$x = +26^s,5$
	$\mathfrak{w}^{I}$	$+3,6$
	$\mathfrak{p}^{II}$	$-17,1$
	$\mathfrak{w}^{II}$	$-15,0$
	$\mathfrak{p}^{III}$	$+1,5$
	$\mathfrak{w}^{III}$	$+17,9$
	$\mathfrak{p}^{IV}$	$+9,2$
	$\mathfrak{w}^{IV}$	$+4,6$

Les x étant ainsi donnés, il ne restait qu'à déterminer, pour chaque chronomètre employé, le coefficient de compensation μ par rapport au chronomètre non-compensé, afin de pouvoir appliquer aux longitudes isolées, les corrections thermométriques $= - x\mu$. Il parut d'abord le plus avantageux, de déterminer les coefficients de compensation, par des expériences directes faites en différentes températures. Dans ce but, M. Döllen exécuta, pendant l'hiver qui suivait nos voyages, une longue série de comparaisons entre la pendule normale de l'Observatoire et les chronomètres employés, en variant alternativement la température dans laquelle se mouvaient les chronomètres, de zéro jusqu'à $+35°$ R. Les chronomètres restaient exposés chaque fois à une de ces températures extrêmes pendant une semaine entière, et un jour fut employé pour produire le passage de la température, d'une extrémité à l'autre. Ces expériences étant continuées sans interruption pendant quatre mois, durant lesquels les chronomètres s'étaient trouvés 7 fois dans la température élevée et 8 fois dans une température voisine de zéro, il y avait lieu d'espérer qu'elles offriraient des résultats d'une haute exactitude. Cet espoir ne se réalisa pas, car un calcul soigneux de ces comparaisons nous montra, que les résultats à en déduire étaient exposés à des objections très graves. Il fut reconnu que, pour la majeure partie des chronomètres, la marche devenait irrégulière, dès que la température s'abaissait au dessous de $+5°$ R. Des irrégularités analogues se manifestaient également, mais à un plus faible degré, dans les températures extrêmes supérieures au délà de $+25°$ R. Il y a lieu de supposer que, dans ces températures extrêmes, l'huile qui se trouve sur les pivots des chronomètres subit des changements dans son état de cohésion, qui produisent de si fortes anomalies dans la marche, qu'elles cachent entièrement l'effet de la température.

Par ces raisons, les résultats des expériences faites pendant l'hiver 1845 à 1846 nous parurent très douteux, et en effet les corrections thermométriques déduites de ces expériences et appliquées aux longitudes données dans les tableaux précédents, pour Moscou et Varsovie, n'augmentaient que très peu l'accord des différentes déterminations.

Pour approfondir la question, nous nous décidâmes à répéter les expériences, en évitant les températures extrêmes. M. Döllen s'en chargea de nouveau pendant l'hiver 1846 à 1847, et en effet il obtint, dans cette seconde recherche, des résultats considérablement différents de ceux de la première série d'observations. Malheureusement, dans l'intervalle entre les deux séries d'expériences, un grand nombre de chronomètres employés pendant nos expéditions de 1845, avaient déjà quitté l'Observatoire. Par cette raison, les résultats des recherches du second hiver ne pouvaient trouver application que pour un petit nombre de chronomètres, et ce nombre ne suffisait pas pour décider, si réellement l'accord des longitudes avait subi un changement favorable. Il est vrai que, pour plusieurs chronomètres, cet accord avait augmenté considérablement, après l'application des corrections thermométriques déduites des expériences de la seconde année, mais il y avait aussi d'autres chronomètres, pour lesquels l'accord fut essentiellement troublé par ces corrections. La seconde série d'expériences n'étant plus sujette aux objections à faire à la première, il faut supposer que, dans les chronomètres pour lesquels les corrections thermométriques avaient troublé l'accord des longitudes, le degré de compensation avait consi-

dérablement changé, dans l'intervalle d'un an et demi, écoulé entre nos voyages et les expériences. Un tel changement successif, dans l'état de compensation des chronomètres, a déjà été remarqué par plusieurs artistes, et M. Dent possède un grand nombre d'expériences sur ce phénomène, qui lui ont prouvé qu'en général la compensation des chronomètres diminue avec le temps, au moins pour les chronomètres qui n'ont pas encore été long temps en usage. Par cette raison cet artiste éminent, à ce que je sais par ses communications orales, a l'habitude de donner à tous les nouveaux chronomètres qu'il confectionne, au commencement une compensation un peu trop forte, de sorte qu'ils montrent une compensation très exacte à l'époque où ils entrent en usage.

Les expériences mentionnées quoqu'elles n'eussent point donné des résultats satisfaisants, dans le but pour lequel elles avaient été exécutées, nous ont été d'une grande utilité dans les recherches postérieures sur la compensation des chronomètres, en ce qu'elles nous apprirent nombre de petites règles à suivre dans les expériences et dans l'usage des chronomètres, afin d'obtenir des résultats qui fussent à l'abri de toute objection. Nous pouvons anticiper ici que, dans plusieurs voyages chronométriques exécutés après 1846, la compensation déterminée par les expériences directes, a produit un accord admirable, soit dans les longitudes données par différents chronomètres, soit dans les déterminations répétées de la longitude d'un même point.

En abandonnant, par les raisons indiquées, l'espoir de pouvoir corriger les longitudes déterminées en 1845, à l'aide de coefficients de compensation déterminés par nos expériences directes, il fallait tâcher de les évaluer des données que nous fournissaient nos voyages eux-mêmes.

En comparant une longitude isolée $= l$, donnée par un chronomètre quelconque, avec la longitude du même lieu $= \Lambda$, trouvée par le concours de tous les chronomètres, la différence $l - \Lambda$ divisée par la différence analogue $\varkappa$, trouvée dans le même voyage, par le chronomètre sans compensation, nous fournit une valeur du coefficient cherché de compensation. Nous avons donc, pour chaque chronomètre, autant d'équations de la forme $\varkappa\mu = l - \Lambda$, pour la détermination du coefficient de compensation, qu'il y a de différentes déterminations de longitude, fournies par le chronomètre en recherche, et dont la quantité inconnue μ doit être déduite par la méthode des moindres carrés. Dans ce procédé, il est supposé que la valeur de Λ soit déjà si exactement connue, que son incertitude fût une quantité négligeable vis à vis des effets de la température et des erreurs que produisent, dans les longitudes, les inégalités accidentelles dans les marches des chronomètres. Cette supposition paraît parfaitement justifiée pour nos expéditions de 1845, où les Λ sont fournis par 7 voyages de 40 chronomètres, en majeure partie de haute qualité. Peut-être nos Λ peuvent être incertains de quelques centièmes de seconde, mais ces quantités sont entièrement évanouissantes en comparaison avec les erreurs de secondes entières, auxquelles les longitudes isolées seront sujettes par l'effet combiné du défaut dans les compensations et des irrégularités accidentelles dans les marches des chronomètres.

En traitant les équations $\varkappa\mu = l - \Lambda$ d'après la méthode des moindres carrés, il fallait leur attribuer les poids relatifs g', tels qu'ils sont déduits des durées des voyages (pag. 84 et 88).

Ces poids étant les plus grands pour les voyages de la plus courte durée, il pourrait paraître que les longitudes de Valdai et de Vilkomir devaient fournir les plus exactes valeurs des coefficients de compensation. Mais d'un côté, à ce qu'on voit de la liste des x donnée précédemment (pag. 97), les effets thermométriques ont été en général beaucoup plus petits dans ces longitudes, que dans celles de Moscou et de Varsovie, de l'autre côté les erreurs à craindre dans les déterminations du temps, sur les stations intermédiaires, pouvaient être du même ordre que l'effet thermométrique. Cette dernière objection s'applique principalement aux longitudes de Vilkomir, où l'inconstance dans la manière d'observer de la part de M. Alexandrov, a dû produire des différences qui pouvaient cacher entièrement les effets produits par les inégalités des températures. Par ces raisons, j'ai cru devoir baser la recherche des coefficients de compensation uniquement sur les longitudes de Moscou et de Varsovie, en réservant celles de Valdai à une espèce de contrôle de l'exactitude des coefficients déduits.

Prenons pour exemple le chronomètre Dent 1747. Ce chronomètre nous a donné:

Voyage.	*pour Moscou*	Poids du voyage.	Voyage.	*pour Varsovie*	Poids du voyage.
P^{I}	$l = 0^h 28^m 58^s,39$	1,05	$\mathfrak{P}^{I}$	$l = 0^h 37\ 12^s,32$	0,41
M^{I}	59,55	0,90	$\mathfrak{M}^{I}$	11,90	0,36
P^{II}	58,63	0,98	$\mathfrak{P}^{II}$	10,78	0,38
M^{II}	58,58	1,06	$\mathfrak{M}^{II}$	11,92	0,38
P^{III}	59,13	1,07	$\mathfrak{P}^{III}$	11,22	0,43
M^{III}	58,46	0,81	$\mathfrak{M}^{III}$	12,42	0,37
P^{IV}	58,88	1,09	$\mathfrak{P}^{IV}$	11,35	0,37

En prenant les différences entre ces l et les $\varDelta$ fournis en moyenne par tous les chronomètres, et qui sont pour Moscou $= 0^h 28^m 58^s,40$ (pag. 87), pour Varsovie $= 0^h 37^m 11^s,46$, (pag. 91), nous avons les 14 équations suivantes:

par P^{I}	$-13^s,2\,\mu = -0^s,01$	par $\mathfrak{P}^{I}$	$+54^s,7\,\mu = +0^s,86$
M^{I}	$+98,3\,\mu = +1,15$	$\mathfrak{M}^{I}$	$+64,4\,\mu = +0,44$
P^{II}	$+27,3\,\mu = +0,23$	$\mathfrak{P}^{II}$	$-99,0\,\mu = -0,68$
M^{II}	$+5,6\,\mu = +0,18$	$\mathfrak{M}^{II}$	$+55,4\,\mu = +0,46$
P^{III}	$+87,5\,\mu = +0,73$	$\mathfrak{P}^{III}$	$+89,3\,\mu = -0,24$
M^{III}	$+49,3\,\mu = +0,06$	$\mathfrak{M}^{III}$	$+203,3\,\mu = +0,96$
P^{IV}	$+16,7\,\mu = +0,48$	$\mathfrak{P}^{IV}$	$+47,1\,\mu = -0,11$

En résolvant ces équations, avec les poids donnés par les voyages, d'après la méthode des moindres carrés, nous trouvons, pour ce chronomètre, $\mu = +0,00673$. Cette valeur substituée dans les équations précédentes, y laisse les erreurs suivantes v.

pour P^{I}	$v = +0^s,08$	pour $\mathfrak{P}^{I}$	$v = +0^s,19$
M^{I}	+0,49	$\mathfrak{M}^{I}$	+0,01
P^{II}	+0,05	$\mathfrak{P}^{II}$	−0,01
M^{II}	+0,14	$\mathfrak{M}^{II}$	+0,09
P^{III}	+0,14	$\mathfrak{P}^{III}$	−0,84
M^{III}	−0,27	$\mathfrak{M}^{III}$	−0,41
P^{IV}	+0,37	$\mathfrak{P}^{IV}$	−0,43

d'où nous déduisons l'erreur probable de $\mu = 0,00087$.

J'ai traité de la sorte tous les autres chronomètres, en excluant, à côté du chronomètre hebdomadaire dérangé Dent 1794, seulement ceux qui n'avàient été employés que dans une partie des voyages de Moscou, nommément les deux chronomètres Dent 1778 et Kessels 1297, pour lesquels le petit nombre d'équations ne promettait pas de fournir des valeurs exactes du degré de compensation. Pour le chronomètre Dent 1808, dont la marche avait été extraordinairement troublée pendant l'expédition de Moscou, j'ai basé cette recherche, sur les seules longitudes de Varsovie. C'est ainsi que j'ai obtenu la liste suivante des μ et de leurs erreurs probables $= \varepsilon$. J'ai ajouté à cette liste les quantités χ, qui nous donnent la variation de la marche journalière de chaque chronomètre, produite par un changement de $+1°$ R. dans la température, en acceptant, d'après un calcul approximatif, que le même changement de température ralentissait la marche journalière du chronomètre sans compensation de $+13^s,74$.

Chron.	μ	ε	χ
Kessels 1290	+0,01092	0,00116	$+0^s,150$
Dent 1747	+0,00673	087	+0,092
Hauth 30	−0,00708	294	−0,097
« 32	−0,00616	142	−0,085
Kessels 1276	−0,01965	329	−0,270
Hauth 52	−0,02488	269	−0,343
« 18	+0,00922	123	+0,127
« 11	+0,03986	340	+0,548
« 26	−0,00882	300	−0,121
« 31	+0,00165	114	+0,227
Dent 1630	−0,00087	141	−0,012
« 1613	+0,00627	138	+0,086
« 1687	−0,01336	129	−0,184
« 1730	−0,00851	147	−0,117
« 1739	−0,00433	163	−0,060
« 1807	+0,00348	104	+0,048

	Chron.	μ	ε	χ
	Dent 1799	+ 0,00285	0,00068	+ 0,039
	« 1798	— 0,00656	109	— 0,090
	« 1789	+ 0,00812	066	+ 0,112
	« 1787	+ 0,00061	096	+ 0,008
	« 1776	+ 0,01216	142	+ 0,167
	« 1821	+ 0,00448	215	+ 0,062
	« 1827	— 0,00545	110	— 0,075
	« 1941	— 0,00126	045	— 0,017
	« 1808	— 0,00548	095	— 0,075
	« 1774	— 0,00196	059	— 0,027
Chron. hebd.	« 1635	— 0,02166	200	— 0,298
	« 1636	+ 0,00777	156	+ 0,107
	« 1637	— 0,01320	420	— 0,181
	« 1901	+ 0,00207	132	+ 0,028
	« 1910	— 0,02259	313	— 0,310
	« 1913	+ 0,00498	148	+ 0,068
	« 1978	— 0,01048	173	— 0,144
	« 1979	+ 0,03141	231	+ 0,432
	« 1983	— 0,00855	528	— 0,118
	« 1985	+ 0,00583	204	+ 0,080
	« 1986	— 0,02431	492	— 0,334

On voit que, dans cette liste, l'erreur probable surpasse en deux cas la valeur de μ, savoir pour les chronomètres Dent 1630 et Dent 1787, pour lesquels les μ eux mêmes ont été très petits. Elle reste entre 0,5 μ et 1,0 μ pour 3 chronomètres, entre 0,25 μ et 0,5 μ pour 10, entre 0,125 μ et 0,25 μ pour 14, et au dessous de 0,125 μ pour 8 chronomètres. Il s'en suit qu'en moyenne nous pouvons estimer chaque μ exacte à la cinquième partie près de sa valeur. L'effet moyen d'un changement d'un degré dans la température, sur la marche journalière d'un chronomètre de qualité moyenne, se déduit de la liste précédente des $\chi = 0^s,144$.

§ 17. Longitudes corrigées pour l'effet de la température.

A l'aide des μ et des ϰ, donnés dans le paragraphe précédent, j'ai calculé, pour tous les chronomètres, les corrections thermométriques $-\varkappa\mu$ à appliquer aux longitudes isolées. Ces longitudes corrigées (l) se trouvent dans les tableaux suivants. J'y ai ajouté les (λ) (γ) et (v) calculés d'après les mêmes règles, que nous avions suivies antérieurement dans le calcul des quantités analogues λ, γ et v. Pour les deux chronomètres Dent 1778 et Kessels 1297, pour lesquels le coefficient de compensation ne pouvait être déduit assez sûrement de nos voyages,

je l'ai supposé = 0, de sorte que, dans ces deux cas, les tableaux suivants contiennent les mêmes valeurs, que dans la première déduction des longitudes.

Vu que, pendant l'expédition de Moscou, les chronomètres hebdomadaires ne faisaient point partie de l'envoi principal, il nous manque, pour ces chronomètres, la connaissance des valeurs correspondantes de x. Les résultats obtenus, pour Moscou, à l'aide de ces chronomètres ne pouvant être corrigés de l'effet de la température par la voie indiquée, feront l'objet d'une discussion particulière dans un article suivant.

A. *Longitudes de Moscou, corrigées pour l'effet de la température.*

Voyages.	Kessels 1290. (l)	(v)	Dent 1747. (l)	(v)	Hauth 30. (l)	(v)	Hauth 32. (l)	(v)
P^{I}	0h 28m 58s,57	+0s,09	58s,48	+0s,07	57s,71	−0s,06	58s,74	−0s,34
M^{I}	58,38	+0,28	58,89	−0,34	57,85	−0,20	58,95	−0,55
P^{II}	58,88	−0,22	58,45	+0,10	57,75	−0,10	58,43	−0,03
M^{II}	58,74	−0,08	58,54	+0,01	57,59	+0,06	58,53	−0,13
P^{III}	58,88	−0,22	58,54	+0,01	57,20	+0,45	58,16	+0,24
M^{III}	58,71	−0,05	58,13	+0,42	58,78	−1,13	57,40	+1,00
P^{IV}	58,49	+0,17	58,78	−0,23	57,01	+0,64	58,43	−0,03
$(\lambda) =$	0h 28m 58s,66		58s,55		57s,65		58s,40	
$(\gamma) =$	27,46		18,77		3,43		4,67	

Voyages.	Kessels 1276. (l)	(v)	Hauth 52. (l)	(v)	Hauth 18. (l)	(v)	Hauth 11. (l)	(v)
P^{I}	0h 28m 58s,23	+0s,06	57s,50	+0s,51	58s,36	+0s,09	59s,84	−1s,06
M^{I}	59,16	−0,87	58,05	−0,04	58,27	+0,18	58,31	+0,47
P^{II}	58,91	−0,62	58,56	−0,55	58,44	+0,01	58,12	+0,66
M^{II}	58,31	−0,02	58,67	−0,66	58,56	−0,11	59,19	−0,41
P^{III}	57,80	+0,49	58,17	−0,16	58,83	−0,38	58,59	+0,29
M^{III}	57,15	+1,14	56,66	+1,35	58,17	+0,28	58,60	+0,18
P^{IV}	58,29	0,00	58,16	−0,15	58,39	+0,06	58,66	+0,12
$(\lambda) =$	0h 28m 58s,29		58s,01		58s,45		58s,78	
$(\gamma) =$	2,53		2,35		22,02		2,90	

Voyages.	Hauth 31. (l)	(v)	Dent 1778. (l)	(v)	Dent 1613. (l)	(v)	Dent 1630. (l)	(v)
P^{I}	0h 28m 58s,27	+0s,12	59s,17	−0s,71	58s,18	+0s,07	58s,12	+0s,21
M^{I}	58,03	+0,36	58,01	+0,45	58,72	−0,47	58,81	−0,48
P^{II}	59,09	−0,70	58,47	−0,01	58,65	−0,40	58,77	−0,44
M^{II}	58,83	−0,44	58,65	−0,19	58,38	−0,13	58,41	−0,08
P^{III}	58,34	+0,05	57,99	+0,47	58,08	+0,17	57,80	+0,53
M^{III}	57,75	+0,64	58,40	+0,06	57,48	+0,77	57,43	+0,90
P^{IV}	58,27	+0,12			58,18	+0,07	58,87	−0,54
$(\lambda) =$	0h 28m 58s,39		58s,46		58s,25		58s,33	
$(\gamma) =$	5,14		5,06		6,71		3,48	

Voyages.	Dent 1687. (l)	(v)	Dent 1730. (l)	(v)	Dent 1739. (l)	(v)	Dent 1807. (l)	(v)
P^{I}	$0^h 28^m 58^s,54$	$-0^s,03$	$58^s,65$	$+0^s,08$	$58^s,25$	$+0^s,02$	$58^s,24$	$-0^s,02$
M^{I}	59,28	−0,77	58,47	+0,26	57,99	+0,28	57,87	+0,35
P^{II}	58,71	−0,20	59,29	−0,56	58,85	−0,58	58,46	−0,24
M^{II}	58,28	+0,23	58,76	−0,03	58,20	+0,07	58,22	0,00
P^{III}	58,32	+0,19	58,26	+0,47	57,67	+0,60	57,96	+0,26
M^{III}	57,78	+0,73	58,56	+0,17	58,03	+0,24	58,27	−0,05
P^{IV}	58,63	−0,12	58,96	−0,23	58,84	−0,57	58,52	−0,30
$(\lambda) =$	$0^h 28^m 58^s,51$		$58^s,73$		$58^s,27$		$58^s,22$	
$(\gamma) =$	5,38		8,66		5,05		17,68	

Voyages.	Dent 1799. (l)	(v)	Dent 1798. (l)	(v)	Dent 1789. (l)	(v)	Dent 1787. (l)	(v)
P^{I}	$0^h 28^m 58^s,21$	$+0^s,05$	$58^s,47$	$-0^s,19$	$58^s,06$	$+0^s,24$	$58^s,40$	$-0^s,12$
M^{I}	58,28	−0,02	58,14	+0,14	58,42	−0,12	58,38	−0,10
P^{II}	58,11	+0,15	58,73	−0,45	58,12	+0,18	58,37	−0,09
M^{II}	58,14	+0,12	58,10	+0,18	58,19	+0,11	58,17	+0,11
P^{III}	58,21	+0,05	57,73	+0,55	58,35	−0,05	57,95	+0,33
M^{III}	58,22	+0,04	58,08	+0,20	58,31	−0,01	57,86	+0,42
P^{IV}	58,61	+0,35	58,78	−0,50	58,64	−0,34	58,76	+0,48
$(\lambda) =$	$0^h 28^m 58^s,26$		$58^s,28$		$58^s,30$		$58^s,28$	
$(\gamma) =$	33,61		6,54		24,30		10,80	

Voyages.	Dent 1776. (l)	(v)	Dent 1821. (l)	(v)	Dent 1827. (l)	(v)	Dent 1941. (l)	(v)
P^{I}	$0^h 28^m 57^s,77$	$+0^s,44$	$57^s,47$	$+1^s,11$	$59^s,08$	$-0^s,39$	$58^s,43$	$+0^s,07$
M^{I}	57,79	+0,42	58,57	+0,01	59,01	−0,32	58,50	0,00
P^{II}	58,12	+0,09	59,36	−0,78	58,80	−0,11	58,36	+0,14
M^{II}	58,43	−0,22	58,86	−0,28	58,50	+0,19	58,40	+0,10
P^{III}	58,08	+0,13	58,60	−0,02	58,39	+0,30	58,43	+0,07
M^{III}	58,15	+0,06	58,33	+0,25	58,42	+0,27	58,74	−0,24
P^{IV}	59,04	−0,83	58,87	−0,29	58,65	+0,04	58,67	−0,17
$(\lambda) =$	$0^h 28^m 58^s,21$		$58^s,58$		$58^s,69$		$58^s,50$	
$(\gamma) =$	5,03		2,84		13,07		50,64	

Voyages.	Dent 1774. (l)	(v)	Kessels 1297. (l)	(v)
P^{I}	$0^h 28^m 58^s,43$	$-0^s,04$		
M^{I}	58,26	+0,13		
P^{II}	58,44	−0,05	$58^s,81$	$-0^s,83$
M^{II}	58,26	+0,13	57,98	0,00
P^{III}	58,51	−0,12	57,05	+0,93
M^{III}	58,27	+0,12	57,80	+0,18
P^{IV}	58,54	−0,15	58,30	−0,32
$(\lambda) =$	$0^h 28^m 58^s,39$		$57^s,98$	
$(\gamma) =$	67,58		2,30	

Moyenne $(\Lambda) = 0^h 28^m 58^s,413$; $(\Gamma) = 2482,1$.

B. *Longitudes de Varsovie, corrigées pour l'effet de la température.*

Voyages.	Kessels 129[illegible] (l)	(v)	Dent 1747. (l)	(v)	Hauth 30. (l)	(v)	Hauth 32. (l)	(v)
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,$[illegible]^s,46	$+0^s,54$	$11^s,95$	$-0^s,65$	$12^s,58$	$-0^s,38$	$11^s,76$	$-0^s,48$
$\mathfrak{B}^{I}$	10,91	+0,09	11,47	−0,17	11,62	+0,58	11,19	+0,09
$\mathfrak{P}^{II}$			11,45	−0,15	11,42	+0,78	9,97	+1,31
$\mathfrak{B}^{II}$			11,55	−0,25	10,94	+1,26	11,57	−0,29
$\mathfrak{P}^{III}$	11,66	−0,66	10,62	+0,68	11,06	+1,14	12,15	−0,87
$\mathfrak{B}^{III}$	11,09	−0,09	11,05	+0,25	13,07	−0,87	10,58	+0,70
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,87	+0,13	11,03	+0,27	14,87	−2,67	11,56	−0,28
$(\lambda)=$	$0^h\,37^m\,11^s,00$		$11^s,30$		$12^s,20$		$11^s,28$	
$(\gamma)=$	12,54		12,90		1,34		4,60	

Voyages.	Kessels 1276. (l)	(v)	Hauth 52. (l)	(v)	Hauth 18. (l)	(v)	Hauth 26. (l)	(v)
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,12^s,44$	$-1^s,31$	$13^s,05$	$-0^s,59$	$11^s,67$	$-0^s,69$	$12^s,20$	$-0^s,94$
$\mathfrak{B}^{I}$	12,51	−1,38	13,69	−1,23	11,97	−0,99	12,45	−1,19
$\mathfrak{P}^{II}$	11,84	−0,71	12,70	−0,24	10,08	+0,90	9,90	+1,36
$\mathfrak{B}^{II}$	8,27	+2,86	10,48	+1,99	10,16	+0,82	11,63	−0,37
$\mathfrak{P}^{III}$	8,10	+3,03	11,50	+0,96	10,89	+0,09	12,26	−1,00
$\mathfrak{B}^{III}$	14,05	−2,92	12,07	+0,39	11,00	−0,02	9,95	+1,31
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,13	0,00	13,87	−1,41	11,11	−0,13	10,25	+1,01
$(\lambda)=$	$0^h\,37^m\,11^s,13$		$12^s,46$		$10^s,98$		$11^s,26$	
$(\gamma)=$	0,51		1,76		5,36		1,95	

Voyages.	Hauth 31. (l)	(v)	Dent 1613. (l)	(v)	Dent 1630. (l)	(v)	Dent 1687. (l)	(v)
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,12^s,45$	$-0^s,92$	$11^s,90$	$-0^s,01$	$12^s,53$	$-1^s,01$	$11^s,79$	$-0^s,38$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,81	−0,28	13,21	−1,32	11,40	+0,12	11,82	−0,41
$\mathfrak{P}^{II}$	11,25	+0,28	12,13	−0,24	10,68	+0,84	11,46	−0,05
$\mathfrak{B}^{II}$	10,91	+0,62	11,95	−0,06	11,23	+0,29	11,82	−0,41
$\mathfrak{P}^{III}$	11,53	0,00	11,60	+0,29	11,99	−0,47	11,96	−0,55
$\mathfrak{B}^{III}$	11,42	+0,11	11,44	+0,45	11,03	+0,49	10,34	+1,07
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,22	+0,31	11,09	+0,80	11,60	−0,08	10,54	+0,87
$(\lambda)=$	$0^h\,37^m\,11^s,53$		$11^s,89$		$11^s,52$		$11^s,41$	
$(\gamma)=$	10,15		6,05		6,60		5,62	

Voyages.	Dent 1730. (l)	(v)	Dent 1739. (l)	(v)	Dent 1807. (l)	(v)	Dent 1799. (l)	(v)
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,10^s,79$	$+0^s,31$	$10^s,31$	$+1^s,36$	$11^s,52$	$+0^s,26$	$11^s,29$	$+0^s,20$
$\mathfrak{B}^{I}$	12,30	−1,20	11,92	−0,25	11,56	+0,22	11,71	−0,22
$\mathfrak{P}^{II}$	10,21	+0,89	11,52	+0,15	11,65	+0,13	11,13	+0,36
$\mathfrak{B}^{II}$	11,21	−0,11	10,68	+0,99	11,64	+0,15	11,32	+0,17
$\mathfrak{P}^{III}$	11,59	−0,49	11,71	−0,04	11,22	+0,56	11,19	+0,30
$\mathfrak{B}^{III}$	10,37	+0,73	12,76	−1,09	12,36	−0,78	11,81	−0,32
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,24	−0,14	12,92	−1,25	12,48	−0,70	12,08	−0,59
$(\lambda)=$	$0^h\,37^m\,11^s,10$		$11^s,67$		$11^s,78$		$11^s,49$	
$(\gamma)=$	5,13		2,75		10,00		20,30	

Voyages.	Dent 1798. (l)	(v)	Dent 1789. (l)	(v)	Dent 1787. (l)	(v)	Dent 1776. (l)	(v)
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,11^s,48$	+0,42	11,42	+0,01	11,45	+0,0[illegible]	11,82	+0,20
$\mathfrak{B}^{I}$	12,21	−0,31	11,57	−0,14	12,39	−0,92	12,61	−0,59
$\mathfrak{P}^{II}$	11,61	+0,29	11,31	+0,12	10,66	+0,81	[illegible]93	+0,09
$\mathfrak{B}^{II}$	11,91	−0,01	10,99	+0,44	11,32	+0,15	11,7[illegible]	+0,25
$\mathfrak{P}^{III}$	12,10	−0,20	11,11	+0,32	11,32	+0,15	11,54	+0,48
$\mathfrak{B}^{III}$	11,79	+0,11	11,65	−0,22	11,46	+0,01	11,94	+0,08
$\mathfrak{P}^{IV}$	12,24	−0,34	12,00	−0,57	11,75	−0,28	12,64	−0,6[illegible]
$(\lambda) =$	$0^h\,37^m\,11^s,90$		11,43		11,47		12,02	
$(\gamma) =$	29,50		22,03		9,98		15,67	

Voyages.	Dent 1821. (l)	(v)	Dent 1827. (l)	(v)	Dent 1941. (l)	(v)	Dent 1808. (l)	(v)
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,10^s,91$	−0,06	10,78	+0,43	11,34	+0,07	11,66	−0,07
$\mathfrak{B}^{I}$	12,01	−1,16	11,82	−0,61	11,22	+0,19	11,41	+0,18
$\mathfrak{P}^{II}$	9,62	+1,23	11,48	−0,27	11,69	−0,28	11,44	+0,15
$\mathfrak{B}^{II}$	12,09	−1,24	10,93	+0,28	11,57	−0,16	11,79	−0,20
$\mathfrak{P}^{III}$	11,81	−0,96	11,62	−0,41	11,22	+0,19	12,48	−0,89
$\mathfrak{B}^{III}$	9,41	+1,44	10,97	+0,24	11,38	+0,03	10,80	+0,79
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,04	+0,81	10,85	+0,36	11,50	−0,09	11,42	+0,17
$(\lambda) =$	$0^h\,37^m\,10^s,85$		11,21		11,41		11,59	
$(\gamma) =$	1,96		14,68		81,87		10,95	

Voyages.	Dent 1774. (l)	(v)	Dent 1635. (l)	(v)	Dent 1636. (l)	(v)	Dent 1637. (l)	(v)
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,11^s,76$	−0,28	12,46	−0,92	12,06	−0,63	12,81	−1,58
$\mathfrak{B}^{I}$	12,71	−1,23	11,50	+0,04	12,23	−0,80	12,91	−1,68
$\mathfrak{P}^{II}$	11,38	+0,10	10,98	+0,56	10,81	+0,62	9,97	+1,26
$\mathfrak{B}^{II}$	11,00	+0,48	11,49	+0,05	11,14	+0,29	12,08	−0,85
$\mathfrak{P}^{III}$	11,24	+0,24	12,52	−0,98	11,83	−0,40	11,89	−0,66
$\mathfrak{B}^{III}$	11,36	+0,12	10,42	+1,12	10,68	+0,75	10,13	+1,10
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,98	+0,50	11,14	+0,40	11,22	+0,21	8,57	+2,66
$(\lambda) =$	$0^h\,37^m\,11^s,48$		11,54		11,43		11,23	
$(\gamma) =$	7,60		4,28		6,93		0,97	

Voyages.	Dent 1901. (l)	(v)	Dent 1910. (l)	(v)	Dent 1913. (l)	(v)	Dent 1978. (l)	v.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,10^s,88$	+0,47	10,84	+0,71	10,73	+0,63	11,62	−0,22
$\mathfrak{B}^{I}$	10,49	+0,86	13,13	−1,58	10,56	+0,80	11,84	−0,44
$\mathfrak{P}^{II}$	11,50	−0,15	10,60	+0,95	11,41	−0,05	11,12	+0,28
$\mathfrak{B}^{II}$	11,35	0,00	12,79	−1,24	11,15	+0,21	12,29	−0,89
$\mathfrak{P}^{III}$	11,48	−0,13	12,44	−0,89	11,97	−0,61	11,57	−0,17
$\mathfrak{B}^{III}$	11,87	−0,52	9,87	+1,68	11,64	−0,28	11,15	+0,25
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,90	−0,55	11,16	+0,39	11,99	−0,63	10,07	+1,33
$(\lambda) =$	$0^h\,37^m\,11^s,35$		11,55		11,36		11,40	
$(\gamma) =$	10,28		1,71		8,03		5,40	

Voyages.	Dent 1979. (l)	Dent 1979. (v)	Dent 1983. (l)	Dent 1983. (v)	Dent 1985 (l)	Dent 1985 (v)	Dent 1986. (l)	Dent 1986. v.
$\mathfrak{P}^I$	$0^h\,37^m\,11^s,81$	$-0^s,10$	$12^s,59$	$-1^s,95$	$12^s,04$	$-0^s,63$	$13^s,57$	$-1^s,81$
$\mathfrak{B}^I$	12,89	−1,18	13,79	−3,15	13,03	−1,62	14,06	−2,30
$\mathfrak{P}^{II}$	12,37	−0,66	8,30	+2,34	10,99	+0,42	9,91	+1,85
$\mathfrak{B}^{II}$	11,49	+0,22	10,21	+0,43	10,94	+0,47	12,48	−0,72
$\mathfrak{P}^{III}$	11,80	−0,09	9,66	+0,98	11,05	+0,36	11,59	+0,17
$\mathfrak{B}^{III}$	11,57	+0,14	10,51	+0,13	11,09	+0,32	8,80	+2,96
$\mathfrak{P}^{IV}$	10,05	+1,66	9,55	+1,09	10,78	+0,63	11,81	−0,05
$(\lambda) =$	$0^h\,37^m\,11^s,71$		$10^s,64$		$11^s,41$		$11^s,76$	
$(\gamma) =$	3,49		0,74		4,00		0,75	

Moyenne $(\Delta) = 0^h\,37^m\,11^s,487$; $(\Gamma) = 930,8$.

C. *Longitudes de Valdai, corrigées pour l'effet de la température.*

	1. Kessels 1290.	2. Dent 1747.	3. Hauth 30.	4. Hauth 32.	5. Kessels 1276.	6. Hauth 52.	7. Hauth 18.
p^I	$0^h\,11^m\,41^s,25$	$41^s,91$	$40^s,04$	$41^s,01$	$42^s,06$	$40^s,52$	$41^s,42$
m^I	42,19	41,66	42,68	41,45	41,09	42,71	42,09
p^{II}	41,08	41,52	42,10	41,50	41,48	42,43	41,91
m^{II}	41,86	41,86	41,60	41,61	41,54	42,37	41,69
p^{III}	41,49	41,77	42,32	41,90	41,31	43,13	41,54
m^{III}	41,26	42,25	38,76	40,73	40,01	39,83	41,79
p^{IV}	41,71	41,73	43,01	42,18	42,11	43,11	42,49
m^{IV}	41,30	41,57	40,48	40,65	40,80	40,64	41,01
$(\lambda) =$	0 11 41,52	41,78	41,35	41,34	41,30	41,84	41,74

	8. Hauth 11.	9. Hauth 31.	10. Dent 1778.	11. Dent 1613.	12. Dent 1630.	14. Dent 1687.	15. Dent 1730.
p^I	$0^h\,11^m\,42^s,55$	$40^s,77$	$42^s,03$	$41^s,29$	$41^s,72$	$41^s,58$	$42^s,19$
m^I	41,59	42,27	42,37	41,81	41,76	42,04	41,95
p^{II}	41,32	41,71	42,20	41,40	41,53	41,62	41,56
m^{II}	41,65	41,62	41,19	42,20	41,77	41,95	41,74
p^{III}	41,35	41,81	42,00	42,02	41,93	41,94	41,77
m^{III}	42,10	41,77	40,80	41,24	40,53	41,41	40,89
p^{IV}	40,98	41,83	42,62	41,63	41,71	41,84	41,91
m^{IV}	42,31	41,21		42,04	40,95	41,43	41,40
$(\lambda) =$	0 11 41,73	41,62	41,89	41,70	41,49	41,73	41,68

	16. Dent 1739.	17. Dent 1807.	18. Dent 1799.	19. Dent 1798.	20. Dent 1789.	21. Dent 1787.	22. Dent 1776.
p^I	$0^h\,11^m\,41^s,92$	$41^s,63$	$41^s,46$	$41^s,53$	$41^s,65$	$41^s,32$	$41^s,59$
m^I	41,70	41,84	41,83	42,02	41,85	41,35	41,39
p^{II}	42,20	42,06	41,62	41,86	41,87	41,74	41,74
m^{II}	41,51	41,98	42,16	41,66	41,68	41,91	41,79
p^{III}	42,27	41,86	42,03	41,60	42,21	42,16	42,13
m^{III}	40,66	40,78	40,93	40,50	40,97	41,08	40,46
p^{IV}	41,83	41,82	41,75	42,04	42,09	41,93	41,51
m^{IV}	41,42	41,64	41,55	41,53	41,39	41,40	41,68
$(\lambda) =$	0 11 41,69	41,69	41,67	41,59	41,72	41,68	41,54

	23. Dent 1821.	24. Dent 1827.	25. Dent 1941.	27. Dent 1774.	28. Kessels 1297.
p^{I}	0^h 11^m 41^s,74	41^s,72	41^s,70	41^s,83	
m^{I}	41,45	42,08	41,79	41,95	
p^{II}	42,08	41,71	41,81	41,65	42^s,20
m^{II}	41,60	40,60	41,63	41,71	41,64
p^{III}	42,80	41,56	41,67	41,83	42,63
m^{III}	41,11	41,70	41,56	42,02	40,99
p^{IV}	42,08	42,13	41,90	41,68	42,15
m^{IV}	41,55	41,52	41,58	41,49	41,74
$(\lambda) =$	0 11 41,80	41,63	41,70	41,77	41,89

Moyenne $(\Lambda) = 0^h\,11^m\,41^s,689$.

D. *Longitudes de Vilkomir, corrigées pour l'effet de la température.*

	1. Kessels 1290.	2. Dent 1747.	3. Hauth 30.	4. Hauth 32.	5. Kessels 1276.	6. Hauth 52.	7. Hauth 18.
$\mathfrak{p}^{I}$	0^h 22^m 13^s,97	14^s,24	15^s,07	15^s,86	15^s,20	15^s,03	13^s,64
$\mathfrak{v}^{I}$	14,94	14,18	14,89	14,87	13,98	14,53	15,24
$\mathfrak{p}^{II}$	14,21	13,68	13,52	14,12	13,32	14,58	12,66
$\mathfrak{v}^{II}$		13,96	14,32	13,88	15,76	12,99	13,88
$\mathfrak{p}^{III}$	14,16	13,83	14,66	13,91	14,77	15,16	13,35
$\mathfrak{v}^{III}$	13,90	13,84	13,65	13,57	14,18	13,01	13,71
$\mathfrak{p}^{IV}$	13,85	13,90	16,69	14,82	13,77	16,55	13,61
$\mathfrak{v}^{IV}$	13,07	13,73	12,80	13,33	13,53	10,89	14,15
$(\lambda) =$	0 22 14,01	13,92	14,45	14,29	14,31	14,09	13,78

	8. Hauth 26.	9. Hauth 31.	11. Dent 1613.	10. Dent 1630.	13. Dent 1687.	14. Dent 1730.	15. Dent 1739.
$\mathfrak{p}^{I}$	0^h 22^m 14^s,06	14^s,66	14^s,89	14^s,25	14^s,31	14^s,13	14^s,58
$\mathfrak{v}^{I}$	14,10	14,69	13,99	15,16	14,75	14,04	13,77
$\mathfrak{p}^{II}$	13,88	12,54	14,09	13,67	13,43	13,26	14,33
$\mathfrak{v}^{II}$	14,30	13,77	12,48	13,87	13,47	13,64	13,11
$\mathfrak{p}^{III}$	14,48	14,07	14,55	13,76	14,62	14,13	13,83
$\mathfrak{v}^{III}$	14,08	13,83	13,51	13,97	13,43	13,56	13,60
$\mathfrak{p}^{IV}$	13,93	14,10	14,73	14,25	14,34	15,24	14,63
$\mathfrak{v}^{IV}$	14,24	13,27	12,29	12,84	13,07	12,23	12,97
$(\lambda) =$	0 22 14,13	13,87	13,81	13,98	13,93	13,78	13,85

	16. Dent 1807.	17. Dent 1799.	18. Dent 1798.	19. Dent 1789.	20. Dent 1787.	21. Dent 1776.	22. Dent 1821.
$\mathfrak{p}^{I}$	0^h 22^m 14^s,42	14^s,49	14^s,79	13^s,83	13^s,94	15^s,20	14^s,09
$\mathfrak{v}^{I}$	14,03	14,07	13,68	14,12	14,62	13,82	14,71
$\mathfrak{p}^{II}$	14,45	14,17	14,17	13,96	13,18	14,72	13,72
$\mathfrak{v}^{II}$	13,12	13,06	13,50	13,79	13,44	13,21	13,48
$\mathfrak{p}^{III}$	14,18	14,48	14,30	14,50	14,25	14,14	13,87
$\mathfrak{v}^{III}$	13,20	13,46	13,48	13,72	13,60	13,59	14,08
$\mathfrak{p}^{IV}$	15,04	14,96	15,22	14,75	14,98	15,56	14,23
$\mathfrak{v}^{IV}$	12,80	12,64	12,57	12,65	12,73	12,45	13,11
$(\lambda) =$	0 22 13,90	13,92	13,96	13,92	13,84	14,09	13,91

	23. Dent 1827.	24. Dent 1941.	25. Dent 1808.	26. Dent 1774.
$\mathfrak{p}^{I}$	$0^h\ 22^m\ 14^s,35$	$14^s,11$	$14^s,39$	$14^s,25$
$\mathfrak{v}^{I}$	13,98	14,15	14,22	14,10
$\mathfrak{p}^{II}$	13,70	13,83	13,47	13,53
$\mathfrak{v}^{II}$	14,00	13,95	13,28	13,63
$\mathfrak{p}^{III}$	13,94	13,95	14,83	14,09
$\mathfrak{v}^{III}$	13,34	13,73	14,11	13,75
$\mathfrak{p}^{IV}$	14,45	14,24	14,15	14,22
$\mathfrak{v}^{IV}$	13,46	13,98	13,77	13,81
$(\lambda) =$	0 22 13,90	13,99	14,03	13,92

Moyenne $(\Lambda) = 0^h\,22^m\,13^s,962$.

§ 18. Comparaisons des poids des chronomètres.

Afin de rendre comparables entre elles les valeurs de Γ et de (Γ), déterminées pendant l'expédition de Moscou, il faut soustraire de la première valeur les $g'\Sigma\gamma = 173,4$ qui conviennent aux chronomètres hebdomadaires. Par rapport aux voyages de Varsovie, les Γ et (Γ) sont directement comparables entre eux, parce qu'ici tous les chronomètres se sont trouvés ensemble dans la même voituré. Nous avons donc:

pour Moscou.	*pour Varsovie.*
$\Gamma = 1598,3$	$\Gamma = 452,1$
$(\Gamma) = 2482,1$	$(\Gamma) = 930,8$

L'unité de ces poids correspond à l'erreur probable d'une seconde en temps. Par conséquent, les erreurs probables de nos déterminations des longitudes, abstraction faite des équations personnellès, se déduisent:

	pour Moscou.	*pour Varsovie.*
avant l'application des corrections thermométriques:	$0^s,017$	$0^s,032$
après « « « «	0,014	0,022

La comparaison des poids évalués avant et après l'application des corrections thermométriques, nous montre d'abord qu'en moyenne l'accord des résultats obtenus par chaque chronomètre à part, a été augmenté très considérablement par l'introduction de ces corrections. Pour la majeure partie des chronomètres, il fallait bien s'attendre à une augmentation des poids, vu que les longitudes elles mêmes déterminées dans les différents voyages, avaient servi aussi à la déduction des coefficients de compensation. Mais une forte augmentation des poids n'était point de nécessité par suite de notre procédé. Car, les coefficients de compensation n'ont pas été déduits des différences entre les longitudes isolées et les longitudes moyennes fournies par

chaque chronomètre à part, mais à l'aide des différences entre les longitudes isolées et la longitude moyenne de chaque lieu, obtenue par le concours de tous les chronomètres. Considérant en outre que, dans les deux expéditions, les valeurs de $\varkappa$ avaient gardé presque toujours le même signe, la forte augmentation des poids nous oblige à présumer que, par l'introduction des corrections thermométriques, aussi les différences entre les (λ), et leurs moyennes respectives $(\varLambda)$, ont dû diminuer très considérablement, en comparaison avec les différences analogues entre les λ et les $\varLambda$. En effet, en désignant ces différences respectivement par w, (w), $\mathfrak{w}$ et $(\mathfrak{w})$, et en les sommant, sans avoir égard au signe, nous avons:

pour Moscou.	*pour Varsovie.*
$\Sigma w = 9^s,73$	$\Sigma \mathfrak{w} = 20^s,57$
$\Sigma (w) = 4,96$	$\Sigma (\mathfrak{w}) = 9,42$

Ces résultats quelque satisfaisants qu'ils soient, ne servent pourtant qu'à prouver rigoureusement, que nos coefficients de compensation conviennent en effet très bien aux longitudes dont nous les avons déduits. Pour obtenir la conviction que les valeurs trouvées représentent réellement, de très près, les vrais coefficients de compensation, il fallait les examiner, en les appliquant à des longitudes qui n'avaient point servi à leur déduction. D'après ce que nous avons mentionné plus haut, cet examen pouvait se faire sur les longitudes de Valdai. Dans les voyages qui avaient fourni la longitude de cette ville, les $\varkappa$ avaient été très différents de ceux qui avaient eu lieu pendant les voyages de Moscou et de Varsovie. En outre, ces $\varkappa$ changeaient de signe et étaient assez grands pour ne pas laisser évanouir les effets thermométriques vis à vis des variations accidentelles dans les marches des chronomètres. Nous avions donc ici des données très favorables à un examen rigoureux de nos coefficients de compensation.

En comparant, pour Valdai, les déterminations isolées de la longitude avec les moyennes respectives fournies par chaque chronomètre, soit avant soit après l'application des corrections thermométriques, nous obtenons pour chaque chronomètre deux fois 8 différences que nous désignerons par v et (v). Les sommes des carrés de ces différences Σv^2 et $\Sigma (v)^2$ sont en raison inverse des poids à attribuer à chaque chronomètre. J'ai réuni ces sommes des carrés dans le tableau suivant et j'y ai ajouté aussi les $\frac{\Sigma v^2}{\Sigma (v)^2}$, ou le rapport entre les poids de chaque chronomètre, déduits avant et après l'application des corrections thermométriques.

Chron.	Σv^2	$\Sigma (v)^2$	$\frac{\Sigma v^2}{\Sigma (v)^2}$
Kessels 1290	1,774	0,894	1,98
Dent 1747	0,806	0,373	2,16
Hauth 30	18,340	15,280	1,20
« 32	2,781	1,986	1,40
Kessels 1276	7,580	3,280	2,31
Hauth 52	20,140	10,300	1,96
« 18	0,987	1,392	0,70
« 11	14,400	2,045	7,04
« 31	1,200	1,424	0,84
Dent 1613	1,696	0,955	1,78
« 1630	1,733	1,661	1,04
« 1687	1,711	0,428	4,00
« 1730	2,079	1,114	1,87
« 1739	2,468	1,845	1,34
« 1807	1,052	1,242	0,85
« 1799	1,080	1,010	1,07
« 1798	2,428	1,661	1,46
« 1789	0,848	1,094	0,78
« 1787	0,938	0,934	1,00
« 1776	2,440	1,662	1,47
« 1821	1,670	1,862	0,90
« 1827	2,409	1,545	1,56
« 1941	0,156	0,100	1,56
« 1774	0,262	0,207	1,27
		Moyenne	1,73

Ce tableau montre d'abord que, dans 19 cas parmi 24, l'accord des différentes déterminations de la longitude a augmenté plus ou moins considérablement, par l'introduction des corrections thermométriques, et que dans 5 cas seulement, il a diminué un peu. Parmi les 5 chronomètres qui ont donné ce résultat négatif, il y a 3 dont les coefficients de compensation sont si petits, que les rapports des poids n'ont pu différer beaucoup de l'unité, vu qu'ici les erreurs accidentelles cachent entièrement les petits effets de la température. Il n'y a donc que les deux chronomètres Hauth 18 et Dent 1789, pour lesquels la diminution de l'accord était inattendue, surtout si l'on considère que les déterminations de leurs coefficients de compensation ne laissent subsister que des erreurs probables comparativement très petites. Mais aussi dans ces cas, nous n'avons aucune raison de révoquer en doute l'exactitude de nos coefficients et il doit être admis que, dans ces cas aussi, l'accord des longitudes a été troublé un peu, par quelque

cause accidentelle et inconnue. En effet, il suffit, dans l'un et dans l'autre cas, de changer une seule détermination de la longitude, d'un quart de seconde, pour élever le rapport des poids à l'unité.

La valeur moyenne des $\frac{\Sigma v^2}{\Sigma (v)^2} = 1{,}73$, comparée avec les valeurs de $\frac{(\Gamma)}{\Gamma} = 1{,}55$ pour Moscou et de $\frac{(\Gamma)}{\Gamma} = 2{,}02$ pour Varsovie, nous prouve en outre que l'accroissement des poids a été, pour Valdai, à peu près égal à la moyenne de ceux, qui ont été trouvés pour les longitudes de Moscou et de Varsovie.

Les longitudes de Vilkomir, quoique appartenant à la même époque, ne pouvaient pas contribuer à contrôler l'exactitude de ces coefficients; car ici l'effet thermométrique était lui-même beaucoup plus petit, que pour Valdai et les deux points principaux, ainsi qu'on peut le voir dans nos tableaux des $\varkappa$ (pag. 97), et en outre, les déterminations du temps absolu étaient sujettes à de si grandes incertitudes, par suite de l'inconstance dans la manière d'observer de M. Alexandrov, qu'elles auraient caché l'effet de la température, même si cet effet eût été aussi fort que pour les trois autres points.

Les résultats précédents suffisent déjà pour faire ressortir toute l'importance qui s'attache, dans les déterminations chronométriques des longitudes, à une évaluation précise des coefficients de compensation des chronomètres employés et des températures dans lesquelles ils ont dû fonctionner. Cette évaluation est encore plus importante, si le nombre des chronomètres employés n'est pas assez grand, pour qu'on pût supposer que les effets thermométriques se soient détruits dans la moyenne des longitudes. Dans ce cas, l'usage d'un chronomètre non-compensé, et par rapport auquel les coefficients des autres chronomètres devront être déterminés à l'aide d'expériences directes, est une condition essentielle pour inspirer pleine confiance dans les résultats; au moins, tant qu'il ne sera pas permis de choisir les chronomètres à employer dans une grande collection, de sorte que, dans la moyenne, les coefficients de compensation se détruisent pour les chronomètres choisis. Ce dernier expédient ne pourra pourtant servir que dans les cas où les poids des chronomètres peuvent être supposés approximativement égaux, pour l'époque des voyages.

L'élévation considérable des poids, produite par l'introduction des corrections thermométriques, démontre que ce qu'on appelle ordinairement la qualité des chronomètres, dépend en premier lieu de leur degré de compensation. Mais, sans doute, l'exécution soignée et convenable des autres parties d'un chronomètre, constitue, à côté de la compensation de la balance, un élément très important pour en élever la qualité. On jugera encore mieux de cet objet, en regardant attentivement la liste des poids que nous avons déduits, et les changements qu'ont subis les poids et les longitudes moyennes, par l'application des corrections thermométriques. Pour faciliter cette inspection, je réunirai, dans le tableau suivant, les valeurs des γ, (γ), et des w, (w), $\mathfrak{w}$ et $(\mathfrak{w})$, rapportées dans les paragraphes précédents.

Chron.	*Expédition de Moscou.* Poids du chronomètre. γ	(γ)	Déviation moyenne de la longitude. w	(w)	*Expédition de Varsovie.* Poids du chronomètre. γ	(γ)	Déviation moyenne de la longitude. w	(w)	
Kessels 1290	4,09	27,46	+ 0^s,67	+ 0^s,26	3,00	12,54	+ 0^s,52	— 0^s,49	2
Dent 1747	6,13	18,77	+ 0,40	+ 0,14	7,00	12,90	+ 0,24	— 0,19	2
Hauth 30	2,87	3,43	— 1,02	— 0,81	1,33	1,34	+ 0,32	+ 0,71	4
• 32	3,22	4,67	— 0,24	— 0,01	4,39	4,60	— 0,55	— 0,13	3
Kessels 1276	0,98	2,53	— 0,86	— 0,12	0,39	0,51	— 1,50	— 0,36	5
Hauth 52	0,64	2,35	— 1,34	— 0,40	0,36	1,76	— 0,49	+ 0,97	4
• 18	4,40	22,02	+ 0,39	+ 0,04	1,66	5,36	+ 0,06	— 0,51	2
• 11	0,55	2,90	+ 1,86	+ 0,37					4
• 26					1,51	1,95	— 0,58	— 0,23	4
• 31	5,62	5,14	+ 0,05	— 0,02	8,96	10,15	+ 0,16	+ 0,04	1
Dent 1778	5,06		+ 0,06						
• 1613	4,32	6,71	+ 0,08	— 0,16	4,88	6,05	+ 0,80	+ 0,40	3
• 1630	3,41	3,48	— 0,10	— 0,08	6,89	6,60	0,00	+ 0,03	3
• 1687	2,83	5,38	— 0,47	+ 0,10	1,10	5,62	— 0,84	— 0,08	4
• 1730	2,64	8,66	0,00	+ 0,32	2,91	5,13	— 0,86	— 0,39	2
• 1739	3,07	5,05	— 0,29	— 0,14	3,09	2,75	— 0,04	+ 0,18	3
• 1807	34,89	17,68	— 0,04	— 0,19	5,52	10,00	+ 0,54	+ 0,29	1
• 1799	24,19	33,61	— 0,05	— 0,15	9,55	20,30	+ 0,20	+ 0,03	1
• 1798	2,82	6,54	— 0,35	— 0,13	7,63	29,50	+ 0,05	+ 0,41	2
• 1789	4,74	24,30	+ 0,21	— 0,11	3,89	22,03	+ 0,51	— 0,06	2
• 1787	11,43	10,80	— 0,09	— 0,13	9,02	9,98	+ 0,04	— 0,02	1
• 1776	3,23	5,03	+ 0,27	— 0,20	2,09	15,67	+ 1,28	+ 0,53	2
• 1821	2,29	2,84	+ 0,35	+ 0,17	1,70	1,96	— 0,33	— 0,64	3
• 1827	6,37	13,07	+ 0,09	+ 0,28	5,21	14,68	— 0,57	— 0,28	2
• 1941	47,33	50,64	+ 0,05	+ 0,09	39,14	81,87	— 0,12	— 0,08	1
• 1808					4,41	10,95	— 0,19	+ 0,10	2
• 1774	41,67	67,58	— 0,08	— 0,02	7,07	7,60	— 0,09	— 0,01	1
Kessels 1297	2,30		— 0,42						
Dent 1635					0,59	4,28	— 1,23	+ 0,05	4
• 1636					3,01	6,93	+ 0,44	— 0,06	2
• 1637					0,73	0,97	+ 1,01	— 0,26	5
• 1901					8,20	10,28	0,00	— 0,14	1
• 1910					0,45	1,71	— 1,25	+ 0,06	4
• 1913					5,01	8,03	+ 0,19	— 0,13	2
• 1978					2,13	5,40	— 0,69	— 0,09	4
• 1979					0,36	3,49	+ 2,11	+ 0,22	4
• 1983					0,83	0,74	— 1,32	— 0,85	5
• 1985					2,71	4,00	+ 0,30	— 0,08	3
• 1986					0,29	0,75	— 1,15	+ 0,27	5

On voit d'abord que, par l'introduction des corrections thermométriques, les poids de presque tous les chronomètres ont augmenté, dans les deux expéditions. Mais il y a aussi des exceptions de cette règle. Le poids du chronomètre Hauth 31 par ex. a diminué pour les voyages de Moscou, et a augmenté pour ceux de Varsovie; et un exemple plus frappant de ce genre se présente dans le chronomètre Dent 1807. Pour ce dernier chronomètre, les corrections moyennes des longitudes n'ont pas été d'accord avec les variations dans les longitudes isolées, attribuées à l'effet de la température. Le cas inverse c. à d. une augmentation des poids pour les voyages de Moscou, combinée avec une diminution des poids pour les voyages de Varsovie, s'offre par les chronomètres Dent 1630 et 1739. Enfin le chronomètre hebdomadaire 1983, dont le poids a été déduit des seuls voyages de Varsovie, nous présente néanmoins l'exemple remarquable d'une diminution du poids, produite par l'introduction des corrections thermométriques. C'est qu'ici la diminution de 0ˢ,47 dans l'erreur du résultat moyen, ne s'accorde nullement avec les corrections à appliquer aux longitudes isolées.

Le chronomètre Dent 1941 est, sans contestation, le plus parfait de notre collection. Ce résultat n'était point inattendu, car le même chronomètre avait déjà occupé, l'année précédente, dans les voyages entre Altona et Greenwich, une place incomparablement supérieure à tous les autres chronomètres employés à la même occasion (*Rapport snr l'expéd. chron. de* 1844, §§ 15, 16). Nous avons donc ici un témoignage très favorable, que notre déduction des poids relatifs des chronomètres n'est point arbitraire, et que le meilleur accord des longitudes est réellement le produit de la plus haute perfection des chronomètres, même dans des cas où de très petites fractions de seconde pourraient déjà altérer considérablement les poids. Ce témoignage est confirmé encore par les poids élevés des chronomètres Dent 1774 et Dent 1787, dont le premier avait occupé la première place dans l'expédition entre Poulkova et Altona (*Rapport sur l'expéd. chron. de* 1843 pag. 145), et le dernier la seconde place dans l'expédition de 1844 (*Rapport sur l'expéd. chron. de* 1844 pag. 202), au moins parmi les chronomètres qui avaient servi dans les deux expéditions, de 1844 et de 1845.

Malgré l'accord satisfaisant que nous offre en général le tableau précédent, par rapport à la qualité relative des chronomètres, dans l'une et dans l'autre expédition, nous rencontrons, dans la liste des poids déduits dans les deux occasions, quelques différences frappantes. Le chronomètre Dent 1774, par exemple, a le poids 67,58 dans l'expédition de Moscou, tandisque son poids ne s'élève qu'à 7,60 pour les voyages de Varsovie. En revanche, pour le chronomètre Dent 1798 les voyages de Moscou ont offert $(\gamma) = 6{,}54$, ceux de Varsovie $(\gamma) = 29{,}50$, et le chronomètre Dent 1808 avait dans les voyages de Varsovie le poids assez élevé 10,95, tandisque les longitudes qu'il avait offertes pour Moscou, offraient de si grandes différences, qu'il fallait le rejeter entièrement à cette occasion. Par rapport à ce dernier chronomètre j'ai déjà énoncé plus haut l'opinion que, pendant l'expédition de Moscou, un corpuscule étranger se fût introduit dans ses rouages, lequel s'était éloigné spontanément dans l'intervalle entre les deux expéditions. Mais, par rapport aux autres chronomètres qui ont montré des différences plus

fortes dans les poids déterminés aux deux occasions, faudra-t-il supposer que la qualité de ces chronomètres ait changé dans le bref intervalle qui sépare les deux expéditions? ou bien, doit on admettre que, dans les 7 longitudes que nous a fournies chaque expédition, les chances favorables et défavorables à l'élévation des poids, produites par des erreurs accidentelles, ne se soient pas encore assez compensées?

La dernière explication me paraît la plus probable pour la majeure partie des chronomètres en question, et elle trouve un appui très fort dans la remarque, que les excellents chronomètres ont, en général, retenu leur position élevée après des intervalles même d'années entières. Or, en adoptant cette explication, le même poids devait servir pour les longitudes déterminées dans les deux expéditions faites peu de semaines l'une après l'autre et dans des circonstances extérieures très semblables. Ces poids moyens ont été déduits d'une combinaison des résultats offerts par les deux séries de déterminations. Cette combinaison s'effectue très simplement d'après la formule $p = \frac{n-2}{\Sigma g'(v)^2 + \Sigma \mathfrak{g}'(\mathfrak{v})^2}$, dans laquelle p est le poids moyen, n le nombre total des voyages du chronomètre, v et $\mathfrak{v}$ les différences entre les longitudes isolées de Moscou et de Varsovie et leurs moyennes respectives, enfin g' et $\mathfrak{g}'$ le poids relatif des différents voyages. Pour les chronomètres qui n'avaient servi que dans une seule expédition, il fallait garder les mêmes poids qu'auparavant. Je donnerai maintenant la liste de ces poids moyens p, que je regarde comme définitifs, en les rangeant dans l'ordre de leur poids.

Poids définitifs.

	Chronomètre	p		Chronomètre	p
1.	Dent 1941	62,58	21.	Dent 1978 hebd.	5,40
2.	« 1799	25,33	22.	« 1778	5,06
3.	« 1789	23,11	23.	Hauth 32	4,61
4.	Kessels 1290	18,60	24.	Dent 1630	4,56
5.	Dent 1747	15,30	25.	« 1635 hebd.	4,28
6.	« 1827	13,83	26.	« 1985 hebd.	4,00
7.	« 1774	13,66	27.	« 1739	3,56
8.	« 1807	12,77	28.	« 1979 hebd.	3,49
9.	« 1808	10,96	29.	Hauth 11	2,90
10.	« 1798	10,72	30.	Dent 1821	2,31
11.	« 1787	10,37	31.	Kessels 1297	2,30
12.	« 1901 hebd.	10,28	32.	Hauth 52	2,02
13.	Hauth 18	8,61	33.	« 26	1,95
14.	Dent 1913 hebd.	8,03	34.	« 30	1,92
15.	« 1776	7,61	35.	Dent 1910 hebd.	1,71
16.	« 1636 hebd.	6,93	36.	« 1637 hebd.	0,97
17.	Hauth 31	6,82	37.	Kessels 1276	0,85
18.	Dent 1730	6,44	38.	Dent 1986 hebd.	0,75
19.	« 1613	6,36	39.	« 1983 hebd.	0,74
20.	« 1687	5,49		Somme des poids	337,08

En partant de ces poids, l'erreur probable de la longitude moyenne, produite par les seules irrégularités dans les marches des chronomètres, s'établit pour Moscou = 0ˢ,015, pour Varsovie = 0ˢ,023.

La liste précédente nous donne encore un meilleur coup-d'oeil général sur les qualités relatives des chronomètres, et c'est avec une vraie admiration pour le talent éminent de l'artiste, que nous voyons ici la longue série d'excellents chronomètres provenus de l'atélier de M. Dent. Il est vrai qu'il y a, dans le grand nombre de chronomètres de Dent, aussi quelques uns qui sont de qualité inférieure. Mais ces derniers chronomètres appartiennent presque tous au nombre des chronomètres hebdomadaires, lesquels, à ce que nous avons déjà mentionné plus haut, n'avaient été confectionnés que peu de mois avant le commencement de nos voyages, et, par conséquent, n'avaient été assez long temps en usage, pour avoir adopté une marche uniforme.

La comparaison des poids trouvés dans les expéditions de Moscou et de Varsovie, nous donne encore le moyen de former un jugement sur l'exactitude de la formule $g' = \frac{k'}{T\sqrt{\tau\tau'}}$, qui nous a servi à calculer le poids relatif des résultats obtenus par les différents voyages. Il y a eu, dans les deux expéditions, 23 chronomètres identiques, pour lesquels nous avons trouvé:

par les voyages de Moscou $\Sigma(\gamma) = 347{,}74$
« « « « Varsovie $= 288{,}80$

L'unité des poids ayant été la même dans les deux cas, ces deux chiffres auraient dû être égaux, si la formule avait été exacte et si les deux conditions suivantes étaient remplies, 1°) que, dans la somme des 23 poids, les effets des erreurs accidentelles s'étaient complètement compensés et 2°) que les chronomètres n'avaient point changé de qualité d'une expédition à l'autre. Quant à la dernière condition, nous avons énoncé plus haut notre opinion, que l'intervalle qui sépare les deux expéditions nous paraît trop bref pour avoir produit des changements considérables dans la qualité des chronomètres. Mais la première condition ne nous paraît pas suffisamment remplie. En effet nous n'avons besoin que de rejeter le seul chronomètre Dent 1774 qui, par hazard, a eu un poids extraordinairement haut dans les voyages de Moscou, afin de produire un accord presque parfait dans les sommes des poids des 22 chronomètres restants, qui se trouvent ainsi 280, 16 et 281, 20.

Quoiqu'il en soit, l'accord approximatif des sommes des poids prouve que la formule qui nous a donné les poids des voyages, est approximativement exacte, et que l'erreur qui peut-être y subsiste encore, ne pourra exercer aucune influence sur les résultats à déduire pour les longitudes, dès que les durées des voyages qui ont fourni les différentes déterminations, ne sont encore considérablement plus différentes entre elles, qu'elles n'ont été dans les voyages de Moscou et de Varsovie.

Parmi les chronomètres employés dans les deux expéditions de 1845, il y avait 20 qui nous avaient déjà servi, l'année précédente, dans l'expédition chronométrique exécutée entre

Altona et Greenwich. Il paraît intéressant de comparer ici les poids qu'avaient offerts ces chronomètres à cette occasion antérieure, avec ceux que nous ont fournis les voyages de 1845. Dans l'expédition de 1844 nous n'avions aucun moyen d'évaluer les corrections thermométriques; c'est pourquoi la comparaison devra être instituée entre les poids primitifs, trouvés avant l'application des dites corrections. En outre il faudra réduire les poids à la même unité. Dans les expéditions des deux années nous avions attribué l'unité du poids à un chronomètre qui, par un voyage normal, offrait l'erreur probable d'une seconde entière, pour une détermination isolée de la longitude; mais les durées des voyages normaux etaient différentes dans les deux années. En 1844 nous avons pris pour norme un voyage, dans lequel $\tau = \tau' = 60$ heures et $\rho = 24$ heures; en 1845, au contraire, le voyage normal offrit $\tau = \tau' = 75$ heures et $\rho = 15$ heures. Ces différentes durées des voyages normaux fixèrent la constante k', en 1844 à 8640, en 1845 à 12375, et c'est par le facteur $\frac{8640}{12375}$, qu'il faudra multiplier les poids déduits des voyages de 1844, afin de les réduire à l'unité des poids de nos expéditions de Moscou et de Varsovie. Cette réduction faite, voici le tableau comparatif des poids:

	1844.	1845.	1845.
Chronomètre.	Alt.-Greenw.	Poulk.-Mosc.	Poulk.-Vars.
Hauth 31	2,80	5,62	8,96
« 18	1,16	4,40	1,66
« 30	0,34	2,87	1,33
« 32	2,14	3,22	4,39
Dent 1613	1,58	4,32	4,88
« 1630	1,08	3,41	6,89
« 1687	2,06	2,83	1,10
« 1730	2,14	2,64	2,91
« 1739	1,55	3,07	3,09
« 1776	0,89	3,23	2,09
« 1787	3,34	11,43	9,02
« 1789	1,23	4,74	3,89
« 1798	1,29	2,82	7,63
« 1799	0,90	24,19	9,55
« 1807	1,53	34,89	5,52
« 1774	1,47	41,67	7,07
« 1821	0,41	2,29	1,70
« 1827	0,88	6,37	5,21
« 1941	24,94	47,33	39,14
« 1747	1,20	6,13	7,09
Sommes des poids	53,93	217,47	134,12

Une infériorité très considérable se prononce ici pour les poids des chronomètres obtenus par les voyages de mer, en 1844. A ce que nous avons vu plus haut, la différence considérable entre les sommes des poids trouvés pour les voyages de Moscou et de Varsovie, s'explique par l'influence plus forte, qu'ont exercée les températures, dans les longitudes de Varsovie. Elle disparaît, en majeure partie, dès que les corrections thermométriques y sont appliquées. On pourrait croire d'abord, que ce fût aussi l'effet des températures très variables, qui ait diminué les poids pendant les voyages de 1844. Mais les températures moyennes, observées à l'aide des thermomètres, pendant les différents trajets entre Altona et Greenwich (*Expéd. chron. de* 1844 pag. 20 — 26), n'étant aucunement sujettes à des variations aussi fortes, qu'elles sont accusées par la marche du chronomètre sans compensation pendant les voyages de Moscou (et en plus haut degré pendant ceux de Varsovie), cette explication devient inadmissible. En outre, le tableau précédent montre, que le poids de certains chronomètres qui ont un grand coefficient de compensation, par ex. Dent 1687 et Dent 1730, n'a pas changé d'autant, que celui de quelques autres chronomètres, qui offrent un coefficient très petit, comme Dent 1630, Dent 1807, Dent 1774. Ce tableau contient ainsi en lui-même la preuve, que ce n'est pas à l'effet des températures qu'il faut attribuer les différences des poids. Également, le soupçon qui aurait pu naître sur l'exactitude de la formule, à l'aide de laquelle nous avons réduit à la même unité les poids offerts par les différentes expéditions, est anéanti par la considération (pag. 116) des résultats obtenus par les voyages de Moscou et de Varsovie, dont les durées moyennes ont été beaucoup plus inégales que celles des voyages d'Altona à Greenwich et de Poulkova à Moscou.

L'origine de la marche moins uniforme des chronomètres, pendant les voyages par mer, reste donc un peu énigmatique, et nous pouvons faire là-dessus seulement des hypothèses assez vagues, comme, par exemple, que les battements des navires en direction horizontale ou l'action magnétique des grandes masses de fer dans les bateaux à vapeur, ont agi infavorablement sur la régularité de la marche des chronomètres. Quoiqu'il en soit, il paraît établi, par la comparaison précédente, que, toutes précautions prises, la marche des chronomètres est en général beaucoup plus uniforme dans les voyages par terre, que dans les voyages de mer à bord des bateaux à vapeur.

§ 19. Déduction définitive des longitudes, pour les différents lieux d'observation.

Dans cette déduction finale des longitudes, je me suis servi, pour tous les quatre lieux d'observation, des mêmes poids moyens des chronomètres $= p$, qu'on trouve dans le tableau pag. 116. Chaque détermination isolée de la longitude d'un lieu quelconque, corrigée pour l'effet thermométrique, fut multipliée par le poids correspondant du chronomètre. Tous les produits obtenus ainsi dans chaque voyage furent additionnés et les sommes trouvées furent divi-

sées par les sommes correspondantes des poids. C'est ainsi que nous avons déduit les longitudes moyennes résultantes de chaque voyage à part. Il ne restait qu'à combiner, pour chaque lieu, les longitudes obtenues par les différents voyages à un seul résultat moyen. Dans cette combinaison, il fallait avoir égard aux poids relatifs $= g'$ des différents voyages, indiqués précédemment pag. 84 et 88.

Par rapport à Valdai et à Vilkomir, les résultats de tous les voyages ont été regardés comme du même poids. Nous nous aurions éloignés de la vérité, si nous avions attribué aux longitudes de ces lieux, des poids relatifs dépendants des durées du transport du temps, car ici, à cause des intervalles plus brefs, les erreurs à craindre par suite des irrégularités dans les marches des chronomètres, doivent être beaucoup plus petites, que celles qui ont leur origine dans les défauts des déterminations du temps absolu et dans l'inconstance des équations personelles, quantités qu'il faut estimer à peu près égales pour tous les voyages.

Dans tous les cas, les valeurs déduites des longitudes moyennes furent contrôlées d'après la formule $\frac{\Sigma \lambda p}{\Sigma p}$, λ étant la longitude moyenne fournie par chaque chronomètre à part.

A. *Longitude de Moscou à l'Est de Poulkova.*

Voyage.	Longitude.	g'.	diff. de la moyenne.
P^{I}	$0^h 28^m 58^s,420$	1,05	$+ 0^s,004$
M^{I}	58,424	0,90	+ 0,008
P^{II}	58,476	0,98	+ 0,060
M^{II}	58,378	1,06	− 0,038
P^{III}	58,308	1,07	− 0,108
M^{III}	58,300	0,81	− 0,116
P^{IV}	58,582	1,09	+ 0,166

Ces longitudes combinées entre elles, eu égard au poids relatif des différents voyages, donnent la moyenne générale $= 0^h 28^m 58^s,416$.

Les differences entre cette moyenne et les résultats des voyages isolés, fixent l'erreur probable de la longitude obtenue par un voyage du poids 1,00, à $0^s,065$. La somme des poids de tous les voyages ou $\Sigma g'$ étant $= 6,96$, nous en tirons l'erreur probable de la moyenne elle-même $= 0^s,025$.

L'erreur probable qu'il fallait attendre dans la longitude moyenne, par suite seulement des irrégularités dans les marches des chronomètres, a été trouvée (pag. 116) pour Moscou $= 0^s,015$. Nous avons donc, pour la moyenne, l'effet réuni des petites incertitudes dans la détermination du temps absolu, des irrégularités dans les marches des horloges qui gardaient le temps jusqu'à l'arrivée des chronomètres de voyage, et de l'inconstance dans la manière d'observer les pas-

sages, de la part des deux observateurs établis sur les deux lieux, $= \sqrt{0{,}025^2 - 0{,}015^2}$, $= 0{,}020$ et pour le résultat d'un seul voyage $= \sqrt{0{,}065^2 - 0{,}040^2} = 0{,}051$.

Dans l'expédition de 1844, entre Altona et Greenwich, l'accord des longitudes fournies par les différents voyages avait donné l'erreur probable à craindre dans le résultat obtenu par un voyage normal = 0;155. Ce chiffre doit être augmenté encore afin de correspondre à la durée plus longue d'un voyage normal, telle que nous l'avons acceptée dans les voyages de 1845. En considérant que le nombre des chronométres employés a été plus grand en 1844, qu'en majeure partie leur qualité n'était pas inférieure, en outre, que les déterminations du temps absolu ont été exécutées, dans les deux occasions, à peu près avec la même exactitude, et que les horloges qui gardaient le temps jusqu'à l'arrivée des chronomètres de voyage, avaient, à Altona et à Greenwich, la marche au moins aussi régulière que celles dont nous nous sommes servis en 1845, l'accord moins satisfaisant des longitudes fournies par les différents voyages de 1844, et qui se prononce dans la forte augmentation de l'erreur probable correspondante à un voyage normal, confirme le soupçon énoncé pag. 204 du „*Rapport sur l'exp. chron. de* 1844", savoir: que les masses de fer dans les bateaux à vapeur ou les ballotements des vaisseaux ont exercé une influence analogue sur les marches de tous les chronomètres pendant les mêmes trajets, mais variable dans les différents trajets.

La moyenne précédente de la longitude de Moscou a été déduite de notre expédition principale, où le temps fut transporté à l'aide des 28 chronomètres qui furent remontés chaque jour. Il s'agit maintenant de combiner, avec cette moyenne, les résultats obtenus par les chronomètres hebdomadaires. Les envois de ces derniers chronomètres n'ayant pas été accompagnés d'un chronomètre sans compensation, et les températures, dans lesquelles ils se sont mûs, n'étant point connues par une autre voie, nous n'avons pas le moyen de corriger rigoureusement les différents résultats de l'effet thermométrique. Mais nous pouvons y remédier de quelque sorte, en déduisant de l'accord même des longitudes moyennes $= \lambda$ fournies par les différents chronomètres, et à l'aide des coefficients de compensation déterminés par les voyages de Varsovie, la quantité q dont la longitude moyenne que nous aurait fournie, dans ces voyages, un chronomètre sans compensation, aurait été fautive. Désignons une valeur approximative de la longitude de Moscou par Λ, la correction cherchée de Λ par ξ, le coefficient de compensation par μ, mettons $\frac{q}{100} = \eta$, et nous aurons pour chaque chronomètre une équation de la forme:

$$\xi + 100\,\mu\,\eta = \lambda - \Lambda.$$

A chacune des équations tellement formées, il faut attribuer le poids que nous avons déduit, des longitudes de Varsovie, pour le chronomètre respectif. C'est ainsi qu'ayant supposé $\Lambda = 0^h 28^m 58^s{,}400$, et en employant les coefficients de compensation donnés pag. 101, nous avons formé les 11 équations suivantes de condition, en y rejetant le 12me chronomètre, Dent 1794, qui paraît avoir été entièrement dérangé.

Chronomètre.	Équations de condition.	Poids.
Dent 1635	$\xi - 2{,}17\,\eta = + 1{,}63$	4,3
« 1636	$+ 0{,}78\,\eta = - 0{,}23$	6,9
« 1637	$- 1{,}32\,\eta = + 0{,}53$	1,0
« 1901	$+ 0{,}21\,\eta = + 0{,}62$	10,3
« 1910	$- 2{,}26\,\eta = + 0{,}60$	1,7
« 1913	$+ 0{,}50\,\eta = + 0{,}19$	8,0
« 1978	$- 1{,}05\,\eta = + 0{,}74$	5,4
« 1979	$+ 3{,}14\,\eta = - 1{,}66$	3,5
« 1983	$- 0{,}86\,\eta = - 0{,}38$	0,7
« 1985	$+ 0{,}58\,\eta = - 0{,}49$	4,0
« 1986	$- 2{,}43\,\eta = + 1{,}79$	0,8

C'est ici un heureux accident que, parmi ces chronomètres, il y a 6 qui ont le signe négatif du coefficient de compensation, et 5 pour lesquels il est positif. Par cette circonstance la correction de la longitude que nous déduirons, sera libre à peu près de toute influence thermométrique.

Ayant traité les équations précédentes d'après la méthode des moindres carrés, j'ai déduit:

$\xi = + 0{,}329$ avec l'erreur probable $= 0{,}082$
$\eta = - 0{,}501$ « « « $= 0{,}019$

Cette valeur de η nous donne $q = - 50{,}1$ avec l'erreur probable $1{,}9$, ce qui signifie que, si les envois des chronomètres hebdomadaires avaient été accompagnés d'un chronomètre non-compensé, la moyenne arithmétique des longitudes fournies par ce chronomètre pour Moscou, aurait été trouvée de $50{,}1$ plus petite que la vraie longitude.

En ajoutant la valeur trouvée de ξ à la longitude supposée $\Lambda = 0^h 28^m 58^s{,}400$, nous avons, en moyenne, par les chronomètres hebdomadaires, la longitude de Moscou $= 0^h 28^m 58^s{,}729$ avec l'erreur probable $= 0^s{,}082$. Cette valeur diffère plus qu'il ne fallait attendre, de la longitude obtenue par l'expédition principale. On reconnaît facilement que la grande valeur positive de ξ est due particulièremeut aux longitudes fournies par les deux chronomètres Dent 1901 et Dent 1913 qui avaient les poids les plus élevés. Il en faut conclure que, probablement par un accord accidentel des différentes longitudes fournies par ces deux chronomètres pour Varsovie, leur poids a été trouvé trop haut. En effet, si nous attribuons le même poids à toutes les 11 équations précédentes, la valeur de ξ aurait été trouvée $= + 0^s{,}125$, au lieu de $+ 0^s{,}329$, et par conséquent $\Lambda + \xi = 0^h 28^m 58^s{,}525$, valeur qui s'accorderait entre les limites des erreurs probables avec le résultat de l'expédition principale.

Heureusement l'incertitude qui subsiste par rapport à la valeur de ξ, n'est pas de grande conséquence dans la moyenne générale, à cause de l'erreur probable plus forte de cette quantité ξ. En adoptant la première valeur de ξ, comme étant déduite par une voie plus rationelle, et en combinant la longitude moyenne qui en résulte, avec celle que nous a donnée l'expédition principale, nous avons en moyenne la longitude de Moscou $= 0^h 28^m 58^s{,}442$ avec l'erreur probable $= 0^s{,}024$. L'autre valeur de ξ n'aurait changé cette quantité que de $0^s{,}017$.

Ajoutons maintenant à la longitude trouvée l'équation constante dans la manière d'observer de M. W. Struve et de M. Döllen et qui a été évaluée (pag. 51) $a - b = -0^s,167 \pm 0^s,020$. Avec cette correction nous avons en définitive:

la longitude de Moscou, pavillon de l'observatoire,
$= 0^h\,28^m\,58^s,275$ à l'Est de Poulkova,

avec l'erreur probable $= 0^s,031$.

B) *Longitude de Varsovie, à l'Ouest de Poulkova.*

Voyage.	Longitude.	g'	Diff. de la moy.
$\mathfrak{P}^{I}$	$0^h\,37^m\,11^s,453$	0,41	$+0^s,001$
$\mathfrak{B}^{I}$	11,695	0,36	$+0,243$
$\mathfrak{P}^{II}$	11,318	0,38	$-0,134$
$\mathfrak{B}^{II}$	11,372	0,38	$-0,080$
$\mathfrak{P}^{III}$	11,468	0,43	$+0,016$
$\mathfrak{B}^{III}$	11,360	0,37	$-0,092$
$\mathfrak{P}^{IV}$	11,508	0,37	$+0,056$

La moyenne de ces longitudes, eu égard aux poids relatifs des voyages, se trouve $0^h\,37^m\,11^s,452$ avec l'erreur probable $= 0^s,033$.

A l'unité du poids c. à d. à la longitude fournie par un voyage normal, correspond ici l'erreur probable $= 0^s,055$, un peu plus petite même que l'erreur analogue dans les voyages de Moscou. — Par suite des seules irrégularités dans les marches des chronomètres, il y avait à craindre, dans la longitude définitive de Varsovie, une erreur probable $= 0^s,023$. Nous avons donc $\sqrt{0^s,033^2 - 0^s,023^2} = 0^s,024$ pour l'effet combiné des incertitudes dans la détermination du temps absolu et des autres sources d'erreurs qui agissent d'une quantité constante sur les longitudes fournies par tous les chronomètres, dans le même voyage.

M. Baranovski observe les passages de $0^s,223 \pm 0^s,020$ plus tard que M. W. Struve (pag. 51). Par cette raison la longitude occidentale de Varsovie doit être diminuée de l'équation indiquée, et nous avons finalement:

la longitude de Varsovie, lieu de l'instrument des passages,
$= 0^h\,37^m\,11^s,229$ à l'Ouest de Poulkova,

avec l'erreur probable $= 0^s,039$.

C. *Longitude de Valdai, à l'Est de Poulkova.*

Dans l'interpolation chronométrique de la longitude de Valdai, entre celles de Poulkova et de Moscou, nous avons supposé la longitude de Moscou préalablement $= 0^h\,28^m\,58^s,20$ (pag. 93). Mais, comme les corrections des horloges à Moscou sont affectées de l'équation personnelle de M. Döllen, il fallait employer la longitude définitive de Moscou, changée également de l'effet de cette équation personnelle, ou $0^h\,28^m\,58^s,442$ (pag. 122). Par conséquent

nous avons la quantité $d\lambda$ (pag. 91) $= + 0^s,242$, et les corrections à ajouter aux résultats obtenus pour Valdai, par les différents voyages, s'en déduisent:

pour p^I	$dl =$	$+ 0^s,116$
m^I		$+ 0,109$
p^{II}		$+ 0,121$
m^{II}		$+ 0,106$
p^{III}		$+ 0,114$
m^{III}		$+ 0,119$
p^{IV}		$+ 0,114$
m^{IV}		$+ 0,114$

Avec ces corrections nous avons:

Voyage.	Longitude.	Diff. de la moy.
p^I	$0^h\,11^m\,41^s,707$	$- 0^s,083$
m^I	41,992	$+ 0,202$
p^{II}	41,840	$+ 0,050$
m^{II}	41,822	$+ 0,032$
p^{III}	41,960	$+ 0,170$
m^{III}	41,383	$- 0,407$
p^{IV}	42,021	$+ 0,231$
m^{IV}	41,595	$- 0,195$

Ayant attribué le même poids à tous ces voyages, la moyenne arithmétique nous donne la longitude de Valdai $= 0^h\,11^m\,41^s,790$, avec l'erreur probable $= 0^s,052$.

L'accord des longitudes trouvées par les différents voyages conduit, pour le résultat d'un voyage isolé, à l'erreur probable $= 0^s,148$. A cause de la courte durée des transports du temps, les erreurs probables produites par les irrégularités dans les marches des chronomètres, peuvent être regardées, dans la moyenne de tous les chronomètres, comme évanouissantes vis à vis de cette erreur probable $0^s,148$. En considérant en outre que, dans chaque voyage isolé de Moscou, l'effet combiné des erreurs dans la détermination du temps absolu et des irrégularités dans les marches des horloges qui gardaient le temps sur les deux lieux d'observation, Poulkova et Moscou, ne s'élève qu'à $0^s,051$, dont une partie seulement affecte les longitudes de Valdai, il est évident que presque toute l'erreur probable de $0^s,148$ doit être attribuée aux incertitudes des déterminations du temps absolu, exécutées à Valdai à l'aide d'une lunette de plus petites dimensions, et aux irrégularités dans les marches des horloges qui, dans cet endroit, étaient destinées à garder le temps jusqu'à l'arrivée des chronomètres de voyage.

Pour l'équation personnelle entre M. Liapounov et M. W. Struve la longitude trouvée doit être augmentée de $+ 0^s,200 \pm 0^s,020$ (pag. 51). Nous avons, par conséquent, finalement;

la longitude de Valdai, observatoire temporaire,

$$= 0^h\,11^m\,41^s,990 \text{ à l'Est de Poulkova,}$$

avec l'erreur probable $= 0^s,056$.



D. *Longitude de Vilkomir, à l'Ouest de Poulkova.*

La longitude de Varsovie, que nous avons employée à l'interpolation de celle de Vilkomir a été $= 0^h\,37^m\,11^s{,}340$ (pag. 95). Nous avons donc $d\lambda = +\,0^s{,}112$ et par conséquent les corrections à ajouter aux longitudes obtenues par les différents voyages

pour $\mathfrak{p}^{I}$	$dl =$	$+\,0^s{,}062$
$\mathfrak{v}^{I}$		0,058
$\mathfrak{p}^{II}$		0,064
$\mathfrak{v}^{II}$		0,066
$\mathfrak{p}^{III}$		0,064
$\mathfrak{v}^{III}$		0,064
$\mathfrak{p}^{IV}$		0,067
$\mathfrak{v}^{IV}$		0,063

Dans la première déduction de la longitude de Vilkomir, M. **Alexandrov** n'était pas encore parti des valeurs définitives des corrections du chronomètre auxiliaire, que nous trouvons consignées dans les tableaux pag. 60 — 62. Par cette raison les longitudes de cet endroit demandent encore une petite correction constante pour chaque voyage, que nous avons évaluée

pour $\mathfrak{p}^{I}$	$d'l =$	$-\,0^s{,}001$
$\mathfrak{v}^{I}$		$-\,0{,}001$
$\mathfrak{p}^{II}$		$-\,0{,}061$
$\mathfrak{v}^{II}$		$+\,0{,}051$
^{III}		$-\,0{,}052$
$\mathfrak{v}^{III}$		$-\,0{,}026$
$\mathfrak{p}^{IV}$		$-\,0{,}032$
$\mathfrak{v}^{IV}$		$+\,0{,}072$
	Moyenne $d'l =$	$-\,0{,}006$

On voit qu'en moyenne ces corrections sont très peu signifiantes, mais elles contribuent un peu à augmenter l'accord des résultats obtenus par les différents voyages.

Eu égard aux corrections dl et $d'l$, les différents voyages fournissent, pour le lieu d'observation à Vilkomir, les résultats suivants:

Voyage.	Longitude.	Diff. de la moy.
$\mathfrak{p}^{I}$	$0^h\,22^m\,14^s{,}326$	$+\,0^s{,}324$
$\mathfrak{v}^{I}$	14,319	$+\,0{,}317$
$\mathfrak{p}^{II}$	13,824	$-\,0{,}178$
$\mathfrak{v}^{II}$	13,747	$-\,0{,}255$
$\mathfrak{p}^{III}$	14,173	$+\,0{,}171$
$\mathfrak{v}^{III}$	13,701	$-\,0{,}301$
$\mathfrak{p}^{IV}$	14,546	$+\,0{,}544$
$\mathfrak{v}^{IV}$	13,384	$-\,0{,}618$

La moyenne arithmétique nous donne maintenant la longitude de Vilkomir

$= 0^h\,22^m\,14^s{,}002$, avec l'erreur probable $0^s{,}099$.

Les résultats offerts ici, par les différents voyages, varient entre eux encore beaucoup plus que pour Valdai. L'erreur probable de la longitude fournie par un seul voyage, se trouve ici $= 0^s{,}268$, tandis que pour Valdai elle était évaluée $= 0^s{,}148$. L'instrument des passages avait été le même dans les deux lieux, les horloges qui gardaient le temps avaient été les mêmes ou d'égale qualité et, par rapport au nombre des étoiles observées chaque soir et à l'accord des corrections des horloges, offertes, pour les mêmes jours, par les différentes étoiles, les observations de M. Alexandrov ne sont point inférieures à celles de M. Liapounov. Il s'en suit que la diminution indiquée de l'accord, dans les résultats fournis, pour Vilkomir, par les différents voyages, doit être attribuée, en premier lieu, à l'inconstance dans la manière d'observer les passages, de la part de M. Alexandrov, inconstance qui s'était déjà manifestée dans les déterminations directes des équations personnelles (pag. 52).

L'équation personnelle de M. Alexandrov, par rapport à moi, a été évaluée en moyenne $e = + 0^s{,}054$ et l'erreur probable de cette équation a été estimée à environ $0^s{,}050$ (pag. 52). En y ajoutant la quantité $0^s{,}042$, dont mon père observe les passages plus tôt que moi, nous avons l'équation personnelle de M. Alexandrov par rapport à M. W. Struve

$$e - b = + 0^s{,}097.$$

C'est d'autant que la longitude moyenne de Vilkomir doit être diminuée, et nous avons finalement

la longitude de Vilkomir, observatoire temporaire,

$$= 0^h 22^m 13^s{,}905 \text{ à l'Ouest de Poulkova,}$$

avec l'erreur probable $= 0^s{,}111$.

§ 20. Détermination de la latitude des lieux d'observation.

Quoique la détermination des latitudes ne fût qu'un objet secondaire dans nos expéditions de 1845, il paraît convenable de réunir ici les résultats les plus exacts que nous possédons jusqu'ici sur cette coordonnée de nos lieux d'observation.

La latitude de l'observatoire de Moscou a été déterminée à différentes réprises par M. Pérévostchikov, par des officiers de l'État-Major Impérial et par moi, à l'aide d'instruments transportables de petites dimensions. Toutes ces déterminations concourent à assigner à cet endroit la latitude $= 55° 45' 20''$, avec des variations seulement de $1''$ ou de $2''$. Un grand cercle méridien construit par MM. Repsold pour l'observatoire de Moscou et qui s'y trouve déjà depuis 1846, ne paraît pas être employé jusqu'ici à une détermination minutieuse de cet élément, mais, en revanche, M. Schweizer, ci-devant attaché à l'observatoire de Moscou et maintenant professeur d'astronomie à l'institut Constantin des arpenteurs, nous a fourni une excellente série d'observations faites, dans ce but, à l'aide d'un petit instrument des passages établi dans le premier vertical. Les résultats des observations de M. Schweizer, faites en 1845 et 1846, sont consignés dans un mémoire qu'il a publié dans le Bulletin de la Société des Naturalistes de Moscou pour 1850, sous le titre: „*Ueber die Polhöhe der Sternwarte in*

Moscau von G. Schweizer". En renvoyant, pour les détails de ce travail soigné, à ce mémoire, il suffit de donner ici le résultat définitif, savoir:

latitude de l'observatoire de Moscou = 55° 45′ 19″,83.

M. Schweizer assigne à ce résultat l'erreur probable = 0″,075, telle qu'elle se déduit de l'accord de nombreuses observations de 9 différentes étoiles; mais il convient en même temps que les petites incertitudes dans les déclinaisons des étoiles employées, puisées dans les catalogues de MM. Airy, Argelander, Johnson, W. Struve et autres, devaient augmenter un peu cette erreur. Eu égard à cette circonstance, il y a lieu de supposer que la valeur donnée de la latitude de Moscou est exacte en dedans de 0″,2.

Les défauts dans la construction de l'observatoire de Varsovie, dont nous avons fait mention dans le § 3, ont empêché jusqu'ici les astronomes de cet établissement à se servir avec avantage du cercle méridien de Reichenbach, pour une détermination exacte de la latitude. Mais les opérations de la triangulation du royaume de Pologne ayant rendu cette détermination indispensable, le général Tenner en chargea l'astronome M. Prazmovski, en lui donnant à ce but un bel instrument universel d'Ertel, dont le cercle vertical a 10 pouces de diamètre. A l'aide de cet instrument M. Prazmovski a fait, en 1846, une excellente série d'observations, en mesurant les distances des étoiles au zénith près des passages par le méridien. Dans ces observations, une flexion de la lunette se prononce très distinctement. M. Prazmovski la détermina à 1″,13 à l'horizon, et en réduisant ses observations à l'aide de cette valeur de la flexion, il trouva la latitude de l'observatoire de Varsovie:

					Diff. de la moy.
par	2	observ.	de α Ursae maj. (pass. inf.)	= 52° 13′ 5″,62	+ 0″,08
«	10	«	de Polaris (pass. inf.)	6,32	— 0,62
«	6	«	de « (pass. sup.)	5,25	+ 0,45
«	2	«	de α Lyrae	4,52	+ 1,18
«	5	«	de α Bootis	4,81	+ 0,89
«	2	«	de α Pegasi	4,91	+ 0,79
«	2	«	de α Aquilae	6,58	— 0,88
«	4	«	de α Aquarii	6,93	— 1,23

Eu égard aux poids relatifs de ces déterminations, M. Prazmovski déduit en moyenne

la latitude de l'observatoire de Varsovie = 52° 13′ 5″,70, avec l'erreur probable = 0″,22.

Aussi dans ce cas les déclinaisons des étoiles sont tirées des catalogues modernes les plus exacts.

Les latitudes des observatoires temporaires de Valdai et de Vilkomir ont été déterminées par feu M. Alexandrov, pendant la durée même de nos expéditions chronométriques. Il se servit, dans ce but, de l'instrument des passages établi dans la direction du premier vertical. C'était le même instrument qui avait été employé, sur les mêmes lieux, à la détermination du temps absolu. A ce qui paraît, ce double usage de l'instrument a nui un peu à l'exactitude de

la détermination des latitudes. Nous voyons dans les journaux d'observation que, pour achever plus vite les observations dans le premier vertical, M. Alexandrov n'a jamais observé les passages de la même étoile par les deux côtés opposés du vertical, en se contentant d'observer plusieurs étoiles de différentes déclinaisons, dont les passages se suivaient à brefs intervalles, tantôt à l'Est tantôt à l'Ouest. En calculant les observations faites par M. Alexandrov, il m'a paru nécessaire d'exclure plusieurs observations plus ou moins douteuses. C'est ainsi que nous n'avons que 5 jours d'observations pour la détermination de la latitude de Valdai et 4 pour celle de Vilkomir, dont les résultats me paraissent à l'abri de toute objection plus grave. Voici les résultats:

Latitude de l'observatoire temporaire de Valdai.

Juin 1	57° 58′ 28″,25	par 2	ét. à l'Ouest	et 3	ét. à l'Est
« 8	25,88	« 2	«	1	«
« 9	27,70	« 3	«	3	«
« 20	25,02	« 2	«	1	«
« 24	26,90	« 2	«	2	«
Moyenne	57 58 26,75				

Latitude de l'observatoire temporaire de Vilkomir.

Août 12	55° 15′ 19″,78	par 2	ét. à l'Ouest	et 2	ét. à l'Est
« 24	24,70	« 2	«	1	«
« 25	20,90	« 1	«	2	«
Sept. 19	20,26	« 2	«	3	«
Moyenne	55 15 21,42				

En comparant maintenant, pour chaque lieu, les déterminations isolées avec la moyenne respective, et en attribuant un poids égal à toutes les déterminations, nous trouvons l'erreur probable de la latitude de Valdai = 0″,40 et de celle de Vilkomir = 0″,75. La petitesse de l'erreur probable trouvée pour la latitude de Valdai doit être attribuée en grande partie à un heureux hazard, car il n'y a pas de doute que les observations de Vilkomir, dont les résultats s'accordent moins bien, ne surpassaient considérablement, en valeur intrinsèque, celles de Valdai. Par cette raison, il paraît convenable d'assigner à la latitude trouvée de Valdai, au moins la même erreur probable, de 0″,75, que nous avons déduite pour la latitude de Vilkomir.

§ 21. Liaisons géodésiques entre les lieux d'observation et des points fixes.

Le centre du petit pavillon qui servait d'observatoire temporaire à Moscou pendant nos expéditions chronométriques, se trouva exactement sur le parallèle de l'instrument principal de l'observatoire, du cercle méridien de Repsold, à une distance seulement de 38 pieds plus à l'Est. Par cette raison la différence en longitude, trouvée précédemment pour le lieu

d'observation, ne subira qu'un changement de — 0ˢ,045, afin de correspondre au lieu du cercle méridien.

A Varsovie l'instrument des passages, auquel M. Baranovski a fait ses observations, est l'instrument principal de l'observatoire. Par conséquent, pour cet endroit, la réduction du lieu d'observation est zéro.

Il a déjà été mentionné (pag. 8) qu'en 1845 le capitaine (actuellement colonel-lieutenant) Voinov exécuta la levée trigonométrique du pays dans les environs de la ville de Valdai. A cette occasion il joignit notre observatoire temporaire avec le clocher de la cathédrale de la ville. La distance de ces deux points fut déterminée à 1480,6 pieds anglais et l'azimuth du clocher de la cathédrale, pris du centre de l'observatoire temporaire, à 21° 53′ 7″,8, compté du Nord à l'Est. Avec ces données nous avons:

le clocher de la cathédrale de Valdai au Nord de l'obs. temp. de 13″,54
« « « « à l'Est » de 0ˢ,682

Les opérations géodésiques qui devaient être exécutées, pour la jonction de l'observatoire temporaire de Vilkomir avec deux points de triangle du réseau trigonométrique du général Tenner, étaient plus compliquées. Un de ces points, nommément la flèche de l'église de Nidoki se voyait de l'observatoire temporaire. Par conséquent il était possible d'en déterminer l'azimuth directement, à l'aide du cercle horizontal de l'instrument transportable des passages. Voici la série des azimuths de Nidoki, déterminés par M. Alexandrov, et comptés du Nord à l'Est:

	83°	22′	8″,9
		22	1,5
		21	57,7
		22	0,4
		22	4,0
		21	58,4
		22	6,0
		22	8,9
		22	1,3
Moyenne	83	22	3,0

Cet azimuth peut donc être estimé exact en dedans d'un couple de secondes. En effet, l'accord des déterminations isolées avec la moyenne, donne l'erreur probable de cette dernière = 0″,94. Mais il était plus difficile de déterminer exactement la distance linéaire entre l'observatoire temporaire et l'église de Nidoki. Dans ce but, M. Alexandrov fut obligé d'exécuter une triangulation assez compliquée. Il mesura d'abord une base sur la chaussée, à l'aide de perches en bois, trempées d'huile et comparées soigneusement, avant et après l'opération, avec un étalon en fer. La chaussée étant un peu inclinée à l'horizon, M. Alexandrov détermina l'inclinaison moyenne de la base mesurée. Après avoir appliqué la correction correspondante à

cette inclinaison et après avoir exécuté toutes les autres petites réductions nécessaires, la longueur totale de la base se trouva = 6523,6 pieds anglais. Cette opération achevée, M. Alexandrov joignit la base avec la ligne principale: Observatoire temporaire — Nidoki, par 6 triangles dont plusieurs avaient des angles très-aigus. Enfin il ajouta encore un triangle pour pouvoir déduire aussi la distance de Nidoki à Dseveltova, second point de triangle dans le réseau du général Tenner, distance qui devait servir de contrôle à l'exactitude de toute la petite opération géodésique. Cette distance, Nidoki — Dseveltova, fut trouvée = 8476,20 sajènes par M. Alexandrov, tandisque la triangulation rigoureuse du général Tenner la fait = 8481,28 sajènes, ou plus grande de 5,08 sajènes = 35,6 pieds. Cette différence est plus forte qu'il ne fallait l'attendre, d'après les précautions prises par M. Alexandrov, pour gagner un résultat sûr de ses opérations. Néanmoins l'accord peut être regardé comme suffisant pour prouver, qu'aucune grande erreur ne s'est glissée dans les distances linéaires. En outre, il y a lieu de supposer que la majeure partie de la différence doit être attribuée à l'incertitude du triangle supplémentaire qui joignit Dseveltova avec l'autre réseau de triangles, et dans lequel il n'y avait que deux angles mesurés. La jonction de l'observatoire temporaire de Vilkomir avec l'église de Nidoki offre au contraire plusieurs contrôles assez satisfaisants. En tout cas la distance de ces deux lieux, trouvée = 37615,2 pieds = 5373,60 sajènes, est suffisamment bien établie pour notre but.

En combinant cette distance avec l'azimuth précédemment donné, et en nous servant des valeurs Besseliennes pour les dimensions du globe terrestre, nous déduisons:

l'église de Nidoki au Nord de l'observatoire temporaire de Vilkomir de 42,"83
« « « à l'Est « « « de 42,ˢ996.

En dehors de cette jonction principale de l'observatoire temporaire de Vilkomir, M. Alexandrov le joignit encore avec l'église catholique de St. Pierre près de laquelle l'observatoire était établi. Par des observations directes exécutées à l'aide de l'instrument transportable des passages, M. Alexandrov détermina l'azimuth de l'église à 152° 5′ 1,"4, compté du Nord à l'Est. La distance des deux lieux, mesurée à l'aide d'une corde se trouva de 126,5 pieds. Avec ces données nous avons:

l'église de St. Pierre à Vilkomir au Sud de l'observatoire temporaire de 1,"10
« « « « à l'Est « « de 0,ˢ068.

§ 22. Résultats définitifs fournis par les expéditions de 1845.

En combinant les quantités de réduction, données dans le paragraphe précédent, avec les coordonnées des lieux d'observation (§§ 19, 20), nous parvenons enfin aux coordonnées définitives des lieux dont nous avons voulu déterminer les positions.

Moscou, observatoire, lieu du cercle méridien,

Latitude $= 55^\circ\,45'\,19'',83$

Longitude $= 0^h\,28^m\,58^s,230 = 7^\circ\,14'\,33'',45$ à l'Est de Poulkova.

Varsovie, observatoire, lieu de la lunette méridienne,

Latitude $= 52^\circ\,13'\,5'',70$

Longitude $= 0^h\,37^m\,11^s,229 = 9^\circ\,17'\,48'',44$ à l'Ouest de Poulkova.

Valdai, clocher de la cathédrale,

Latitude $= 57^\circ\,58'\,40'',29$

Longitude $= 0^h\,11^m\,42^s,672 = 2^\circ\,55'\,40'',08$ à l'Est de Poulkova.

Vilkomir, église de St. Pierre,

Latitude $= 55^\circ\,15'\,20'',32$

Longitude $= 0^h\,22^m\,13^s,837 = 5^\circ\,33'\,27'',56$ à l'Ouest de Poulkova.

Nidoki, église,

Latitude $= 55^\circ\,16'\,4'',25$

Longitude $= 0^h\,21^m\,30^s,909 = 5^\circ\,22'\,43'',64$ à l'Ouest de Poulkova.

Par les expéditions chronométriques de 1843 et 1844, la différence en longitude entre l'Observatoire de Poulkova et celui de Greenwich a été trouvée $= 2^h\,1^m\,18^s,674$, avec l'erreur probable $= 0^s,057$. En combinant ces quantités avec les longitudes précédentes et leurs erreurs probables données dans le paragraphe 19, nous avons:

	Longitude à l'Est de Greenwich.	Err. prob.
Moscou, observatoire	$2^h\,30^m\,16^s,904$	$0^s,065$
Varsovie, observatoire	1 24 7,445	0,069
Valdai, clocher de la cathédrale	2 13 1,346	0,080
Vilkomir, église de St. Pierre	1 39 4,837	0,125
Nidoki, église	1 39 47,765	0,125.



BEOBACHTUNGEN

DES

BIELASCHEN COMETEN

IM JAHRE 1852

ANGESTELLT

AM GROSSEN REFRACTOR DER PULKOWAER STERNWARTE

VON

OTTO STRUVE.

Lu le 7. octobre 1853.

BEOBACHTUNGEN DES BIELASCHEN COMETEN

IM JAHRE 1852.

Der Bielasche Comet hat nach der Catastrophe vom Jahre 1846, welche ihn in zwei scheinbar getrennte Himmelskörper theilte, so auffallende Zeichen eigenthümlicher in demselben wirksamer Kräfte offenbart, dass die Hoffnung, durch fortgesetzte Verfolgung derselben zu einigen Aufschlüssen über die bisher noch so räthselhafte Natur der Cometen überhaupt zu gelangen, nicht unbegründet erscheint. Aber nicht bloss das Beobachten der sichtbaren Veränderungen an den beiden Köpfen des Cometen wird uns zu solchen Resultaten führen, sondern noch sichrere Resultate werden aus den relativen Bewegungen der beiden Köpfe gefolgert werden können. Um jedoch diese Folgerungen in aller Strenge zu ziehen, ist eine sorgfältige Bearbeitung der Theorie der Bewegung dieses Cometen um die Sonne, in derselben Weise wie es von Encke für den nach ihm benannten Cometen geschehen ist, ein dringendes Bedürfniss. Zwar besitzen wir bereits mehrere werthvolle partielle Arbeiten über diesen Gegenstand, wie die von Gauss über die Erscheinung von 1805, die von Clausen und andern über die Erscheinung von 1826, die von Baranowski unter Bessel's Leitung über die Beobachtungen von 1832 ausgeführten, ferner mehrfache Untersuchungen Santini's, die neueste Arbeit des Amerikanischen Astronomen Hubbard und mehrere andere. Alle diese Bearbeitungen haben aber vorzugsweise zum Zweck gehabt, die während einer jeden Erscheinung angestellten Beobachtungen für sich möglichst scharf darzustellen oder die Auffindung des Cometen bei seiner erwarteten Wiederkehr zu erleichtern. Wie wenig dieselben den Anforderungen an eine strenge Theorie dieser Cometenbahn genügen, haben die Abweichungen der Santinischen Ephemeriden von den Beobachtungen während der letzten Erscheinungen 1846 und 1852 deutlich gezeigt. Wir bedürfen daher vorzugsweise einer strengen Bearbeitung der Theorie der Bewegungen dieses Cometen, die sich auf alle bisherigen Erscheinungen stützt und dieselben mit einem gemeinsamen Bande umfasst. Erst wenn diese vollständig durchgeführt ist, werden wir beurtheilen können, ob die angeführten Differenzen einzig den Unvollkommenheiten der bisherigen Berech-

nungen zugeschrieben werden müssen, oder vielleicht durch eigenthümliche bisher noch unerkannte, auf den Lauf des Cometen wirkende Kräfte hervorgebracht sind.

Auch werden wir, erst wenn eine solche Theorie vorliegt, zu genaueren Schlüssen über das gegenseitige Verhalten der beiden im Jahre 1846 von einander getrennten Cometenköpfe vorschreiten können. Vorläufig lassen sich solche Folgerungen offenbar nur aus der Vergleichung der Beobachtungen von 1846 mit denen, die das vergangene Jahr geliefert hat, ziehen. Leider waren aber bei der letzten Erscheinung dieses Cometen die Umstände, unter denen dieselbe geschah, einer genauen und fortgesetzten Beobachtung sehr ungünstig. Schon aus der von Santini vorausberechneten Ephemeride (*Astr. Nachr.* No. 756) war zu ersehen, dass, falls überhaupt der Comet sichtbar würde, dieses nur in den Monaten August und September 1852 geschehen könne und zwar in jeder Nacht nur auf sehr kurze Zeit, in geringer Erhebung über dem Horizonte, kurz vor dem Eintritt der hellen Morgendämmerung. Es stand aber selbst zu befürchten, dass die grosse Entfernung des Cometen von der Erde, die nach der genannten Ephemeride in jener Periode im Minimo 1,37 Radien der Erdbahn betrug, das Auffinden des Cometen überhaupt hindern würde. Jedenfalls war nur von sehr kräftigen Fernröhren eine erfolgreiche Beobachtung zu erwarten.

Aber gerade diese vorausgesehene Schwierigkeit der Beobachtung, verbunden mit dem hohen Interesse, das sich speciell an diesen Cometen knüpft, musste es wünschenswerth machen, dass alle den Astronomen zu Gebote stehenden kräftigeren Hülfsmittel auf seine Auffindung und Beobachtung verwandt würden. Sobald daher nur einige Aussicht auf Erfolg vorhanden war, gegen die Mitte August 1852, fingen auch meine Nachforschungen nach diesem Cometen, mit Hülfe des grossen Refractors der Pulkowaer Sternwarte an, bei deren Anstellung zunächst die Voraussetzung gelten musste, dass die Santinische Ephemeride näherungsweise richtig war.

Die schwächste Vergrösserung des Refractors hat ein Feld von nicht voll 12 Minuten Durchmesser; ich konnte daher das Suchen nach dem Cometen nur in Zonen von höchstens 10′ Breite vornehmen. Hieraus ergibt sich, dass eine aufmerksame Durchmusterung einer Zone von $\pm 2°$ Breite und wenigstens ebenso vielen Graden Ausdehnung in gerader Aufsteigung, die ich mir als Gränze gesetzt hatte, vollkommen die Zeit in Anspruch nehmen würde, welche zwischen der Erhebung des Cometen aus den dichten Dünsten des Horizonts und dem Eintritt der helleren Morgendämmerung verstreichen konnte, indem dieselbe nach den Angaben der Ephemeride auf weniger als eine Stunde geschätzt werden musste. Eine weitere Ausdehnung der Nachforschungen war daher unmöglich, wenn man nicht gerade die Gegend, in welcher der Comet vorzugsweise gesucht werden musste, vernachlässigen wollte; auch musste, nach den Erfahrungen bei andern periodischen Cometen, angenommen werden, dass die angesetzte Gränze weit die Fehler der Ephemeride übersteigen würde, ja es konnte selbst eine so weite Gränze der Untersuchung, wie ich sie mir gesteckt hatte, nur durch die Annahme als gerechtfertigt erscheinen, dass die Catastrophe vom Jahre 1846, über deren Ursprung wir nichts wissen, auch mit ganz ungewöhnlichen Störungen im Laufe des Cometen verbunden gewesen wäre.

Meine Bemühungen, den Cometen in den mondfreien Nächten des August aufzufinden, blieben aber erfolglos. Da ich mir bewusst war, die ganze Gegend zwischen den angegebenen Gränzen sorgfältig durchmustert zu haben, so musste ich glauben, dass der Comet wegen seiner grossen Entfernung von der Erde in jener Periode noch zu schwach war, um selbst in unserem mächtigen Fernrohre mit Sicherheit erkannt zu werden. Diese Vermuthung hat sich aber nicht bestätigt, sondern es haben sich später als Grund der Erfolglosigkeit die grossen Fehler der Santinischen Ephemeride herausgestellt, die zu jener Zeit auf 6° stiegen und Veranlassung waren, dass der Römische Astronom P. Secchi, als er am 25. August näherungsweise in der Gegend des Himmels, wo der Bielasche Comet erscheinen sollte, wirklich einen kleinen Cometen fand, dessen Bewegung der Richtung und Grösse nach auch näherungsweise mit der angegebenen des Bielaschen übereinstimmte, doch nicht gleich die Behauptung aufzustellen wagte, dass das von ihm aufgefundene Object einer der Köpfe jenes Cometen sei. Erst als auch während längerer Periode die Richtung und Grösse der Bewegung des von Secchi aufgefundenen Cometen mit denen des Bielaschen nahezu übereinstimmend befunden wurde, konnte mit mehr Sicherheit die Identität der beiden Himmelskörper angenommen werden, und diese Annahme wurde zur Gewissheit, als es später gelang den zweiten Kopf des Cometen aufzufinden *).

Sobald die erste Nachricht von Secchi's Entdeckung hieher gelangt war, suchte ich auch in der von ihm angegebenen Gegend nach und fand am 18. September einen der Cometenköpfe auf, den ich damals für identisch mit dem zuerst von Secchi beobachteten hielt. Später hat sich aber erwiesen, dass das letztere nicht der Fall gewesen ist, indem der von mir am 18. Sept. beobachtete Kopf der nördlich vorangehende war, während P. Secchi im August nur den südlich nachfolgenden beobachtet hat. Erst am 20. September gelang es mir, auch den zweiten Cometenkopf aufzufinden und zu beobachten.

Meine Beobachtungen erstrecken sich auf den kurzen Zeitraum von 10 Tagen zwischen dem 18. und 28. September. In dieser Zeit sind mir 5 Ortsbestimmungen des nördlicheren Kopfes und 3 des südlicheren gelungen. So wenig zahlreich diese Beobachtungen sind, so müssen sie doch als ein wesentlicher Beitrag zu den Beobachtungen der letzten Erscheinung angesehen werden, wie sich aus folgender Zusammenstellung aller bisher bekannt gewordenen Beobachtungen ergibt. In dieser Zusammenstellung, sowie auch später, bezeichne ich der Kürze wegen, den nördlich vorangehenden Kopf mit B, den südlich nachfolgenden mit A, und richte mich in Bezug auf die Angaben welcher Kopf jedes Mal auf den andern Sternwarten beobachtet ist, nach den hierüber von Challis (*Astron. Nachr.* No. 836) angestellten Untersuchungen.

*) Dass die grossen Abweichungen der Santinischen Ephemeride nicht allein ausserordentlichen Störungen in der Bahn des Cometen zugeschrieben werden dürfen, ist neuerdings durch Hubbard's Rechnungen nachgewiesen worden (Gould, *Astron. Journal No. 50*). Derselbe hat nämlich gezeigt, dass die von Santini seiner Rechnung zu Grunde gelegten Elemente der Bahn, die von Plantamour in Genf aus den Beobachtungen von 1846 abgeleitet waren, in Folge eines Versehens in Plantamour's Rechnungen über die von den Planeten während der damaligen Erscheinung auf den Cometen ausgeübten Störungen, erheblich fehlerhaft waren. In wie weit diese Fehler der Elemente die Abweichungen der im vergangenen Jahre beobachteten Positionen des Cometen von der genannten Ephemeride erklären, ist bis jetzt noch nicht näher untersucht.



	Datum.	Cometenkopf.	Beobachtungsort.
1852	Aug. 25	*A*	Rom
	« 27	*A*	Rom
	« 28	*A*	Rom
	Sept. 1	*A*	Rom
	« 8	*A*	Cambridge
	« 15	*B*	Rom
	« 16	*A*	Cambridge
	« 17	*B*	Berlin
	« 18	*B*	Pulkowa
	« 19	*A* und *B*	Rom
	« 20	*A* und *B*	Rom
	« 20	*A* und *B*	Pulkowa
	« 21	*A*	Cambridge
	« 22	*B*	Berlin
	« 23	*A* und *B*	Pulkowa
	« 25	*A* und *B*	Pulkowa
	« 28	*B*	Pulkowa

Von 22 Ortsbestimmungen beider Köpfe zusammengenommen sind daher 8, also mehr als ein Drittel, in Pulkowa ausgeführt und von den 10 Bestimmungen des Kopfes *B* gehört die Hälfte uns allein an. Aber nicht allein dieses numerische Verhältniss macht unsere Beobachtungsreihe für die letzte Erscheinung von Bedeutung, sondern wohl noch mehr die optische Ueberlegenheit unseres Refractors. Wenn wir die von den andern Beobachtern ihren Ortsbestimmungen beigefügten Bemerkungen vergleichen, so sehen wir, dass die Römischen Positionen des Cometen alle auf Beobachtungen am Ringmicrometer oder an einem Kreuzmicrometer beruhen und daher unstreitig den Beobachtungen am Filarmicrometer an Genauigkeit nachstehen, dass ferner von den drei Cambridger Beobachtungen die beiden ersten von dem Beobachter, Herrn Breen, als wenig zuverlässig und nur auf einmaliger Vergleichung beruhend aufgeführt sind. Ueber die Berliner Beobachtungen ist nichts näher angegeben, als dass die erste auf 4, die letzte auf 2 Einstellungen beruht. Die Pulkowaer Bestimmungen dagegen, obgleich sie wegen der Ungunst der Umstände nicht zu den genauesten Arbeiten dieser Art gezählt werden dürfen, bieten doch in jedem einzelnen Fall vollständige Beobachtungsreihen am Filarmicrometer dar. Es können daher die Oerter der Cometenköpfe wie sie aus den hiesigen Vergleichungen mit benachbarten Sternen hervorgehen, nur unerheblichen Unsicherheiten unterworfen sein. Das letztere findet, wie später gezeigt werden wird, seine vollkommene Bestätigung in der zum Theil überraschend guten Uebereinstimmung der verschiedenen, in jeder einzelnen Nacht erhaltenen Beobachtungen unter einander.

Um den Astronomen ein Mittel zu geben, sich über die unter den obwaltenden ungünstigen Umständen hier erreichte Genauigkeit der Positionen ein Urtheil zu bilden, halte ich es für

geeignet, mein bei dieser Gelegenheit geführtes Tagebuch ausführlich mitzutheilen. Es enthält, neben den zur Ortsbestimmung angestellten Beobachtungen, einige nähere Angaben über die Erscheinungen am Cometen selbst, wie ich sie während der Beobachtungen oder gleich nach dem Schluss derselben niedergeschrieben habe. Gewiss wäre es wünschenswerth, dass auch von den andern Astronomen, die im vergangenen Jahre den Bielaschen Cometen beobachtet haben, mehr Details über ihre Beobachtungen veröffentlicht würden, um dadurch den künftigen Rechnern es möglich zu machen, den einzelnen Bestimmungen die ihrer relativen Genauigkeit entsprechenden Gewichte beizulegen. Diess gilt ganz besonders in Bezug auf die Römischen Beobachtungen, die der Zahl nach die Pulkowaer übertreffen und dadurch sowohl, wie durch den Umstand, dass sie zum Theil noch dem August angehören, eine besondere Wichtigkeit erlangen.

Es ist zwar das Ertheilen von relativen Gewichten in Bezug auf Cometenbeobachtungen nicht als allgemein gültige Regel aufzustellen, indem in neuerer Zeit, auf einigen Sternwarten wenigstens, die Genauigkeit dieser Beobachtungen so weit gediehen ist, dass die Abweichungen derselben von der berechneten Bahn nicht sowohl eigentlichen zufälligen Beobachtungsfehlern, die von der Unvollkommenheit der angewandten Hülfsmittel abhängig sind, zugeschrieben werden müssen, als vielmehr dem an verschiedenen Tagen und bei verschiedenen Instrumenten sich verschieden gestaltenden Urtheile über die Lage des Kerns in der Nebelmasse oder auch vielleicht dem Umstande, dass der scheinbare Kern nicht genau mit der Richtung des Schwerpunktes des ganzen Cometen übereinstimmt. Vor Ertheilung von verschiedenen Gewichten wäre daher zu untersuchen, ob die Abweichungen der Beobachtungen von einer bereits sehr nahezu richtigen Bahn bloss zufälligen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden dürfen oder vorzugsweise durch jene constant auf alle Beobachtungen eines Abends wirkenden Umstände erklärt werden müssen. Ist das letztere der Fall, so ist es am richtigsten so viel als möglich Beobachtungen mit gleichem Gewicht unter einander zu vereinigen, indem alsdann vorausgesetzt werden muss, dass im Mittel aus vielen verschiedenartigen Beobachtungen jene für den einzelnen Beobachter und an einzelnen Abenden constant wirkenden Ursachen sich gegenseitig compensiren werden. Müssen wir dagegen annehmen, dass die zufälligen Beobachtungsfehler in Folge der verschiedenen befolgten Beobachtungsmethoden oder aus anderen Gründen in jenen Abweichungen überwiegend sind, so müssen wir den einzelnen Beobachtungen oder wenigstens den einzelnen Beobachtungsreihen relative Gewichte beilegen.

In Betreff der Beobachtungen des Bielaschen Cometen vom vergangenen Jahre müssen wir, glaube ich, den letztern Fall voraussetzen. Es sind die Beobachtungen unter so ungünstigen Bedingungen angestellt, dass wir jeder einzelnen einen erheblichen zufälligen Fehler zuschreiben müssen, deren Grösse noch in jedem einzelnen Falle durch die Umstände der Beobachtung, wie z. B. durch die günstigere oder ungünstigere Lage der Vergleichsterne, durch den Zustand der Bilder u. s. w., bedingt ist. Auch sind die Beobachtungen nicht zahlreich und mannigfaltig genug, um die Vereinigung mehrerer Beobachtungen zu Mittelwerthen zu gestatten, und dadurch eine Verringerung der zufälligen Fehler in den der Rechnung zu Grunde zu legenden

Werthen herbeizuführen, sondern jede einzelne Beobachtung wird hier von Bedeutung sein. Damit aber der einzelnen Beobachtung nicht ein ungebührlicher Einfluss auf die Rechnungsresultate eingeräumt werde, muss derselben ihr Gewicht ertheilt werden. Kann vorausgesetzt werden, dass die in jedem einzelnen Falle befolgte Beobachtungsmethode eine vollkommen tadellose gewesen ist, und dass die Reductionselemente hinlänglich scharf bekannt gewesen sind, so bietet die Uebereinstimmung der einzelnen in jeder Nacht erhaltenen Beobachtungen mit ihrem Mittel, unter Berücksichtigung der Anzahl der Vergleichungen, den geeignetsten und vielleicht einzig rationellen Weg zu den relativen Gewichten zu gelangen. Dieses Verfahren wird aber sehr unsicher, wenn die Anzahl der Beobachtungen nur gering gewesen ist. In diesem Falle, der, wie es scheint, vorwiegend bei den vorigjährigen Beobachtungen des Bielaschen Cometen stattfindet, können allein die Angaben seitens der Beobachter, über die nähern Umstände ihrer Beobachtungen, dem Rechner eine Richtschnur für das den einzelnen Resultaten zu ertheilende Gewicht geben. Es ist daher hier besonders wünschenswerth, von den verschiedenen Beobachtungen alle Details ihrer Beobachtungen zu erhalten.

Das Instrument, an dem ich beobachtet habe, der Pulkowaer Refractor, ist durch die *Description de l'Observatoire de Poulkova* hinlänglich bekannt, und die von mir befolgten Beobachtungsmethoden sind bereits bei mehreren anderen Gelegenheiten, speziell aber von meinem Vater in seiner Schrift über die 1835 in Dorpat von ihm angestellten Beobachtungen des Halleyschen Cometen in aller Umständlichkeit gegeben. Ich habe daher an allgemeinen Bemerkungen hier nur vorauszuschicken, dass alle Beobachtungen im dunkeln Felde mit erleuchteten Fäden angestellt sind, und dass bei Beobachtung von Rectascensions- und Declinationsdifferenzen die Richtung der täglichen Bewegung so eingestellt wurde, wie sie im Meridiane bestimmt war. Es ergab sich aber später, dass die als im Meridiane stattfindend angenommene Richtung der täglichen Bewegung um einige Minuten von der wahren Richtung abwich. Die entsprechenden Correctionen sind dafür nachträglich angebracht. Indem ich somit zur Mittheilung der Copie meines Beobachtungsjournals übergehe, bemerke ich nur noch, dass die hier gegebenen Positionswinkel bereits für den Unterschied der Richtung der täglichen Bewegung im Meridiane von 270° verbessert sind. Alle Positionswinkel sind auf der Seite des Cometen abgelesen; und bei den Messungen der Distanzen wurde die Richtung der Micrometerfäden immer nach dem Augenmass senkrecht zur Richtung der beiden unter einander zu vergleichenden Objecte gehalten.

COPIE DES BEOBACHTUNGS-JOURNALS.

1852 September 18.

Nur ein Kopf des Cometen wurde erkannt. Wie es sich später gezeigt hat, war diess der nördlich vorangehende *B*. Sein scheinbarer Durchmesser beträgt wenigstens 30″. In der Nebelmasse zeigt sich eine erhebliche Zunahme der Helligkeit zum Centro hin, doch kein entschiedener Kern, bei ausserordentlich unruhiger Luft. Der Totaleindruck der Helligkeit des Cometen war nahezu gleich der des Vergleichsterns *a*, 8. 9. Gr. Dieser Vergleichstern ging dem Cometen anfangs südlich, später nördlich voran. Vergrösserung 207 Mal. Therm. + 3°,1 R. Uhrcorrection auf Sternzeit — $0^m\,3^s{,}6$.

Uhrzeit.	Pos.-Winkel.	Coincidenz.	Micr.-Schraube.	Distanz.
$8^h\,11^m\,11^s$	86° 44′			
12 25	88 2			
13 14	88 14			
14 1	89 14			
		58,258		
16 42			43,81	$14^r{,}44 = 140''{,}5$
17 32			43,32	14,93 = 145,3
18 12			43,41	14,84 = 144,4
19 8			42,36	15,89 = 154,6
20 16			42,25	16,00 = 155,7
22 6			41,65	16,60 = 161,5
		58,245		
24 19	93 56			
25 16	95 2			
25 58	94 26			
26 45	95 44			
		58,257		
35 39			78,76	20,51 = 199,6
36 12			78,83	20,58 = 200,3
36 56			79,31	21,06 = 204,9
37 44			79,35	21,10 = 205,3
38 10			79,39	21,14 = 205,7
38 42			79,75	21,50 = 209,2
		58,253		
41 9	98 56			
41 44	100 26			
42 35	100 2			
44 20	100 38			

September 20.

B befindet sich sehr genau an dem am 18. September bestimmten Orte, nach Anbringung der Bewegung nach Santini's Ephemeride. Im Sucher wurde auch der Kopf *A* leicht erkannt. Beide Köpfe sind nahezu von gleicher Helligkeit, doch ist *B* wohl ein wenig heller und hat einen bestimmten Kern. Der Kern von *A* ist nicht so deutlich wie der von *B*; von ihm ausgehend erstreckt sich eine grössere Helligkeit der Nebelmasse in der Richtung nach *B* hin. In derselben Richtung erscheint der ganze Kopf *A* weiter ausgedehnt. Diese Längenausdehnung beträgt ungefähr 1′, die Breite nur 40″. Der Durchmesser des kreisförmigen Nebels von *B* wird gleichfalls auf 40″ geschätzt, doch sind schwache Nebelspuren auch noch weiter zu verfolgen. In *B* liegt die ganze Nebelmasse nahezu concentrisch mit dem fixsternartigen Kern (Fig. I). — *A* wird verglichen mit einem nördlich vorangehenden Stern *c*, 7. Gr.; *B* mit einem gleichfalls nördlich vorangehenden Stern *b*, 6. Gr. Vergrösserung 138 Mal. Therm. + $3^{\circ},6$ R. Uhrcorrection = — $0^m\ 4^s,8$.

A et c.

Uhrzeit.	Δ AR.	Coincidenz.	Micr.-Schraube.	Δ Decl.
$3^h\ 37^m\ 19^s$	+ $1^m\ 4^s,8$			
31	5,0			
39 5	4,9			
17	5,0			
41 9	5,4			
22	5,4			
4 1 10			63,56	— $5^r,29$ = — $51'',5$
4 25			63,92	5,65 = 55,0
7 9			64,51	6,24 = 60,8
8 40			64,77	6,50 = 63,3
		58,266		
13 1	+ 1 11,5			
11	11,2			
14 46	11,3			
58	11,8			

B et b.

Uhrzeit.	Δ AR.	Coincidenz.	Micr.-Schraube.	Δ Decl.
3 43 15	+ 0 51,2			
29	51,7			
44 50	52,2			
45 3	52,0			
46 30	52,4			
42	52,4			
		58,282		
53 45			73,66	— 15,38 = — 149,7
55 13			73,73	15,45 = 150,3
57 1			74,45	16,17 = 157,4
58 36			74,83	16,55 = 161,0
4 16 47	+ 0 58,4			
58	57,5			

September 23.

A ist heute erheblich schwächer als *B* und hat gar keinen Kern. Bei nicht vollständig durchsichtiger Luft ist die länglichte Form von *A* nur schwer zu erkennen. Es ist aber doch augenfällig, dass die Nebelmasse nicht gleichförmig um den hellsten Punkt vertheilt ist. Die Nebelmasse von *B* liegt dagegen concentrisch und nach allen Richtungen in gleicher Intensität um den Kern.

A et d.

A wird verglichen mit einem südlich vorangehenden Stern *d*, 9.10. Grösse. Vergrösserung 207 Mal. Therm. + 3°,5 R. Uhrcorrection = — 0^m 6^s,3.

Uhrzeit.	Pos.-Winkel.	Coincidenz.	Micr.-Schraube.	Distanz.
4^h 2^m 16^s	81° 32′			
3 14	82 44			
3 50	83 44			
4 28	84 2			
		58,250		
6 20			44,36	13^r,89 = 135″,2
7 4			44,18	14,07 = 136,9
8 19			44,09	14,16 = 137,8
10 24			43,41	14,84 = 144,4
		58,253		
12 26	89 8			
13 1	90 26			
13 23	89 38			
14 12	90 14			

B et e.

B wird verglichen mit einem südlich folgenden Stern *e*, 10. Gr. Vergrösserung 138 Mal. Therm. + 3°,5 R. Uhrcorrection = — 0^m 6^s,3.

Uhrzeit.	Δ AR.	Coincidenz.	Micr.-Schraube.	Δ Decl.
4^h 20^m 39^s	— 0^m 25^s,3			
51	25,0			
21 53	24,5			
22 4	25,0			
22 55	25,0			
23 7	24,7			
26 58			79,79	+ 21^r,52 = + 209″,4
28 0			79,84	21,57 = 209,9
28 47			79,69	21,42 = 208,4
30 20			79,46	21,19 = 206,2
		58,269		

Der Comet verschwand in der hellen Dämmerung. Die Beobachtungen von *B* sind schon ein wenig unsicher wegen der Schwäche der verglichenen Objecte.

September 25.

A ist heute bedeutend schwächer als *B*. Der letztere Kopf konnte recht deutlich im Sucher des Refractors gesehn werden, während der Ort von *A* kaum geahndet wurde. Der Durchmesser von *A* auf 30″ geschätzt, der von *B* betrug 50″ bis 60″. *A* ist rund, *B* ein wenig oblong. Die hellste Stelle von *A* liegt nicht im Centro seiner Nebelmasse, sondern abgewandt von der Richtung nach *B* hin. Der Kern von *B* dagegen ist *A* zugewandt; der hellste Theil des ungleichförmig um den Kern von *B* vertheilten Nebels, liegt in einer von *A* abgewandten Richtung. Der Positionswinkel dieser Richtung, der zugleich der grössten Ausdehnung von *B* entspricht, wurde = 286° beobachtet, kurz vor Beginn der Micrometermessungen. S. Fig. II.

B et f.

B wird mit einem nördlich vorangehenden Stern *f*, 9. Grösse verglichen. Vergrösserung 207 Mal. Therm. = + 5°,8 R. Uhrcorrection = — $0^m 7^s{,}3$.

Uhrzeit.	Δ AR.	Coincidenz.	Micr.-Schraube.	Δ Decl.
$4^h\ 5^m\ 38^s$	$+1^m\ 38^s{,}6$			
50	39,0			
7 59	39,4			
8 10	39,2			
		59,741		
12 42			64,29	$-4^r{,}54 = -44''{,}2$
15 5			64,39	4,65 = 45,3
18 0			65,05	5,30 = 51,6
21 2			65,32	5,58 = 54,3
		59,749		
24 42	+ 1 42,4			
52	42,5			
27 4	43,1			
15	42,6			

A et g.

Der Vergleichstern *g*, 8. 9. Grösse, folgt nördlich auf *A*. Vergrösserung 207 Mal. Therm. = + 5°,8 R. Uhrcorrection = — $0^m 7^s{,}3$.

Uhrzeit.	Pos.-Winkel.	Coincidenz.	Micr.-Schraube.	Distanz.
$4^h\ 29^m\ 52^s$	196° 56′			
30 27	198 20			
31 18	197 2			
31 53	196 8			
33 10			48,99	$10^r{,}77 = 104''{,}8$
34 25			48,71	11,05 = 107,5
35 8			48,97	10,79 = 105,0
36 6			48,76	11,00 = 107,0
36 57			48,28	11,48 = 111,7
		59,761		
39 47	183 14			
40 32	182 38			
41 26	183 14			
42 16	178 20			

Die beiden letzten Positionswinkel unsicher wegen Schwäche des Cometen bei der hellen Dämmerung.

September 28.

Bei hellem Mondschein und starker Dämmerung konnte *B* nur mit Mühe erkannt werden, indem durch die zuvor vorläufig berechnete Lage zu Lalande 20224 sein Ort sehr genau bezeichnet war. Nach *A* wurde nicht streng gesucht, um die Zeit zur Beobachtung von *B* nicht zu versäumen.

B et h.

Der Vergleichstern *h* 6. 7. Grösse folgt südlich auf *B*. Vergrösserung 138 Mal. Therm. = + 2°,9 R. Uhrcorrection = — 0^m 9^s,3.

Uhrzeit.	Δ AR.	Coincidenz.	Micr.-Schraube.	Δ Decl.
4^h 35^m 8^s	— 1^m 16^s,5			
20	17,2			
39 21	16,4			
34	16,0			
41 28	16,4			
42	16,1			
45 39			27,10	+ 30^r,97 = + 301″,4
48 34			26,85	31,22 = 303,8
51 31			27,88	30,19 = 293,8
55 31			27,84	30,23 = 294,2
		58,074		
5 1 18	— 1 12,0			
31	12,2			
3 22	11,8			
36	11,9			
5 27	11,0			
71	11,5			

Der Comet verschwand in der Dämmerung.

Bei der Beobachtung der Differenzen in gerader Aufsteigung wurden die Fäden am 20. und 23. September auf einem 8′ kleinern Positionswinkel eingestellt, als wie ihn die Richtung der täglichen Bewegung im Meridiane verlangte. Für den 25. und 28. September war diese Einstellung nur um 5′ zu klein. Hiefür sind an die mittleren abgeleiteten ΔAR, für die entsprechenden Tage, folgende Correctionen anzubringen.

		Corr. Δ AR.
Sept. 20	*A* et *c*	+ 0″,14 = + 0^s,009
	B et *b*	+ 0,36 = + 0,024
Sept. 23	*B* et *e*	— 0,50 = — 0,033
Sept. 25	*B* et *f*	+ 0,07 = + 0,005
Sept. 28	*B* et *h*	— 0,44 = — 0,029

In Bezug auf die Differenzen in Declination sind die entsprechenden Correctionen als gänzlich verschwindend anzusehn.



Obgleich mehrere von den Vergleichsternen bereits in der *Histoire céleste* vorkommen und auch von Bessel in seinen Zonen bestimmt sind, so schien es doch wünschenswerth, alle Sterne von neuem zu bestimmen, um den wenigen Positionen des Cometen eine möglichst grosse Schärfe zu geben. Die Bestimmung der Vergleichsterne geschah am Repsold'schen Meridiankreise durch Herrn Sabler. Das folgende Verzeichniss enthält die Beobachtungen Sabler's, nach Anbringung der instrumentellen Correctionen.

BEOBACHTETE POSITIONEN DER VERGLEICHSTERNE.

Stern.	Datum.	Grösse.	AR.	Decl.	Anmerkungen.
a	1853 Jan. 27	8.9	$9^h 30^m 34^s,34$	+10° 19′ 38″,3	
	« 31	8.9	34,32	38,3	
	Febr. 4	8.9	34,41	40,6	
b	Jan. 27	6.7	9 39 28,84	+ 9 14 57,6	
	« 31	7	28,92	55,5	
	Febr. 5	7	29,06	57,1	
c	Jan. 27	7	9 41 4,60	+ 8 58 57,5	
	« 31	7	4,75	56,2	
	Febr. 4	7.8	4,61	57,2	
d	Febr. 4	9.10	9 56 4,41	+ 7 18 20,6	Sehr schwach.
	« 5	9.10	4,59	18,1	Schwach.
	« 6	9.10	4,49	22,5	Schwach.
e	Febr. 5	10	9 54 55,57	+ 7 28 18,9	Sehr schwach, mehr taxirt.
	März 15	10	55,34	19,7	Sehr schwach, Decl. mehr taxirt.
	« 16	10	55,34	16,9	Vielleicht etwas sicherer.
f	Jan. 27	9.10	10 1 58,76	+ 6 26 26,5	Sehr schwach.
	« 31	9.10	59,00	23,3	Schwach.
	Febr. 5	9.10	59,22	16,4	
	März 16	9.10	59,34	18,7	Ziemlich sicher.
g	Jan. 27	9	10 5 28,81	+ 6 13 20,4	Schwach.
	« 31	8.9	28,97	13,6	
	Febr. 4	8.9	28,95	14,2	
	März 15	8.9	29,12	17,2	
h	Jan. 27	6.7	10 18 31,61	+ 4 40 39,1	Gut.
	« 31	6.7	31,86	40,8	
	Febr. 4	6.7	31,90	38,9	

Herr Candidat Hübner, der sich gegenwärtig zu seiner weitern Ausbildung in der praktischen Astronomie auf der Pulkowaer Sternwarte aufhält, übernahm die Reduction der Beobachtungen. Zuerst leitete er aus den beobachteten Positionen der Vergleichsterne die folgenden mittleren Oerter derselben für den Anfang des Jahres 1853 ab.

Stern.	AR. med. 1853,0	Decl. med. 1853,0
a	$9^h 30^m 33^s,84$	$+ 10° 19' 40'',0$
	33,77	40,4
	33,81	42,9
	9 30 33,81	+ 10 19 41,1
b	9 39 28,36	+ 9 14 59,3
	28,38	57,5
	28,46	59,5
	9 39 28,40	+ 9 14 58,8
c	9 41 4,12	+ 8 58 59,2
	4,21	58,2
	4,02	59,5
	9 41 4,12	+ 8 58 59,0
d	9 56 3,84	+ 7 18 22,9
	4,01	20,4
	3,90	25,0
	9 56 3,92	+ 7 18 22,8
e	9 54 54,99	+ 7 28 21,3
	54,63	23,5
	54,63	20,7
	9 54 54,75	+ 7 28 21,8
f	10 1 58,32	+ 6 26 27,9
	58,50	25,1
	58,65	18,7
	58,62	22,8
	10 1 58,52	+ 6 26 23,6
g	10 5 28,38	+ 6 13 21,8
	28,48	15,4
	28,40	16,4
	28,38	21,3
	10 5 28,41	+ 6 13 18,7
h	10 18 31,21	+ 4 40 40,2
	31,39	42,4
	31,37	41,0
	10 18 31,32	+ 4 40 41,2

Indem man hier den Beobachtungen aller Sterne dieselbe Genauigkeit zuschreibt, ergibt sich aus der Vergleichung der einzelnen Bestimmungen mit ihren resp. Mittelwerthen, der wahrscheinliche Fehler einer einmaligen Beobachtung: in AR $= 0^s,075$; in Decl. $= 1'',61$. Augenscheinlich sind aber die schwächeren Sterne *d*, *e*, *f*, *g* viel weniger genau bestimmt, als die 4 helleren. Für die beiden Gruppen ergeben sich getrennt die wahrscheinlichen Fehler einer einmaligen Bestimmung:

für die helleren Sterne: in AR $= 0^s,051$; in Decl. $= 0'',78$
« « schwächeren - $= 0,089$ $= 2,05$

und folglich für's Mittel aus 3 Beobachtungen:

der wahrscheinliche Fehler für die helleren Sterne: in AR $= 0^s,029$; in Decl. $= 0'',45$
« « « « « schwächeren $= 0,052$ $= 1,18$

Aus den vorstehend gegebenen mittleren Positionen der Vergleichsterne sind folgende scheinbare Oerter derselben für die Tage, an welchen der Comet mit jedem von ihnen verglichen ist, abgeleitet.

			AR app.	Decl. app.
1852	Sept. 18	*a*	$9^h 30^m 30^s,75$	$+10° 19' 57'',22$
	« 20	*b*	9 39 25,35	+ 9 15 15,35
	« 20	*c*	9 41 1,08	+ 8 59 15,65
	« 23	*d*	9 56 0,91	+ 7 18 40,16
	« 23	*e*	9 54 51,75	+ 7 28 39,18
	« 25	*f*	10 1 55,55	+ 6 26 41,26
	« 25	*g*	10 5 25,43	+ 6 13 36,51
	« 28	*h*	10 18 28,37	+ 4 40 59,46

Nachdem die scheinbaren Oerter der Vergleichsterne abgeleitet waren, ging Herr Hübner an die Reduction meiner Micrometermessungen auf ein mittleres Moment für jeden Beobachtungstag und an die Berechnung des Einflusses der Refraction auf dieselben. Zu dieser Reduction auf das mittlere Moment, muss die Bewegung des Cometen näherungsweise bekannt sein. Wegen der grossen Fehler der Santinischen Ephemeride durften aber die aus derselben folgenden Bewegungen nicht ohne weiteres der Rechnung zu Grunde gelegt werden, sondern es musste erst untersucht werden, ob letztere nicht auch erhebliche Correctionen bedurften. Zu dem Zwecke wurden genäherte Oerter des Cometen berechnet und dieselben darauf mit der Ephemeride verglichen. Diese Vergleichung ergab die folgenden Correctionen der Santinischen Ephemeride:

GEGEN DEN KOPF B

18 Sept.	$13^h 32^m$	Mittl. Greenw. Zeit,	Corr. Eph. in AR $=$	$+13^m 53^s,2$	in Decl. $= -1° 47' 49''$
20 «	13 54	«		+13 36,0	−1 46 37
23 «	14 8	«		+13 12,3	−1 44 16
25 «	13 55	«		+12 56,1	−1 42 27
28 «	14 17	«		+12 32,2	−1 39 8

Gegen den Kopf A

20 Sept.	14h 4m Mittl. Greenw. Zeit,	Corr. Eph. in AR =	+ 15m 25s,7	in Decl. = − 2° 0′ 47″
23 «	13 54		+ 14 59,4	− 1 58 4
25 «	14 14		+ 14 40,7	− 1 56 2

Die Differenzen zwischen den auf einander folgenden Correctionen der Ephemeride führen durch Interpolation auf die Verbesserung der von Santini gegebenen zweitägigen Bewegungen des Cometen. Herrn Hübner's Rechnung gab, den mittleren Epochen meiner Beobachtungen entsprechend, folgende Resultate:

für den Kopf B

	Correction der zweitägigen Bewegung. in AR	in Decl.
Sept. 18	− 17s,7 = − 4′ 25″	+ 1′ 2″
« 20	− 16,5 = − 4 8	+ 1 20
« 23	− 16,1 = − 4 2	+ 1 43
« 25	− 16,1 = − 4 2	+ 1 58
« 28	− 15,4 = − 3 51	+ 2 26

für den Kopf A

Sept. 20	− 17s,0 = − 4′ 15″	− 1′ 42″
« 23	− 18,2 = − 4 33	− 1 56
« 25	− 19,0 = − 4 45	− 2 6

Nach Anbringung dieser Correctionen an die aus der Santinischen Ephemeride für die Beobachtungsepochen folgenden zweitägigen Bewegungen, folgt die Bewegung in einer Stunde mittlerer Sonnenzeit:

für den Kopf B

		in AR	in Decl.
Sept. 18	3h 25m Pulk. Sternzeit	+ 179″,87	− 82″,85
« 20	3 56 « «	+ 177,67	− 83,27
« 23	4 26 « «	+ 173,92	− 83,44
« 25	4 17 « «	+ 171,35	− 83,21
« 28	4 50 « «	+ 167,73	− 82,29

für den Kopf A

Sept. 20	4h 5m Pulk. Sternzeit	+ 177″,50	− 82″,81
« 23	4 8 « «	+ 173,27	− 83,17
« 25	4 35 « «	+ 170,42	− 83,04

Diese stündlichen Bewegungen können offenbar nur um einen sehr kleinen Bruchtheil der Secunde unsicher sein. Es konnten daher mit Hülfe derselben die Beobachtungen, deren Dauer für jeden einzelnen Kopf in keinem Fall sich auf eine Stunde beläuft, auf ein mittleres Moment reducirt werden, ohne dass dabei zu befürchten war, dass durch diese Reduction, falls die Beobachtungen nicht symmetrisch zu dem zu wählenden mittleren Momente lagen, irgend merkliche Fehler in die abzuleitende Position hineingebracht würden, oder dass die Uebereinstimmung der verschiedenen auf dieses mittlere Moment reducirten Messungen wesentlich gefährdet würde.

Bei der Reduction der Micrometermessungen auf ein mittleres Moment für jede Beobachtungsreihe sind streng die Regeln befolgt, welche von W. Struve in seinen „*Beobachtungen des Halley'schen Cometen*" pag. 88 u. folg. gegeben sind.

In der nachfolgenden Zusammenstellung der Ergebnisse von Herrn Hübner's Rechnungen sind daher auch dieselben Bezeichnungen beibehalten wie in dem angeführten Werke. Die Bedeutung der einzelnen Grössen ergibt sich übrigens auch leicht aus dem Zusammenhange. Es mag vielleicht auffallen, dass es Herrn Hübner jedes Mal gelungen ist, bei seinen Rechnungen gleich von einer dem wahrscheinlichsten Werthe sehr nahen Hypothese auszugehn. Diess erklärt sich aber dadurch, dass er, der grösseren Strenge wegen, die Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in allen Fällen, wo dieselbe in Anwendung kam, zwei Mal durchgeführt hat.

Auch die Berechnung des Einflusses der Refraction auf die Relationen des Cometen zu den Vergleichsternen ist nach den von meinem Vater in dem angeführten Werke gegebenen Formeln und Tafeln ausgeführt; unter Berücksichtigung jedoch der kleinen dort vernachlässigten Glieder, die in diesem Falle bei dem niedrigen Stande des Cometen von Bedeutung wurden. Diese Glieder sind, nach „Peters und O. Struve, *Bestimmung der Bahn des im December 1839 entdeckten Cometen*, pag. 22", in der Formel für dP eine Correction $+ 2\sigma \sin p \tang \delta \tang z$ und in der Formel für dA die Correction $- D \sec \delta \tang \delta \sin p \tang z$.

In der folgenden Zusammenstellung hat Herr Hübner auch den Einfluss der Parallaxe auf den Ort des Cometen, nach der Santinischen Ephemeride berechnet, angegeben. Bei einer künftigen Benutzung dieser Beobachtungen wird dieser Einfluss natürlich einer neuen Berechnung nach genaueren Elementen der Bahn unterworfen werden müssen.

In Betreff der nachfolgenden Rechnungen ist nur noch anzuführen, dass ich je zwei bei unverrückter Stellung des Fernrohrs beobachtete Differenzen der geraden Aufsteigung immer in ein Resultat vereinigt habe. Es sind nämlich zwei kurz auf einander folgende Durchgänge durch die beiden Micrometerfäden nicht als von einander ganz und gar unabhängige Beobachtungsresultate anzusehn, da dieselben oft durch die nämlichen Einflüsse, wie kleine Verstellungen im Instrumente, oder wie beim Durchgange eines Cometen das jedesmalige Urtheil über die Lage des Kerns, auf gleiche Weise afficirt werden. Sie dürfen daher zusammen nur für ein Resultat gelten, dessen zufälliger Fehler ein wenig kleiner ist, als wenn nur ein Faden beobachtet wäre.

September 18.

Kopf B

$(t) = 3^h 25^m 34^s$ Uhrzeit $= 3^h 25^m 30^s{,}4$ Sternzeit $= 15^h 33^m 3^s{,}8$ mittl. Zeit in Pulkowa.
Annahme für (t): $a = 169''{,}82$; $P = 95° 6'{,}3$ oder $(A) = + 171''{,}93$; $(D) = - 15''{,}11$

Sternzeit.	z	Refraction da	Refraction dP
$3^h 12^m 40^s$	83° 12′		+ 24′,8
18 55	82 26	+ 0″,64	
25 30	81 37		+ 19,2
37 10	80 10	+ 0,77	
42 23	79 32		+ 13,3

Gleichungen.

aus den Richtungen	Fehler	aus den Abständen	Fehler
$-1''{,}60 = +0{,}036\eta - 0{,}999\theta$	$+1''{,}66$	$-1''{,}95 = +0{,}984\eta - 0{,}020\theta$	$+1''{,}96$
$-0{,}53 = +0{,}023\eta - 1{,}000\theta$	$+0{,}59$	$+0{,}35 = +0{,}983\eta - 0{,}028\theta$	$-0{,}34$
$-1{,}28 = +0{,}014\eta - 1{,}000\theta$	$+1{,}34$	$-2{,}53 = +0{,}983\eta - 0{,}034\theta$	$+2{,}54$
$-0{,}06 = +0{,}006\eta - 1{,}000\theta$	$+0{,}12$	$+4{,}91 = +0{,}983\eta - 0{,}042\theta$	$-4{,}90$
		$+2{,}60 = +0{,}982\eta - 0{,}051\theta$	$-2{,}59$
$-1{,}06 = -0{,}079\eta - 0{,}997\theta$	$+1{,}12$	$+2{,}91 = +0{,}982\eta - 0{,}065\theta$	$-2{,}90$
$+1{,}07 = -0{,}085\eta - 0{,}996\theta$	$-1{,}01$		
$-1{,}50 = -0{,}090\eta - 0{,}996\theta$	$+1{,}56$	$-0{,}56 = +0{,}973\eta - 0{,}144\theta$	$+0{,}58$
$+1{,}53 = -0{,}095\eta - 0{,}995\theta$	$-1{,}48$	$-1{,}58 = +0{,}973\eta - 0{,}147\theta$	$+1{,}60$
		$+0{,}81 = +0{,}973\eta - 0{,}150\theta$	$-0{,}79$
$-1{,}86 = -0{,}165\eta - 0{,}986\theta$	$+1{,}80$	$-1{,}30 = +0{,}972\eta - 0{,}154\theta$	$+1{,}32$
$+3{,}36 = -0{,}167\eta - 0{,}985\theta$	$-3{,}30$	$-2{,}24 = +0{,}972\eta - 0{,}156\theta$	$+2{,}26$
$+1{,}10 = -0{,}170\eta - 0{,}985\theta$	$-1{,}04$	$-0{,}41 = +0{,}972\eta - 0{,}158\theta$	$+0{,}43$
$+2{,}00 = -0{,}177\eta - 0{,}984\theta$	$-1{,}94$		

Wahrscheinlicher Fehler einer Gleichung $= 1''{,}37$.

Endgleichungen.

$$+0''{,}14 = +11{,}615\eta - 0{,}182\theta$$
$$-0{,}74 = -0{,}182\eta + 11{,}997\theta.$$

Endwerthe.

		W. F.		W. F.
$\eta =$	$+0''{,}01$	0″,40	$\theta = -0''{,}06$	0″,40
$(A) =$	$+2'\,51{,}93$		$(D) = -0'\,15{,}11$	
Parallaxe $=$	$-3{,}13$		$+5{,}21$	
$A =$	$+2\;48{,}81$		$D = -0\;\;9{,}96$	
Ort des Sterns *a*	142° 37 41,25	0,44	+ 10° 19 57,22	0,45
Ort des Kopf *B*	142 40 30,06	0,59	+ 10 19 47,26	0,60

September 20.

Kopf A

(t) = 4ʰ 5ᵐ 24ˢ Uhrzeit = 4ʰ 5ᵐ 19ˢ,2 Sternzeit = 16ʰ 4ᵐ 54ˢ,3 mittl. Zeit in Pulkowa.

Sternzeit.	z	Refraction dA	Refraction dD
3ʰ 39ᵐ 12ˢ	82° 33′	+ 0″,11	
4 5 19	79 16		− 0″,32
13 54	78 11	+ 0,14	

Reduction auf (t) m + r	A reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel	Reduction auf (t) m′ + r′	D reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel
+ 1′ 22″,67	+ 17′ 36″,17	− 5″,51	− 6″,15	− 0′ 57″,67	− 0″,31
+ 1 17,46	31,71	− 1,06	− 1,44	56,46	− 1,52
+ 1 11,31	32,31	− 1,65	+ 2,09	58,67	+ 0,69
			+ 4,18	59,11	+ 1,13
− 0 22,58	27,67	+ 2,99	Mittel =	− 0 57,98	
− 0 27,79	25,46	+ 5,20			
Mittel =	+ 17 30,66				
Corr. für tägl. Bew.	+ 0,14				

Endwerthe.

		W. F.		W. F.
(A) =	+ 17′ 30″,80	1″,26	(D) = − 0′ 57″,98	0″,40
Parallaxe	− 3,08		+ 5,14	
A =	+ 17 27,72		D = − 0 52,84	
Ort des Sterns c	145° 15 16,20	0,44	+ 8 59 15,65	0,45
Ort des Kopf A	145 32 43,92	1,34	+ 8 58 22,81	0,60

Kopf B

(t) = 3ʰ 56ᵐ 9ˢ Uhrzeit = 3ʰ 56ᵐ 4ˢ,2 Sternzeit = 15ʰ 55ᵐ 40ˢ,8 mittl. Zeit in Pulkowa.

Sternzeit.	z	Refraction dA	Refraction dD
3ʰ 44ᵐ 58ˢ	81° 24′	+ 0″,62	
56 9	80 0		− 0″,97
4 16 52	77 23	+ 0,40	

Reduction auf (t) m + r	A reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel	Reduction auf (t) m′ + r′	A reducirt auf (t)	Abw. vom Mittel
+ 0′ 37″,79	+ 13′ 29″,54	+ 2″,10	− 4″,29	− 2′ 33″,93	− 1″,63
+ 0 33,17	34,67	− 3,03	− 2,26	32,58	− 2,98
+ 0 28,24	34,24	− 2,60	+ 0,23	37,11	+ 1,55
			+ 2,42	38,61	+ 3,05
− 1 1,15	28,10	+ 3,54	Mittel =	− 2 35,56	
Mittel =	+ 13 31,64				
Corr. für tägl. Bew.	+ 0,36				

September 20.

Endwerthe.

		W. F.		W. F.
	$(A) = + 13' \; 32''{,}00$	$1''{,}12$	$(D) = -2' \; 35''{,}56$	$0''{,}94$
Parallaxe	$= \quad -3{,}09$		$+5{,}15$	
	$A = +13 \; 28{,}91$		$D = -2 \; 30{,}41$	
Ort des Sterns b	$144° \; 51 \; 20{,}25$	0,44	$+9° \; 15 \; 15{,}35$	0,45
Ort des Kopf B	$145 \; 4 \; 49{,}16$	1,20	$+9 \; 12 \; 44{,}94$	1,04

September 23.

Kopf A.

$(t) = 4^h \, 8^m \, 0^s$ Uhrzeit $= 4^h \, 7^m \, 53^s{,}7$ Sternzeit $= 15^h \, 55^m \, 40^s{,}6$ mittl. Zeit in Pulkowa

Annahme für (t): $a = 138''{,}91$; $P = 86° \, 50'{,}3$ oder $(A) = +139''{,}84$; $(D) = +7''{,}66$

Sternzeit	z	Refraction da	Refraction dP
$4^h \; 1^m \, 54^s$	$82° \, 57'$	$+0''{,}31$	$+18'{,}5$
7 54	82 13	+0,40	+17,7
13 54	81 27	+0,47	+16,2

Gleichungen.

aus den Richtungen	Fehler	aus den Abständen	Fehler
$-1''{,}93 = +0{,}125\eta - 0{,}992\theta$	$+1''{,}91$	$+1''{,}23 = +0{,}989\eta + 0{,}074\theta$	$-1''{,}36$
$-1{,}01 = +0{,}112\eta - 0{,}994\theta$	$+1{,}01$	$+0{,}98 = +0{,}990\eta + 0{,}066\theta$	$-1{,}11$
$+0{,}18 = +0{,}104\eta - 0{,}994\theta$	$-0{,}19$	$-1{,}60 = +0{,}991\eta + 0{,}052\theta$	$+1{,}47$
$-0{,}21 = +0{,}096\eta - 0{,}995\theta$	$+0{,}20$	$-0{,}78 = +0{,}991\eta + 0{,}030\theta$	$+0{,}65$
$-0{,}03 = +0{,}010\eta - 1{,}000\theta$	$+0{,}03$		
$+2{,}61 = +0{,}005\eta - 1{,}000\theta$	$-2{,}61$		
$-0{,}03 = +0{,}001\eta - 1{,}000\theta$	$+0{,}04$		
$+0{,}46 = -0{,}006\eta - 1{,}000\theta$	$-0{,}46$		

Wahrscheinlicher Fehler einer Gleichung $= 0''{,}89$.

Endgleichungen.

$$-0''{,}52 = +3{,}971\eta - 0{,}228\theta$$
$$-0{,}01 = -0{,}228\eta + 7{,}964\theta.$$

Endwerthe.

		W. F.		W. F.
	$\eta = \quad -0''{,}13$	$0''{,}45$	$\theta = \quad -0''{,}01$	$0''{,}32$
	$(A) = + \; 2' \; 19{,}84$		$(D) = + \; 0' \; 7{,}66$	
Parallaxe	$= \quad -3{,}05$		$+5{,}13$	
	$A = + \; 2 \; 16{,}66$		$D = + \; 0 \; 12{,}78$	
Ort des Sterns d	$149° \; 0 \; 13{,}65$		$+7° \; 18 \; 40{,}16$	1,18
Ort des Kopf A	$149 \; 2 \; 30{,}31$		$+7 \; 18 \; 52{,}94$	1,22

September 23.

Kopf B

$(t) = 4^h 25^m 41^s$ Uhrzeit $= 4^h 25^m 34^s,7$ Sternzeit $= 16^h 13^m 18^s,7$ mittl. Zeit in Pulkowa.

Sternzeit	z	Refraction dA	Refraction dD
4ʰ 21ᵐ 49ˢ	80° 6′	— 0″,77	
28 25	79 16		+ 1″,16

Reduction auf (t) m + r	A reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel	Reduction auf (t) m′ + r′	D reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel
+ 13″,15	— 6′ 4″,10	+ 0″,22	+ 2″,98	+ 3′ 32″,42	+ 1″,18
+ 9,68	1,57	— 2,31	+ 4,38	34,30	— 0,70
+ 6,78	5,97	+ 2,09	+ 5,45	33,91	— 0,31
Mittel	= — 6 3,88		+ 6,56	33,78	— 0,18
Corr. für tägl. Bew.	— 0,50		Mittel	= + 3 33,60	

Endwerthe.

		W. F.			W. F.
(A) =	— 6′ 4″,38	0″,84	(D) =	+ 3′ 33″,60	0″,28
Parallaxe =	— 3,03			+ 5,10	
A =	— 6 7,41		D =	+ 3 38,70	
Ort des Sterns e	148° 42 56,25	0,75		+ 7° 28 39,18	1,18
Ort des Kopf B	148 36 48,84	1,15		+ 7 32 17,88	1,21

September 25.

Kopf A

$(t) = 4^h 35^m 9^s$ Uhrzeit $= 4^h 35^m 1^s,7$ Sternzeit $= 16^h 14^m 52^s,3$ mittl. Zeit in Pulkowa.

Annahme für (t): $a = 107'',90$; $P = 189° 55',3$ oder $(A) = -18'',70$; $(D) = -106'',29$.

Sternzeit	z	Refraction da	Refraction dP
4ʰ 30ᵐ 45ˢ	81° 27′	+ 0″,52	— 17′,7
35 2	80 55	+ 0,61	— 15,7
40 3	80 17	+ 0,69	— 12,8

Gleichungen.

aus den Richtungen	Fehler	aus den Abständen	Fehler
$-3'',74 = -0,942\eta + 0,320\Theta$	+ 3″,82	$-0'',97 = -0,226\eta - 0,974\Theta$	+ 0″,93
$+0,64 = -0,947\eta + 0,304\Theta$	— 0,56	$+0,83 = -0,191\eta - 0,981\Theta$	— 0,88
$+0,90 = -0,954\eta + 0,280\Theta$	— 0,82	$-2,29 = -0,172\eta - 0,985\Theta$	+ 2,24
$+1,06 = -0,959\eta + 0,263\Theta$	— 0,98	$-1,10 = -0,145\eta - 0,989\Theta$	+ 1,05
		$+2,74 = -0,122\eta - 0,992\Theta$	— 2,79
$+0,40 = -0,993\eta + 0,049\Theta$	— 0,33		
$+1,39 = -0,994\eta + 0,030\Theta$	— 1,32		

Wahrscheinlicher Fehler einer Gleichung = 1″,31.

September 25.

Endgleichungen.

$$-0{,}''44 = +5{,}741\,\eta - 0{,}346\,\Theta$$
$$+0{,}34 = -0{,}346\,\eta + 5{,}190\,\Theta.$$

Endwerthe.

		W. F.			W. F.
η =	— 0,″07	0,″55	Θ =	+ 0,″06	0,″58
(A) =	— 18,70		(D) =	— 1′ 46,29	
Parallaxe =	— 3,00			+ 5,09	
A =	— 21,77		D =	— 1 41,14	
Ort des Sterns g	151° 21′ 21,45	0,67		+ 6° 13 36,51	1,02
Ort des Kopf A	151 20 59,68	0,87		+ 6 11 55,37	1,17

Kopf B

(t) = $4^h\,16^m\,42^s$ Uhrzeit = $4^h\,16^m\,34{,}^s7$ Sternzeit = $15^h\,56^m\,28{,}^s4$ mittl. Zeit in Pulkowa.

Sternzeit	z	Refraction dA	Refraction dD
$4^h\,6^m\,47^s$	83° 56′	+ 0,″28	
16 35	82 42		— 0,″51
25 52	81 32	+ 0,28	

Reduction auf (t) m + r	A reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel	Reduction auf (t) m′ + r′	D reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel
+ 31,″52	+ 25′ 13,″52	+ 0,″26	— 6,″04	— 50,″22	+ 0,″89
+ 24,87	14,37	— 0,59	— 2,75	48,00	— 1,33
			+ 1,29	50,28	+ 0,95
— 22,74	14,01	— 0,23	+ 5,48	48,82	— 0,51
— 29,53	13,22	+ 0,56		Mittel = — 49,33	
Mittel =	+ 25 13,78				
Corr. für tägl. Bew.	+ 0,07				

Endwerthe.

		W. F.			W. F.
(A) =	+ 25′ 13,″85	0,″17	(D) =	— 49,″33	0,″38
Parallaxe =	— 3,02			+ 5,11	
A =	+ 25 10,83		D =	— 44,22	
Ort des Sterns f	150° 28 53,25	0,67		+ 6° 26′ 41,26	1,02
Ort des Kopf B	150 54 4,08	0,69		+ 6 25 57,04	1,08

September 28.

Kopf B

$(t) = 4^h\,50^m\,19^s$ Uhrzeit $= 4^h\,50^m\,9^s\!,7$ Sternzeit $= 16^h\,18^m\,10^s\!,2$ mittl. Zeit in Pulkowa.

Sternzeit.	z	Refraction dA	Refraction dP
$4^h\,39^m\,11^s$	83° 15′	− 2″,18	
50 19	81 51		+ 2″,69
5 3 29	80 13	− 1,01	

Reduction auf (t) m + r	A reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel	Reduction auf (t) m′ + r′	D reducirt auf (t)	Abweichung vom Mittel
+ 39″,68	− 18′ 33″,07	− 2″,07	− 3″,69	+ 4′ 57″,73	+ 3″,29
+ 28,13	34,87	− 0,27	+ 0,30	5 4,15	− 3,13
+ 22,01	41,74	+ 6,60	+ 4,33	4 58,16	+ 2,86
			+ 9,80	5 4,02	− 3,00
− 32,01	33,51	− 1,63	Mittel =	+ 5 1,02	
− 37,72	35,47	+ 0,33			
− 43,32	32,18	− 2,96			
Mittel =	− 18 35,14				
Corr. für tägl. Bew.	− 0,44				

Endwerthe.

		W. F.		W. F.
(A) =	− 18′ 35″,58	0″,96	(D) = + 5′ 1″,02	1″,20
Parallaxe =	− 2,95		+ 5,05	
A =	− 18 38,53		D = + 5 6,07	
Ort des Sterns h	154° 37 5,55	0,44	+ 4 40 59,46	0,45
Ort des Kopf B	154 18 27,02	1,06	+ 4 46 5,53	1,28

Indem wir nun, statt der berechneten Werthe der Parallaxe, die Horizontalparallaxen der beiden Köpfe π und π', die möglicherweise merklich verschieden sein können, mit den ihnen zustehenden Coefficienten einführen, lassen sich die Resultate meiner Beobachtungen folgendermassen zusammenfassen:

SCHEINBARE OERTER DES BIELASCHEN COMETEN.

Datum.	Mittl. Pulk. Zeit.		AR Com.	Decl. Com.
1852 Sept. 18	$15^h\,33^m\,3^s\!,8$	Kopf B	142° 40′ 33″,2 − 0,512 π	+ 10° 19′ 42″,0 + 0,852 π
« 20	16 4 54,3	Kopf A	145 32 47,0 − 0,507 π'	+ 8 58 17,7 + 0,845 π'
« 20	15 55 40,8	Kopf B	145 4 52,2 − 0,509 π	+ 9 12 39,8 + 0,847 π
« 23	15 55 40,6	Kopf A	149 2 33,4 − 0,503 π'	+ 7 18 47,8 + 0,853 π'
« 23	16 13 18,7	Kopf B	148 36 51,9 − 0,504 π	+ 7 32 12,8 + 0,849 π
« 25	16 14 52,4	Kopf A	151 21 2,7 − 0,502 π'	+ 6 11 50,3 + 0,852 π'
« 25	15 56 28,4	Kopf B	150 54 7,1 − 0,506 π	+ 6 25 51,9 + 0,855 π
« 28	16 18 10,2	Kopf B	154 18 30,0 − 0,500 π	+ 4 46 0,5 + 0,855 π

Nehmen wir aus den, aus der Uebereinstimmung der Beobachtungen unter einander abgeleiteten, wahrscheinlichen Fehlern das Mittel, so findet sich der mittlere wahrscheinliche Fehler einer vorstehend gegebenen Rectascension des Cometen $= 0\overset{''}{.}975$, einer Declination $= 1\overset{''}{.}025$. Es sind daher durchschnittlich beide Coordinaten nahezu mit gleicher Genauigkeit bestimmt worden. Bei der Betrachtung der einzelnen wahrscheinlichen Fehler sehen wir ferner, dass fast allen Positionen dieselbe Genauigkeit zugeschrieben werden darf, indem nur der Ort des Kopfes *B* vom 18. September, wegen der länger fortgesetzten Beobachtungsreihe, ein entschiedenes Uebergewicht hat. Auch lernen wir daraus, dass bei den schwächeren Vergleichsternen die Genauigkeit der Verbindung zwischen Comet und Stern die der Ortsbestimmung des Sterns übertrifft, während bei den helleren Vergleichsternen in der Regel der Sternort genauer ist als die Verbindung der beiden Gestirne.

Für die drei Tage, an welchen beide Köpfe beobachtet sind, lassen sich jetzt auch ihre relativen Positionen näherungsweise ableiten. Indem ich dabei die vorstehend (pag. 147) gegebenen stündlichen Bewegungen anwende, und die Parallaxe als auf beide Cometen gleichmässig wirkend voraussetze, erhalte ich:

Sept. 20	$16^h\ 0^m$ Pulk. mittl. Zeit	AR $A =$ AR $B + 27'\ 27\overset{''}{.}5$
		Decl. $A =$ Decl. $B - 14\quad 9,3$
Sept. 23	16 4 « « «	AR $A =$ AR $B + 26\quad 32,5$
		Decl. $A =$ Decl. $B - 13\quad 49,4$
Sept. 25	16 5 « « «	AR $A =$ AR $B + 26\quad 3,3$
		Decl. $A =$ Decl. $B - 13\quad 36,1.$

Hiernach haben sich die Unterschiede der Declinationen beider Köpfe sehr genau der Zeit proportional geändert. Die Aenderungen in den Differenzen der Rectascensionen sind dagegen in den ersten drei Tagen verhältnissmässig rascher gewesen, als in den letzten beiden; indessen genügt schon die Annahme eines Fehlers von 5″ in der für die mittlere Epoche abgeleiteten Differenz, um auch diese Aenderungen der Zeit proportional erscheinen zu lassen.

Leiten wir aus den gegebenen Differenzen die Distanz und den Positionswinkel des Kopfes *A* in Bezug auf den Kopf *B* ab, so haben wir:

		Distanz.	Pos.-Winkel.
Sept. 20	$16^h\ 0^m$ Pulk. mittl. Zeit	$30'\ 35\overset{''}{.}1$	$117°\ 34\overset{'}{.}1$
23	16 4 « « «	29 43,7	117 42,5
25	16 5 « « «	29 15,1	117 42,5

und hieraus, mit Hülfe der Santinischen Ephemeride, die Distanz beider Köpfe von einander auf die Entfernung 1 von der Erde reducirt:

am 20. Sept.		$43'\ 2\overset{''}{.}5$
« 23.	»	42 16,2
« 25.	«	41 54,2.

Es ergibt sich also, dass sowohl die scheinbare Distanz der beiden Köpfe, wie die auf die Einheit der Entfernung reducirte, sich in dieser Periode erheblich vermindert hat.

Für den 25. Sept. beträgt der Positionswinkel der beiden Cometenköpfe zu einander 117°,7 oder 297°,7. Dieser Winkel stimmt bis auf 11°,7 mit dem von mir an jenem Tage für die Richtung der hellen Ausströmung im Kopfe *B* zu 286° gemessenen Positionswinkel überein. Es folgt daraus, dass, scheinbar wenigstens, die Richtung dieser Ausströmung nahezu mit der der beiden Köpfe gegen einander zusammenfiel, und hieran knüpft sich dann sehr natürlich die Vermuthung, dass jene Ausströmung selbst eine Folge der Wechselwirkung der beiden Köpfe auf einander gewesen ist. Eine solche Wechselwirkung spricht sich übrigens auch wieder, wie im Jahre 1846, durch die Variabilität im Glanze der beiden Köpfe aus. Nach Secchi war nämlich:

am 15. Sept. *A* ausserordentlich schwach im Vergleich zu *B*;
am 19. « *B* schwächer als *A*.

Nach meinen Beobachtungen:

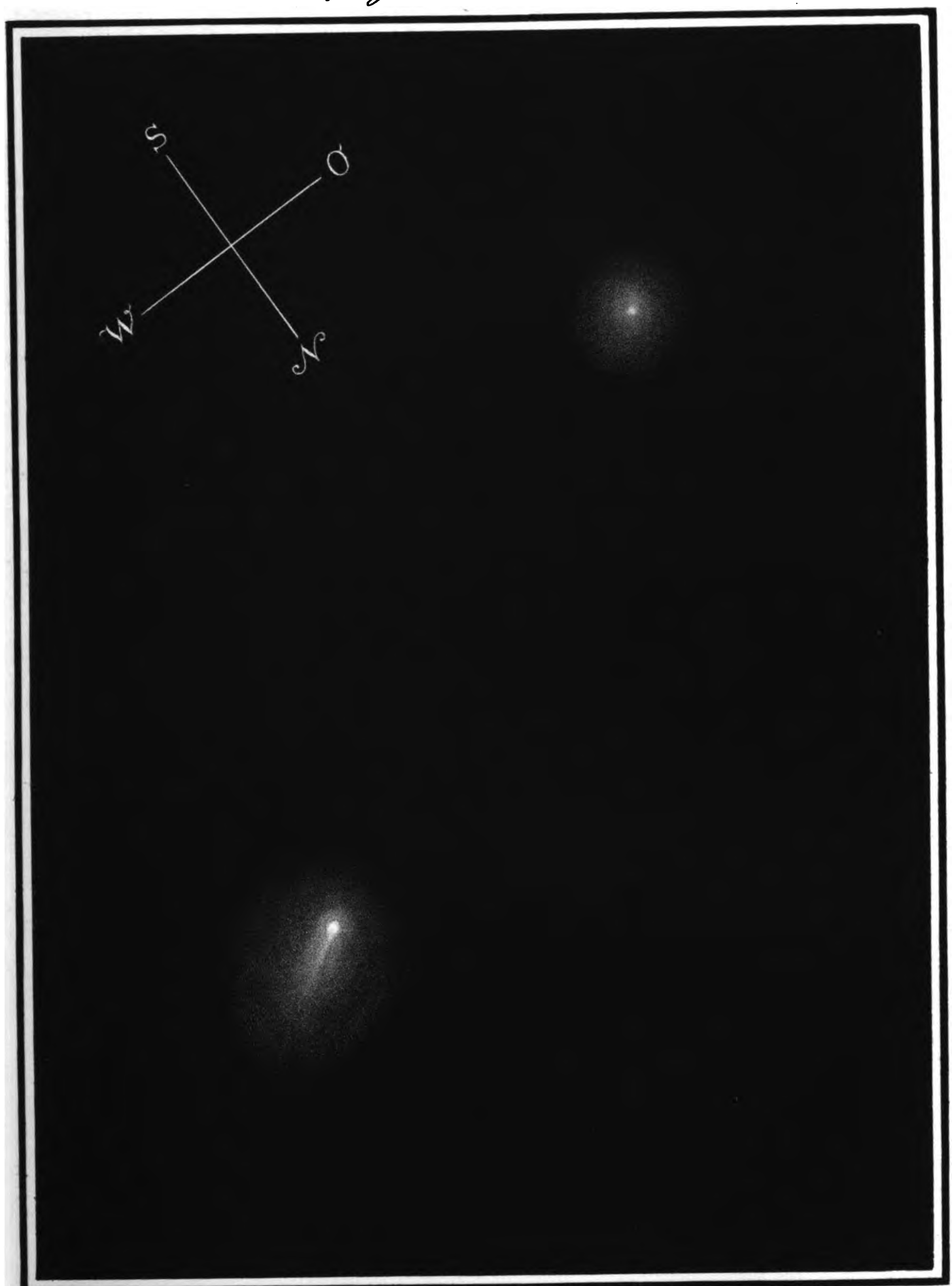
am 20. Sept. *A* und *B* nahezu von gleicher Helligkeit;
am 23. « *A* erheblich schwächer als *B*;
am 25. « *A* bedeutend schwächer als *B*.

Hiezu kommt, dass im August in Rom immer nur der Kopf *A* beobachtet ist, während doch auch *B* im Felde des Fernrohrs gewesen sein muss. Wir müssen daraus folgern, dass in jener Periode *B* ungemein viel schwächer gewesen ist wie *A*, und haben somit einen vollkommenen Austausch der Helligkeiten zwischen den beiden Köpfen während der Beobachtungen des vergangenen Jahres.



Der Bielasche Comet am 20 September 1852.





Der Bielasche Comet am 25 September 1852.



EXPÉDITIONS CHRONOMÉTRIQUES

DE

1845 et 1846

PAR

Otto Struve.

Lu le 4 novembre 1853.

SECONDE PARTIE.

EXPÉDITION CHRONOMÉTRIQUE DE 1846.

§ 1. Introduction historique.

La première partie de mon mémoire contient la relation sur les expéditions chronométriques de 1845. Ces expéditions avaient donné:

la longitude de l'observatoire de Moscou $= 0^h 28^m 58^s{,}230$ à l'Est de Poulkova avec l'erreur probable $= 0^s{,}031$;

la longitude de l'observatoire de Varsovie $= 0^h 37^m 11^s{,}229$ à l'Ouest de Poulkova avec l'erreur probable $= 0^s{,}039$.

En combinant ces deux résultats, nous avons:

la différence en longitude entre les observatoires de Moscou et de Varsovie $= 1^h 6^m 9^s{,}459$, avec l'erreur probable $= 0^s{,}050$.

Cette différence dont l'exactitude n'aurait guère pu être élevée, si nous avions opéré, de la même manière qu'en 1845, sur la ligne directe de jonction entre les deux observatoires, devait nous servir de base dans les opérations de 1846. Il fut résolu de déterminer cette année, par une interpolation chronométrique, les longitudes d'un nombre de points principaux situés entre Moscou, la Mer Noire, et la capitale de la Pologne, avec une exactitude suffisante pour qu'elles puissent servir de contrôles aux vastes opérations géodésiques exécutées par l'État-major Impérial, et de points d'appui pour les opérations astronomico-géographiques, que le même établissement avait en vue d'entreprendre, pour la confection exacte des atlas du pays, dans les gouvernements sur lesquels les opérations géodésiques ne devaient point s'étendre. A l'aide d'un grand nombre de chronomètres de haute qualité, nous espérions atteindre notre but, par un seul voyage en allant de Moscou à Varsovie et en revenant. Les résultats de l'expédition, sur laquelle j'ai à rapporter ici, prouveront que nous n'avons pas été trompés dans cet espoir.

Parmi les points à déterminer par ce voyage, les observatoires de Kharkov, de Nicolajev et de Kiev, occupaient le premier rang. Les longitudes de ces trois points devaient être déterminées soit en allant de Moscou à Varsovie, soit en retournant. Pour les autres lieux, de seconde

classe, une seule détermination de la longitude parut suffisante, et il fut arrêté que seulement de tels points seraient déterminés, sur lesquels, lors de l'arrivée, l'état de l'atmosphère promettrait de pouvoir gagner une bonne détermination du temps, sans obliger les voyageurs de rester plus d'un jour sur le lieu. Cette dernière restriction était essentielle, pour ne pas porter préjudice à l'exactitude de la détermination des longitudes des trois observatoires nommés, en étendant outre mesure les durées du transport du temps, par des séjours plus prolongés sur les stations moins importantes. C'est pourquoi le nombre des stations de seconde classe ne s'élève qu'à cinq. C'étaient les villes Orel, Poltava, Krementschoug, Odessa et Jitomir. La dernière seulement fut déterminée en allant de Moscou à Varsovie, les quatre autres pendant le voyage de retour.

L'Observatoire central me chargea de nouveau de l'exécution et de la direction du travail. De la part de l'État-major Impérial, M. Schvarev, officier du Corps des Topographes, le même qui, l'année précédente, avait déjà surveillé le transport des chronomètres entre Poulkova, Moscou et Varsovie, me fut donné pour aide, dans les comparaisons des chronomètres et les jonctions des lieux d'observation avec des points bien désignés. En outre, les astronomes des observatoires de Moscou, Nicolajev, Kiev et Varsovie furent invités à nous porter assistance, en nous fournissant, à l'aide des instruments fixes de ces établissements, les corrections des horloges pour les époques des comparaisons de nos chronomètres. Dans ces lieux, la comparaison faite, il restait donc seulement à déterminer les équations personelles des différents observateurs, par rapport à ma manière d'observer les passages.

A Kharkov et sur les points de seconde classe j'avais à déterminer moi-même le temps absolu. Pour ce but, j'étais muni d'un théodolithe astronomique d'Ertel, arrangé dans sa position verticale pour la mesure des distances au zénith. Le cercle de cet instrument a 9,6 pouces de diamètre, la lunette a une ouverture de 1,33 pouces avec une distance du foyer de 13,5 pouces. Le grossissement employé était toujours le même de 30 fois.

Là, où l'on peut vouer beaucoup de temps aux observations et où un instrument des passages bien solidement établi est à la disposition de l'astronome, le théodolithe, employé comme cercle vertical, ne peut guères rivaliser, quant à l'exactitude des résultats, avec un instrument des passages d'égales dimensions. Mais cet avantage de l'instrument des passages disparaît complètement, dès qu'il s'agit d'observer à la hâte et sans avoir le moyen d'établir l'instrument sur un fondement très solide. Dans ce cas l'instrument est d'ordinaire sujet à des variations dans les deux sens, de l'azimuth et de l'inclinaison de l'axe. Dès qu'on observe des distances au zénith, comme on le fait par le théodolithe, les variations dans le sens de l'azimuth sont indifférentes, et celles qui se produisent dans l'inclinaison de l'axe vertical seront indiquées et éliminées par l'usage simultané du niveau fermement appliqué à la périphérie du cercle vertical. Au contraire, dans l'usage de l'instrument des passages au méridien, il n'est pas moins important de connaître exactement l'azimuth de la lunette, que de déterminer l'inclinaison de l'axe. Par des observations fréquentes du niveau qu'on place sur l'axe, les variations de l'inclinaison peuvent être reconnues toujours avec une exactitude suffisante, mais les détermi-

nations de l'azimuth ne peuvent se faire, en général, que par des périodes de plus longue durée, et dans ces périodes il faut supposer que les variations de l'azimuth se soient opérées en proportion du temps écoulé, supposition qui ne peut être rigoureuse pour un établissement peu solide de l'instrument. Il y a donc des difficultés presque insurmontables qui s'opposent à une détermination exacte du temps absolu à l'aide de la lunette méridienne, dans des conditions comme elles devaient se présenter presque partout, pendant le voyage projeté, tandisque le cercle vertical devait fournir des résultats qui seraient à l'abri de toute objection basée sur l'emplacement moins solide de l'instrument. Telles étaient les considérations qui nous engagèrent à nous servir du théodolithe dans le but indiqué. Il faut ajouter que l'usage de cet instrument possède encore cet avantage, qu'il fournit des résultats d'une exactitude distinguée, dans un intervalle de temps comparativement bref, et sans obliger l'astronome d'attendre l'approche de la nuit; car à chaque heure du jour il y a des étoiles assez luisantes dans le voisinage du premier vertical, donc propres à la détermination du temps.

Je me suis servi du même instrument pour déterminer les latitudes des 5 points de seconde classe. Je l'ai employé également pour les déterminations des latitudes des observatoires de Kharkov et de Kiev, pour lesquels, à l'époque de notre voyage, cet élément n'était pas encore fixé avec exactitude.

Le nombre des chronomètres qui devaient servir au transport du temps fut fixé à environ 40. Ce nombre fut bientôt au complet par la coopération active de feu M. Dent qui nous envoya exprès, pour l'usage dans ce voyage, une collection de 20 de ses excellentes horloges marines. La majeure partie de ces chronomètres n'avaient été mis en mouvement, que peu de temps avant leur départ. C'est pourquoi nous reconnaissons, dans presque tous ces chronomètres, une accélération assez considérable de la marche. Néanmoins presque toutes ces horloges ont fourni des résultats bien satisfaisants, malgré les conditions très désavantageuses du voyage. Voici la liste des chronomètres que nous avions à notre disposition, pendant cette expédition.

1) Kessels 1290
2) Dent 1818
3) Hauth 32
4) Kessels 1276
5) Hauth 11
6) Hauth 18
7) Arnold et Dent 951
8) Kessels 1298
9) Kessels 1297
10) Dent 1828
11) « 1613
12) « 1687
13) « 1705
14) « 1730
15) Dent 1739
16) « 1774
17) « 1776
18) « 1787
19) « 1789
20) « 1798
21) « 1799
22) « 1808
23) « 1732
24) « 1752
25) « 1761
26) « 1862
27) « 1919
28) « 1920
29) Dent 1953
30) « 1954
31) « 1956
32) « 1957
33) « 1963
34) « 1965
35) « 1968
36) « 1975
37) « 1998
38) « 2000
39) « 2001
40) « 2022.

Dans ce nombre il y a le chronomètre comparateur Kessels 1290 qui fait 13 battements en 6 secondes, le chronomètre sans compensation Arnold et Dent 951, trois chronomètres réglés sur le temps sidéral Hauth 11, Hauth 18 et Kessels 1297, et deux chronomètres de poche Hauth 32 et Kessels 1276. Tout le reste sont des chronomètres de boîte réglés sur le temps moyen.

Le voyage fut exécuté dans la même voiture qui avait servi dans les expéditions de l'année précédente, et l'emplacement des chronomètres s'y faisait de la même manière qu'à l'occasion antérieure. Aussi le théodolithe pourvu d'un pied construit particulièrement pour ce but, fut transporté dans la même voiture.

Nous partimes de Poulkova le 24 juin 1846, en nous dirigeant d'abord sur Moscou. Pendant ce voyage la température était en général très basse pour la saison, et dans les nuits elle tombait jusque près de zéro. Néanmoins la température moyenne dans laquelle se mouvaient les chronomètres, et qui fut indiquée par le chronomètre sans compensation, restait au dessus de $+ 11°$ R.; mais si même parfois la température a été considerablement plus basse encore, pendant ce voyage, elle ne peut avoir produit aucun effet désavantageux sur les résultats à déduire, parce que ce ne fut qu'avec le départ de Moscou que commencèrent nos opérations proprement dites. Notre départ de Moscou date du 30 juin. La marche ultérieure du voyage se voit le mieux dans le tableau suivant des époques où nous avons fait, bientôt après l'arrivée ou peu de temps avant le départ, dans les différents endroits, les comparaisons des chronomètres.

Moscou le 30 juin $15^{h},0$
Kharkov le 6 juillet $21^{h},4$ et le 7 juillet $11^{h},0$
Nicolajev le 12 juillet $21^{h},2$ et le 14 juillet $21^{h},3$
Kiev le 17 juillet $8^{h},6$ et le 18 juillet $9^{h},5$
Jitomir le 19 juillet $14^{h},5$
Varsovie le 23 juillet $14^{h},3$ et le 28 juillet $20^{h},5$
Kiev le 2 août $14^{h},9$ et le 3 août $14^{h},9$
Nicolajev le 5 août $21^{h},6$ et le 7 août $20^{h},6$
Odessa le 9 août $9^{h},3$
Nicolajev le 11 août $12^{h},0$
Krementschoug le 13 août $10^{h},6$
Poltava le 14 août $10^{h},6$
Kharkov le 15 août $15^{h},4$
Orel le 18 août $11^{h},0$
Moscou le 21 août $1^{h},2$ et le 21 août $21^{h},6$
Poulkova le 25 août $20^{h},6$.

Il s'en suit que, pour aller de Moscou à Varsovie et pour retourner, nous avons employé le même nombre de 23 jours. La somme des distances parcourues dans ce voyage s'élève à environ 6000 verstes.

Lorsque nous partimes de Moscou, la température était encore assez basse et des pluies à verse abîmaient les routes. Mais depuis l'arrivée à Kharkov l'état de l'atmosphère changeait tout d'un coup. La température s'éleva rapidement et acquit même une hauteur excessive d'environ 30° R. pendant notre voyage dans les steppes du gouvernement de Kherson, entre Krementschoug et Nicolajev. Aussi pendant tout le reste du voyage la température de l'atmosphère restait-elle constamment très élevée, de sorte que la température moyenne dans laquelle se trouvaient les chronomètres ne s'abaissait aucun jour au dessous de 18° R.

On voit, dans le tableau précédent, qu'en général nos séjours sur les lieux à déterminer n'étaient que de très courte durée. Dans les cas où ils étaient un peu plus prolongés, ces prolongations étaient nécessitées soit par l'état de l'atmosphère soit par une révision ou une réparation de la voiture. Ce n'est qu'à Varsovie que notre séjour s'étendit au delà de 5 jours, à cause d'une attaque de maladie produite par les fatigues du voyage et des observations, et par les chaleurs excessives auxquelles nous avions été exposés les jours précédents. C'est encore bien heureux que cet accident m'arriva à Varsovie même, dans l'intervalle entre la fin du premier voyage et le commencement du voyage de retour, de sorte que ce retard n'est d'aucune influence sur l'exactitude du transport du temps.

La détermination de la longitude d'Odessa était, pour ainsi dire, un hors — d'oeuvre dans notre expédition, parce que les routes qui joignent les trois observatoires à déterminer, d'un côté avec Moscou, de l'autre avec Varsovie, ne passent pas par cette ville. Mais la détermination exacte de la longitude du port principal de la Mer Noire nous parut bien digne d'une expédition à part, à entreprendre en partant de Nicolajev, et la distance comparativement petite entre les deux lieux promettait que cette extension de notre expédition pourrait être exécutée sans augmenter considérablement la durée du transport du temps pour la détermination des points principaux. En outre si, par hazard, pendant ce voyage d'Odessa, quelques chronomètres avaient montré des irrégularités dans leur marche, elles pouvaient être éliminées de la marche générale pendant l'expédition principale, à l'aide des deux déterminations du temps absolu, faites à Nicolajev, l'une avant le commencement, l'autre après la fin du voyage d'Odessa.

Par les soins de mon respectable ami M. Knorre, directeur de l'observatoire de Nicolajev, le voyage d'Odessa devint en même temps une récréation pour les voyageurs fatigués par les chaleurs et le séjour continuel dans la voiture. Par son intercession, feu l'amiral Lasarev, alors commandeur en chef de la flotte de la Mer Noire, eut la bienveillance de mettre à notre disposition, pour ce voyage, un bateau à vapeur de la marine Impériale. En outre, M. Knorre, en nous accompagnant, élevait encore, par ses conseils et sa conversation instructive, le plaisir et l'utilité du voyage et nous rendit des services directes, en se chargeant, à Odessa, de la majeure partie des mesures nécessaires pour la jonction du lieu d'observation avec la cathédrale de la ville, jonction qui, par des circonstances particulières, offrait des difficultés extraordinaires. Je me permets d'exprimer ici à M. Knorre ma plus vive gratitude, pour la coopération active avec laquelle il seconda le but de notre expédition, dans toutes les occasions qui s'offraient.

Pendant tout le voyage, depuis le départ de Poulkova jusqu'au retour, les chronomètres furent soigneusement comparés entre eux, tous les deux jours, à 9 heures le matin. J'ai fait ces comparaisons dans l'intention de m'en servir pour une déduction des poids relatifs des chronomètres, d'après la méthode que j'avais suivie dans le voyage de 1842; car ici la méthode basée sur des retours multiples sur les mêmes points ne pouvait trouver application. Cependant j'ai renoncé plus tard à l'exécution de ce travail, à cause de la quantité exorbitante de calculs qu'il aurait réclamée, et qui n'aurait été en aucune proportion avec le petit avantage en exactitude ou plutôt en rigueur de méthode, qu'on aurait gagné par ce procédé. Par cette raison, les comparaisons régulières des chronomètres ne m'ont servi que pour découvrir quelques fautes accidentelles d'écriture qui s'étaient glissées dans les comparaisons principales faites les jours voisins sur les lieux d'observations, et dont les longitudes de ces lieux ont été déduites.

Tous les calculs relatifs à ce voyage ont été faits, en premier lieu, par moi même. Pour les calculs de contrôle, j'ai eu recours à l'assistance de plusieurs jeunes astronomes attachés à l'Observatoire central et des officiers du Dépôt Topographique qui y font leur cours d'astronomie pratique. C'est pourquoi j'ose prétendre que tous les calculs sont aussi exactes que l'admettaient les données fournies par le voyage.

§ 2. Déterminations du temps absolu.

a) *Moscou.*

L'instrument dont nous nous sommes servis à Moscou, pour la détermination du temps, était le même instrument des passages qui avait été employé par M. Döllen, dans les expéditions des deux années précédentes. L'horloge d'observation était la pendule d'Utzschneider, établie dans le petit pavillon de l'observatoire de Moscou, près du dit instrument des passages. Tout ce qui regarde l'usage de cet instrument et les méthodes d'observation et de réduction, a été exposé en détail dans nos rapports sur les expéditions antérieures. Je ne donnerai donc ici que les résultats des observations.

Le 30 juin, avant les comparaisons des chronomètres, une série complète d'observations pour la détermination du temps, fut exécutée par moi même. Plus tard, après la fin des comparaisons, M. Schweizer fit une seconde série d'observations pour le même but. Afin de pouvoir réduire les résultats des observations de M. Schweizer, sur ma manière d'observer les passages, nous avons déterminé, à la même époque, notre équation personnelle:

$$\textit{Schweizer} = \textit{O. Struve} + 0^s\!,040.$$

En égard à cette équation personnelle, nos deux séries d'observations combinées donnent le 30 juin, pour $22^h\,13^m + t$ temps sidéral de Moscou, la correction de la pendule d'Utzschneider $= + 0^h\,0^m\,2^s\!,24 - 0^s\!,114\,t$, t étant le nombre d'heures écoulées depuis $22^h\,13^m$.



Après mon retour du voyage, M. Schweizer fit seul les observations le 20 et le 21 août. Après avoir appliqué également son équation personnelle par rapport à moi, ces observations donnent:

le 20 août $19^h 3^m$ temps sid. de Moscou, la correction de la pendule $= + 0^m 8^s,67$
« 21 « 18 7 « « « « $= + 0 \; 8,30$
ce qui fait la marche horaire de l'horloge, pour ce jour, $= - 0^s,016$.

b) *Varsovie.*

Les observations de Varsovie ont été faites de nouveau par M. Baranovski qui les avait déjà faites l'année précédente, à l'aide de la même lunette méridienne et de la même pendule d'observation, Gugenmus 3. Ces nouvelles observations de M. Baranovski donnent:

le 22 juillet	$13^h 30^m$	temps sid. de Varsovie,	la correction de la pendule				$= + 0^m 31^s,31$
« 23	«	15 25	«	«	«	«	=	32,81
« 23	«	3 0	«	«	«	«	=	33,48
« 28	«	19 0	«	«	«	«	=	40,63
« 28	«	3 30	«	«	«	«	=	40,99.

Ces résultats sont déjà réduits à ma manière d'observer les passages, par l'application de l'équation personnelle: *Baranovski* $=$ *O. Struve* $+ 0^s,157$, déterminée l'année précédente. A cause de la maladie dont j'ai été attaqué à Varsovie, cette équation personnelle ne pouvait être vérifiée en 1846; mais l'espace de temps qui sépare nos dernières déterminations de cette équation, de l'époque des observations, ne s'élevant guère à 8 mois, il n'y a pas lieu de craindre qu'elle ait changée d'une quantité sensible dans cet intervalle. Au moins l'expérience nous prouve que, pour des observateurs exercés, les changements de l'équation personnelle ne se font que très lentement.

c) *Kharkov.*

L'Université de Kharkov possède une belle collection d'instruments astronomiques, entre autres un grand cercle mural de Troughton et une lunette méridienne du même artiste, également de grandes dimensions. Ces deux instruments sont construits déjà en 1827, mais jusqu'à présent il manque encore à l'Université un édifice, où les placer et employer convenablement. En attendant le professeur actuel d'astronomie à cette Université, M. Schidlovsky, a fait ériger, dans le jardin botanique, un observatoire temporaire consistant en une petite maisonnette de bois, avec un toit mobil, au centre de laquelle se trouve un pilier maçonné. C'est dans cette maisonnette que les étudiants d'astronomie peuvent s'exercer dans l'usage des instruments transportables, dont la collection est très complète. En 1846 M. Schidlovsky avait établi sur le pilier, un instrument des passages. C'est le même instrument qui, dans notre expédition de 1843, avait servi aux observations faites à Lubeck, par feu M. Nehus. Les qualités supé-

rieures de cet instrument nous étaient donc bien connues, mais malheureusement, à cause de l'absence du professeur Schidlovsky, à l'époque de notre première visite de Kharkov, je ne pus en faire usage pour la détermination du temps. Par cette raison, pour le premier passage par Kharkov, j'étais obligé de déterminer les corrections des chronomètres, à l'aide du théodolithe, de la même manière que sur les points de seconde classe. Après avoir établi cet instrument tout près de l'observatoire temporaire, j'ai trouvé les corrections suivantes $= c$ du chronomètre d'observation Kessels 1297.

Par 8 hauteurs de α Lyrae à l'Est	$c = + 24^m 51^s,71$,	pour $15^h 32^m$ temps du chron.
« 8 « de η Ursae maj. à l'Ouest	$c = + 24\ 51,59$,	pour 16 18 « «
Moyenne	$c = + 24\ 51,65$,	pour 15 55 temps du chron.

Lorsque nous passâmes la seconde fois par Kharkov, M. Schidlovsky, de retour de son voyage, eut la complaisance de mettre à ma disposition, pour la détermination du temps, le dit instrument des passages, en me fournissant en outre les données nécessaires pour la réduction des observations, nommément la valeur angulaire d'une division du niveau et les distances des fils latéraux au fil du milieu. Avec ces données mes observations, continuées pendant trois heures, dans les deux positions opposées de l'instrument, donnent le 15 août la correction du chronomètre Kessels 1297: $c = + 27^m 3^s,99$, pour $22^h 33^m$ du chronomètre.

d) *Nicolajev.*

Toutes les observations de Nicolajev ont été faites par M. Knorre, à l'aide de l'excellent cercle méridien de cet observatoire. Un extrait du journal d'observations, que M. Knorre m'a envoyé, contient, à côté des observations faites pour le but immédiat de notre expédition, une série complète de recherches qui fournissent tous les éléments nécessaires pour les réductions instrumentales. Le calcul de ces observations a été fait par moi, autant que possible d'après les règles exposées dans nos rapports sur les expéditions antérieures.

La méthode d'observation de M. Knorre différait de celles que nous avons suivies dans nos déterminations du temps absolu, dans ce point important que l'inclinaison ne fut pas déduite des indications du niveau placé sur l'axe, mais de la combinaison des observations directes des étoiles, surtout circompolaires, avec les passages réfléchis par un horizon artificiel. En n'employant que les passages de la Polaire et de δ Ursae min., j'ai déduit, des observations de M. Knorre, la liste suivante des inclinaisons de l'axe, exprimées en secondes de temps.

	Cercle Ouest.	*Cercle Est.*
5 juillet	$+ 0^s,268$	
5 «	$+ 0,266$	
8 «		$+ 0^s,365$
8 «		$+ 0,364$
9 «		$+ 0,398$

	Cercle Ouest.	Cercle Est.
9 juillet		+ 0ˢ,430
10 «		+ 0,383
10 «		+ 0,403
11 «		+ 0,408
11 «		+ 0,385
13 «		+ 0,461
14 «	+ 0ˢ,246	
16 «	+ 0,256	
18 «	+ 0,307	
18 «	+ 0,215	
11 août		+ 0,372
11 «	+ 0,601.	

Abstraction faite de la dernière inclinaison observée le 11 août dans la position de l'instrument, Cercle Ouest, on voit que, pendant le mois de juillet, l'inclinaison a été admirablement constante. Or, en rejetant l'observation du 11 août, nous avons en moyenne:

Cercle Ouest $i = + 0^s{,}260$

Cercle Est $i = + 0{,}397.$

Evidemment il y a une différence constante entre les inclinaisons observées dans les deux positions de l'instrument, différence qu'il faut attribuer à une inégalité dans les épaisseurs des deux tourillons. L'inclinaison étant plus grande dans la position de l'instrument „Cercle Est" nous devons conclure que le tourillon qui se trouve du côté du cercle a le diamètre plus petit, que celui de l'autre bout de l'axe.

Toutes les observations de M. Knorre ont été réduites à l'aide des valeurs moyennes précédentes de l'inclinaison, à l'exception toujours de celles du 11 août. L'inclinaison plus forte observée ce jour, dans la seconde position de l'instrument, quoiqu'elle ne soit déduite que d'un seul fil de δ Ursae min. observé directement et de deux fils réfléchis, n'en est pas moins réelle, à ce qui suit des observations directes et réfléchies de plusieurs étoiles zénithales observées également dans la seconde position de l'instrument. Nous devons donc supposer que, ce jour là, l'opération du renversement de l'axe ait produit un changement dans l'inclinaison.

La collimation de l'axe optique a été déduite de la combinaison de plusieurs passages de la Polaire et de δ Ursae min., observés dans les positions opposées de la lunette. La valeur moyenne de la collimation fut trouvée ainsi $c = + 0^s{,}141$, pour la position Cercle Ouest de l'instrument, avec des différences seulement de quelques centièmes de seconde, pour les différentes combinaisons. Cette valeur de c est très exacte; mais si même il y a encore une petite incertitude, elle disparaît entièrement dans les résultats moyens des corrections des horloges, déduites d'observations faites dans les positions opposées de l'instrument.

L'azimuth de la lunette a été déduit chaque jour à part, tantôt de la combinaison des passages supérieur et inférieur de la Polaire ou de δ Ursae min., tantôt à l'aide d'un passage d'une

des deux étoiles polaires, combiné avec celui d'une étoile équatoriale. Voici la série des azimuth déterminés par M. Knorre:

5 juillet	$\alpha = +1^s,217$	15 juillet	$\alpha = +1^s,184$
8 «	$+1,228$	16 «	$+1,135$
9 «	$+1,183$	18 «	$+1,207$
10 «	$+1,171$	19 «	$+1,202$
11 «	$+1,149$	7 août	$+1,127$
12 «	$+1,126$	11 «	$+1,236$
13 «	$+1,163$	11 «	$+0,999$
14 «	$+1,264$		

On reconnait que l'azimuth est resté invariable pendant toute la période des observations, à l'exception toujours du dernier jour où le choc dont l'effet a été reconnu par le changement de l'inclinaison après le renversement de l'axe, parait avoir produit également un petit déplacement dans le sens horizontal.

Ayant rassemblé dans ce qui précède, tout ce qui regarde les corrections instrumentales pour les observations de M. Knorre, il ne reste qu'à donner les corrections définitives de la pendule de Berthoud qui a servi dans ces observations.

Date.		Temps sid.	Corr. de la pend.	Marche journ.
Juillet	5	$1^h\ 59^m$	$-1^s,10$	$-0^s,076$
«	8	17 5	$-1,30$	0,000
«	9	21 2	$-1,30$	$+0,532$
«	10	19 22	$-0,82$	$+0,600$
«	11	19 12	$-0,22$	$+0,460$
«	12	5 7	$+0,43$	
«	13	12 11	$+0,42$	$+0,182$
«	13	0 50	$+0,58$	0,000
«	14	16 39	$+0,55$	
«	14	3 56	$+0,58$	$+0,038$
«	15	17 49	$+0,59$	$+0,079$
«	16	18 5	$+0,67$	$+0,392$
«	18	16 7	$+1,23$	$+0,906$
«	19	0 36	$+2,32$	$+0,964$
«	23	18 58	$+5,95$	$+0,566$
«	30	19 39	$+9,93$	$+1,264$
Août	6	5 31	$+10,30$	
«	7	15 11	$+20,07$	$+1,570$
«	7	21 24	$+20,34$	$+0,655$
«	11	15 8	$+22,69$	$+0,653$
«	11	19 31	$+22,90$	$+0,875$
«	12	4 27	$+24,10$	

On voit de cette liste que la marche de la pendule n'a pas été des plus régulières. Cependant l'irrégularité de sa marche ne pourra considérablement affecter la longitude à déduire, parce que les époques des comparaisons des chronomètres coïncident toujours, à une ou deux heures près, avec des déterminations du temps absolu.

Pour déterminer notre équation personnelle nous avons fait, M. Knorre et moi, deux séries complètes d'observations, à l'aide du cercle méridien, et nous avons trouvé en moyenne:

le 13 juillet	*Knorre* = *O. Struve* — 0ˢ,018	avec l'err. prob. = 0ˢ,016
14 «	— 0,006	0,025
Moyenne	*Knorre* = *O. Struve* — 0,013	avec l'err. prob. = 0,015.

Il n'y a donc pas d'équation personnelle dans la manière d'observer les passages de la part de M. Knorre et de ma part; au moins, si elle existe, elle est si petite qu'elle ne s'élève pas même à la valeur de l'erreur probable de sa détermination. Mais cette détermination a encore un intérêt particulier. Déjà en 1821 M. Knorre et mon père déterminèrent leur équation personnelle relative qui se trouva alors (*Obs. Dorp.* vol. III, Introd. pag. L)

Knorre = *W. Struve* + 0ˢ,022.

Mais en combinant, avec l'équation précédente entre M. Knorre et moi, celle qui fut déterminée en 1845 entre mon père et moi (voyez *Rapport sur l'expéd. chron. de 1845* pag. 51) nommément

W. Struve = *O. Struve* — 0ˢ,043,

nous avons pour 1846

Knorre = *W. Struve* + 0ˢ,030,

ce qui prouve que, dans le courant de 25 ans, pas le moindre changement relatif n'a eu lieu dans la manière d'observer les passages de la part de ces deux astronomes exercés.

e) *Kiev.*

A l'époque de mon arrivée à Kiev, le 17 juillet, l'instrument des passages de cet observatoire, dont les dimensions égalent de très près celles de la lunette méridienne de Poulkova, n'avait pas encore été employé pour des déterminations exactes du temps et ne se trouva pas encore en complet état de vérification. Par cette raison, les éléments de réduction n'étant pas donnés, il fallait tâcher d'arranger les observations de sorte que les quantités inconnues de l'azimuth et de la collimation, ne pussent affecter sensiblement les résultats. C'est pourquoi nous résolûmes d'observer exclusivement des étoiles zénithales, en nombre égal dans les deux positions de la lunette, en y ajoutant toujours quelques passages des étoiles plus voisines du pôle, pour une déduction approximative de l'azimuth. Le jour de mon arrivée, le 17 juillet,

j'ai fait moi-même les observations, mais, le jour suivant, ce fut déjà feu M. Poloukhtovitch, alors adjoint de l'observatoire de Kiev, qui les exécuta sous ma direction. Nos observations donnent les corrections suivantes de la pendule de Hauth établie près de l'instrument des passages:

le 17 juillet 17^h 8^m temps sid. de Kiev $c = -0^m\ 17^s,59$
18 « 15 10 « « $c = -0\ 22,86$,

d'où nous tirons la marche journalière de l'horloge $= -5^s,41$.

Après mon retour de Varsovie, M. Poloukhtovitch observa seul. A cette époque postérieure, l'instrument étant déjà beaucoup mieux rectifié, les observations offrent des résultats plus satisfaisants. Elles ont donné les corrections suivantes de la pendule de Hauth:

le 2 août $15^h\,20^m$ temps sid. de Kiev $c = -1^m\ 45^s,27$
3 « 18 24 « « $c = -1\ 51,39$.

Donc nous avons, à cette époque, la marche journalière de la pendule $= -5^s,43$, sensiblement égale à celle que nous avions trouvée par les observations de la première période.

Il faut remarquer encore que tous les résultats des observations de M. Poloukhtovitch sont déjà corrigés de l'effet de son équation personnelle par rapport à moi, qui était assez considérable. Deux jours de comparaisons fournissaient les équations suivantes:

le 18 juillet *Poloukhtovitch* = *O. Struve* + $0^s,228$ avec l'err. prob. = $0^s,079$
3 août « « + 0,383 « = 0,049

Moyenne *Poloukhtovitch* = *O. Struve* + 0,305.

La différence entre les résultats des deux jours s'explique par les erreurs probables de chaque résultat, plus fortes qu'il ne fallait attendre. Il y a lieu de supposer que l'augmentation des erreurs probables, surtout pour le premier jour d'observation, est due principalement au manque d'exercice, dans ce genre d'observations, de la part de M. Poloukhtovitch. Les deux équations étant déduites du même nombre de fils observés, il paraît que 16 jours d'observation avaient déjà suffi à le rendre beaucoup plus constant dans sa manière d'observer. En tout cas, la moyenne arithmétique des deux déterminations ne peut différer que de peu de centièmes de seconde, de la valeur exacte de l'équation personnelle.

f) *Jitomir, Odessa, Krementschoug, Poltava et Orel.*

Sur tous les cinq points de seconde classe, j'ai fait les observations à l'aide du théodolithe. Pour la détermination du temps j'observais les distances zénithales de deux étoiles, dans le voisinage du premier vertical, dont une se trouvait à l'Ouest, l'autre à l'Est. Le chronomètre d'observation était partout le même, Kessels 1297, dont la marche assez forte, par rapport au temps sidéral, nous était connue comme très régulière, par des expériences antérieures. En désignant les corrections de ce chronomètre par c je donnerai d'abord les résultats tels qu'ils suivaient directement des observations, sans les réduire sur la même époque pour les deux étoiles.

Jitomir le 19 juillet.

$20^h 24^m$	temps du chron. par 5 hauteurs de α Andromedae à l'Est	$c = -4^m\ 44^s,96$
20 55	« « « 4 « α Lyrae à l'Ouest	$c = -4\ \ 44,78$
	Moyenne pour $20^h 40^m$	$c = -4\ \ 44,87.$

Odessa le 9 août.

$15^h 13^m$	temps du chron. par 8 hauteurs de α Lyrae à l'Est	$c = +4^m\ 46^s,73$
17 30	« « « 8 « Arcturus à l'Ouest	$c = +4\ \ 46,49$
	Moyenne pour $16^h 21^m$	$c = +4\ \ 46,61.$

Krementschoug le 13 août.

$17^h 2^m$	temps du chron. par 8 hauteurs de α Lyrae à l'Est	$c = +15^m\ 39^s,59$
18 9	« « « 8 « Arcturus à l'Ouest	$c - +15\ \ 39,89$
	Moyenne pour $17^h 36^m$	$c = +15\ \ 39,74.$

Poltava le 14 août.

$18^h 48^m$	temps du chron. par 4 hauteurs de Arcturus à l'Ouest	$c = +20^m\ 23^s,28$
19 22	« « « 4 « α Andromedae à l'Est	$c = +20\ \ 23,79$
	Moyenne pour $19^h 5^m$	$c = +20\ \ 23,54.$

Orel le 19 août.

$19^h 45^m$	temps du chron. par 5 hauteurs de α Coronae à l'Ouest	$c = +26^m\ 34^s,92$
20 25	« « « 4 « α Andromedae à l'Est	$c = +26\ \ 35,65$
	Moyenne pour $20^h 5^m$	$c = +26\ \ 35,28.$

Les différences dans les résultats obtenus à l'Est et à l'Ouest, doivent être attribuées à l'effet combiné de trois causes, savoir à la marche du chronomètre, à une flexion de la lunette et aux erreurs accidentelles des observations. Le signe positif de la marche du chronomètre, par rapport au temps sidéral, se prononce ici en général; mais la quantité est variable par suite des deux autres causes agissantes. La moyenne arithmétique entre les deux résultats trouvés sur chaque station, doit être regardée comme l'exacte correction du chronomètre correspondante à l'époque moyenne des observations, car la flexion agit aussi en sens opposé sur les deux résultats et, quoique son coefficient ne soit pas toujours exactement de la même grandeur dans les deux cas, l'incertitude restante par suite de la partie negligée de la flexion, n'est que petite vis à vis des erreurs accidentelles des observations. Pour pouvoir apprécier approximativement le montant de ces erreurs accidentelles, j'ai comparé 48 déterminations isolées du temps, avec les 12 moyennes correspondantes. Cette comparaison a donné l'erreur

probable de la correction du chronomètre déduite d'une seule hauteur observée = 0,49, ce qui fait, pour la moyenne de 4 observations, l'erreur probable = 0,24, et pour la moyenne de 8 observations = 0,17; enfin pour la moyenne des résultats obtenus à l'Est et à l'Ouest, l'erreur probable se trouve 0,17, s'il y a eu 4 observations de chaque étoile, et 0,12 si le nombre des observations s'élève à 8. La différence entre les résultats fournis par les deux étoiles est sujette à une erreur probable de 0,34, si le nombre des observations a été 4, et de 0,24 pour 8 observations de chaque étoile. Toutes ces erreurs probables ont été trouvées un peu trop fortes, parce que, par l'arrangement symétrique de nos observations, il y a, dans les résultats moyens, une compensation des erreurs dont les observations isolées ont été affectées.

§ 3. Détermination des latitudes.

Il a été mentionné, dans l'introduction (pag. 161), qu'en dehors des latitudes des points de seconde classe, j'ai déterminé aussi, pendant ce voyage, celles des observatoires de Kharkov et de Kiev. Plus tard les astronomes de ces deux établissements MM. Schidlovsky et Fedorov m'ont communiqué les résultats de recherches plus étendues, faites par eux dans le même but. Ces résultats seront donnés plus bas, mais je ne le crois pas superflu de donner ici d'abord les latitudes des deux observatoires, telles que je les ai déterminées pendant le voyage, parce qu'elles pourront servir à former un jugement sur l'exactitude générale des données fournies par notre théodolithe.

Dans tous les cas, deux étoiles furent observées, l'une au Nord, l'autre au Sud du zénith. Au Nord c'était toujours l'étoile polaire, observée, selon les circonstances, sous différents angles horaires. Pour l'étoile meridionale au contraire, elle a été observée toujours sous des angles horaires en dedans de 30^m. En désignant, pour chaque lieu, le résultat fourni par l'étoile polaire par N, et celui que nous a donné l'étoile meridionale par S, nos observations donnent directement les latitudes suivantes:

Latitude de Kharkov.

Par 8 observations de α Bootis	$S =$	50° 0′ 8″,7
« 8 « « Polaris	$N =$	11,4
	$N - S =$	+ 2,7.

Latitude de Kiev.

Par 8 observations de α Coronae	$S =$	50° 27′ 12″,3
« 8 « « Polaris	$N =$	12,7
	$N - S =$	+ 0,4.



Latitude de Jitomir.

Par 4 observations de α	Aquilae	$S =$	50° 15′ 18,″6
« 4 « «	Polaris	$N =$	24,2
		$N - S =$	+ 5,6.

Latitude d'Odessa.

Par 8 observations de α	Coronae	$S =$	46° 29′ 39,″0
« 8 « «	Polaris	$N =$	41,9
		$N - S =$	+ 2,9.

Latitude de Krementschoug.

Par 8 observations de α	Ophiuchi	$S =$	49° 3′ 51,″4
« 8 « «	Polaris	$N =$	58,1
		$N - S =$	+ 6,7.

Latitude de Poltava.

Par 4 observations de α	Aquilae	$S =$	49° 34′ 53,″9
« 4 « «	Polaris	$N =$	35 5,3
		$N - S =$	+ 11,4.

Latitude d'Orel.

Par 4 observations de α	Aquilae	$S =$	52° 58′ 25,″9
« 4 « «	Polaris	$N =$	27,3
		$N - S =$	+ 1,4.

Ayant comparé 64 observations isolées avec les 16 moyennes correspondantes, l'erreur probable d'une seule observation se trouve = 2,″0, ou de la latitude déduite de 4 observations de deux étoiles = 0,″70, de 8 observations = 0,″50. Il s'en suit que, par le seul effet des erreurs accidentelles des observations, les résultats fournis par les deux étoiles doivent offrir, d'après la probabilité, des différences de 1,″40, si chaque étoile a été observée 4 fois, et de 0,″99 si le nombre des observations a été de 8.

En comparant maintenant les différences observées $N - S$, avec les valeurs qu'il fallait leur attribuer si elles étaient produites par de seules erreurs accidentelles, nous voyons que, pour Poltava, le $N - S$ observé est 6 fois plus grand qu'il ne fallait l'attendre. Nous voyons en outre que tous les $N - S$ sont du même signe positif, tandisqu'ils devaient être tantôt positifs, tantôt négatifs, s'ils étaient produits uniquement par des erreurs accidentelles. Nous en concluons qu'il y a, dans l'instrument ou dans la manière d'observer, une cause qui fait que toutes

les distances au zénith ont été trouvées trop petites. L'analogie nous conduit à supposer que cette cause consiste dans une flexion de la lunette, dont l'effet sur les latitudes serait en proportion du sinus de la distance zénithale de l'étoile observée. D'un autre côté il y a lieu de supposer aussi qu'il y ait des causes dont l'effet serait le même pour toutes les distances au zénith, mais de signe opposé au Nord et au Sud du zénith. Un tel effet pourrait être produit, par exemple, si l'objectif de la lunette ou la plaque qui porte les fils d'araignée ne sont pas bien fixés dans leurs montures. Le petit nombre de nos observations et l'égalité des coefficients de flexion ne permettent pas de décider, laquelle des deux causes ait prévalu dans notre cas. Mais cette même circonstance prouve que nous sommes à peu près indépendants dans le choix de la supposition. En tout cas le résultat moyen ne sera changé que de quelques dixièmes de seconde, soit que nous donnions la préférence à la première supposition ou à la seconde. Je me suis tenu à la première supposition et en combinant tous les $N - S$ avec les coefficients qui leur conviennent, je trouve en moyenne, la valeur de la flexion horizontale $b = +3''\!,7$.

Après avoir corrigé chaque résultat isolé de $\pm b \sin z$, nous sommes parvenus aux latitudes suivantes des lieux d'observation.

Kharkov, par α Bootis	$S' = 50°\ 0'\ 10''\!,5$	
Polaris	$N' = \ 8,9$	
	Moyenne $= 50\ \ 0\ \ 9,7$	$N' - S' = -1''\!,6$.
Kiev, par α Coronae	$S' = 50°\ 27'\ 13''\!,8$	
Polaris	$N' = \ 10,3$	
	Moyenne $= 50\ \ 27\ \ 12,1$	$N' - S' = -3''\!,5$.
Jitomir, par α Aquilae	$S' = 50°\ 15'\ 21''\!,0$	
Polaris	$N' = \ 21,9$	
	Moyenne $= 50\ \ 15\ \ 21,5$	$N' - S' = +0''\!,9$.
Odessa, par α Coronae	$S' = 46°\ 29'\ 40''\!,2$	
Polaris	$N' = \ 39,3$	
	Moyenne $= 46\ \ 29\ \ 39,8$	$N' - S' = -0''\!,9$.
Krementschoug, par α Ophiuchi	$S' = 49°\ 3'\ 53''\!,6$	
Polaris	$N' = \ 55,7$	
	Moyenne $= 49\ \ 3\ \ 54,7$	$N' - S' = +2''\!,1$.
Poltava, par α Aquilae	$S' = 49°\ 34'\ 56''\!,2$	
Polaris	$N' = \ 35\ \ 3,0$	
	Moyenne $= 49\ \ 34\ \ 59,6$	$N' - S' = +6''\!,8$.
Orel, par α Aquilae	$S' = 52°\ 58'\ 28''\!,5$	
Polaris	$N' = \ 25,1$	
	Moyenne $= 52\ \ 58\ \ 26,8$	$N' - S' = -3''\!,4$.

Maintenant les $N' - S'$ n'offrent plus rien d'extraordinaire et s'expliquent, d'une manière satisfaisante, par les erreurs accidentelles des observations. Si nous avions pris la moyenne arithmétique entre les premières valeur de N et S, ce n'aurait été que dans le seul cas d'Odessa que nous aurions obtenu un résultat différent de 0,"7 de notre latitude définitive, quantité à peu près égale à l'erreur probable de la détermination.

En 1851, M. Schidlovsky a publié un mémoire intitulé: *Ueber die geographische Lage der temporairen Sternwarte in Charkow.* Dans ce mémoire, M. Schidlovsky donne, comme résultat définitif de différentes séries d'observations faites par lui et par M. Fedorenko, soit avec l'instrument des passages établi au premier vertical, soit avec un théodolithe, la latitude de l'observatoire temporaire de Kharkov = 50° 0′ 10,"2, valeur différente seulement de 0,"5 de notre détermination.

A Kiev, M. Fedorov a déterminé la latitude du centre de l'observatoire à 50° 27′ 12,"5, à l'aide du grand cercle méridien d'Ertel, appartenant à cet observatoire. Le lieu où j'avais établi mon théodolithe, était de 81 pieds au Sud du centre de l'observatoire. Il faut donc ajouter 0,"8 à ma détermination pour la rendre comparable avec celle de M. Fedorov, ce qui fait ma détermination de la latitude du centre de l'observatoire = 50° 27′ 12,"9, différente seulement de 0,"4 du résultat des observations de M. Fedorov.

La petitesse de ces différences, — 0,"5 et + 0,"4, entre les latitudes déterminées pendant notre voyage et les résultats plus exacts obtenus par des moyens instrumentaux considérablement supérieurs, me paraît un témoignage très favorable pour l'exactitude de nos observations. Elle prouve en même temps que les erreurs probables telles que je les ai déduites de l'accord des différentes observations entre elles, ne sont pas trop petites, et qu'il n'y a aucune raison qui nous fasse supposer que nos observations soient sujettes à des erreurs de nature constante.

§ 4. Comparaisons des chronomètres et des horloges d'observation.

Les comparaisons des chronomètres ont été faites, sous tous les rapports, d'après les mêmes règles que dans les expéditions de l'année précédente. Mais parce qu'en général, dans notre expédition de 1846, les horloges d'observation ont changé d'un lieu à l'autre, il paraît convenable de réunir ici d'abord les comparaisons entre notre chronomètre auxiliaire et les horloges d'observation, pour lesquelles les corrections se trouvent dans le § 2. Chaque comparaison donnée dans les listes suivantes, est la moyenne arithmétique au moins de deux comparaisons entre les deux horloges.

Comparaison des horloges d'observation avec K. 1290.

Moscou, le 30 juin.		*Kharkov, le 7 juillet.*	
K. 1290.	Pend. d'Utzschneider.	K. 1290.	K. 1297.
$14^h\ 38^m\ 41^s,85$	$21^h\ 50^m\ 45^s,00$	$4^h\ 4^m\ 39^s,00$	$11^h\ 12^m\ 33^s,00$
15 4 57,46	22 17 5,00	9 31 20,46	16 40 7,67
15 20 49,85	22 33 0,00	11 0 19,85	18 9 21,50



Nicolajev, le 14 juillet.

K. 1290.	Pendule de Barrauds.
11^h 0^m 33^s,38	18^h 45^m 16^s,33
18 44,08	19 3 30,00
33 15,69	18 4,00
21 3 3,00	4 49 25,00
22 38,31	5 9 3,50
36 17,59	22 45,00.

Kiev, le 18 juillet.

K. 1290.	Pendule de Hauth.
9^h 17^m 12^s,23	17^h 12^m 2^s,00
32 42,62	27 35,00
47 27,56	42 22,25.

Jitomir, le 19 juillet.

K. 1290.	K. 1297.
14^h 15^m 16^s,85	22^h 11^m 54^s,75
44 53,66	41 36,38.

Varsovie, le 23 juillet.

K. 1290.	Pendule Gugenmus 3.
13^h 56^m 32^s,08	21^h 33^m 15^s,00
14 36 48,46	22 13 38,00.

Varsovie, le 28 juillet.

K. 1290.	Pendule Gugenmus 3.
20^h 10^m 18^s,92	4^h 7^m 45^s,50
41 6,92	38 38,50.

Kiev, le 2 août.

K. 1290.	Pendule de Hauth.
14^h 40^m 42^s,23	23^h 37^m 32^s,00
15 0 40,85	57 34,00
12 43,85	0 9 39,00.

Nicolajev, le 7 août.

K. 1290.	Pendule de Barrauds.
20^h 25^m 44^s,77	5^h 47^m 11^s,00
38 43,62	6 0 12,00
48 38,54	10 8,50.

Odessa, le 9 août.

K. 1290.	K. 1297.
9^h 3^m 35^s,54	18^h 21^m 42^s,25
9 29,54	27 37,25
26 54,92	45 5,50.

Nicolajev, le 11 août.

K. 1290.	Pendule de Barrauds.
11^h 49^m 46^s,85	21^h 25^m 36^s,00
12 5 29,77	41 21,50
15 30,69	51 24,00.

Krementschoug, le 13 août.

K. 1290.	K. 1297.
10^h 23^m 45^s,23	14^h 57^m 45^s,25
28 48,46	20 2 49,25
45 2,54	19 6,00.

Poltava, le 14 août.

K. 1290.	K. 1297.
10^h 20^m 52^s,15	19^h 58^m 47^s,25
27 22,85	20 5 19,00
48 56,77	25 56,50.

Kharkov, le 15 août.

K. 1290.	K. 1297.
14^h 1^m 2^s,72	23^h 43^m 29^s,17
15 8 15,69	0 50 53,00
37 39,92	1 20 22,00.

Orel, le 18 août.

K. 1290.	K. 1297.
10^h 46^m 42^s,23	20^h 40^m 22^s,25
53 44,08	47 25,25
11. 13 24,92	21 7 9,25.

Moscou, le 21 août.

K. 1290.	Pend. d'Utzschneider.
8^h 44^m 0^s,46	19^h 21^m 44^s,00
58 51,00	36 37,00
9 11 59,31	49 47,50.

Le chronomètre auxiliaire Kessels 1290 et le chronomètre d'observation Kessels 1297 ont aussi servi au transport du temps. C'est pourquoi, dans les tableaux suivants des comparaisons des chronomètres de voyage, nous rencontrons, pour ces deux chronomètres, quelques comparaisons identiques avec les données du tableau précédent.

Tableau des comparaisons des autres 39 chronomètres avec K. 1290.

Nom du chronomètre.	*Moscou, le 30 juin.* K. 1290.	Chron. comparé.	*Kharkov, le 7 juillet.* K. 1290.	Chron. comparé.
Dent 1818	14h 43m 52s,15	12h 50m 49s,00	4h 23m 16s,85	2h 30m 21s,50
Hauth 32	45 6,69	13 34 32,20	25 7,62	3 14 18,20
Kessels 1276	46 41,08	15 54 46,60	28 35,54	5 37 56,80
Hauth 11	48 13,38	21 32 54,50	31 31,62	11 42 46,00
Hauth 18	48 59,08	19 30 38,00	34 21,46	9 42 10,75
Arnold et Dent 951	50 0,46	11 2 25,00	36 49,15	0 51 0,50
Kessels 1298	50 36,69	14 59 0,75	38 46,39	9 47 30,00
Kessels 1297	51 36,23	21 33 50,50	4 39,00	11 12 33,00
Dent 1828	52 42,46	13 0 10,00	40 39,92	2 48 20,00
« 1613	53 31,38	12 53 48,00	42 26,54	2 43 1,50
« 1687	54 19,62	13 2 38,50	43 59,31	2 52 55,50
« 1705	54 59,77	6 54 1,25	45 22,85	20 44 36,00
« 1730	55 45,92	12 14 51,25	46 49,62	2 5 45,00
« 1739	56 32,31	13 14 32,50	48 15,69	3 6 51,00
« 1774	57 14,77	15 13 44,00	49 51,00	5 7 29,00
« 1776	57 52,62	13 47 18,50	52 10,62	3 42 16,50
« 1787	58 31,38	13 7 57,00	53 28,62	3 3 24,25
« 1789	59 8,77	13 47 27,00	55 13,62	3 44 14,50
« 1798	59 40,62	14 10 47,50	56 49,62	4 9 2,50
« 1799	15 0 39,23	14 36 17,00	58 27,69	4 35 16,00
« 1808	1 16,15	13 41 42,00	5 1 14,31	4 42 31,75
« 1732	8 11,77	15 17 34,00	3 52,85	5 13 31,50
« 1752	8 54,00	15 16 21,00	5 38,77	5 13 15,00
« 1761	9 27,46	15 18 16,50	7 33,92	5 16 46,50
« 1862	10 3,69	15 18 2,50	8 50,54	5 17 21,50
« 1919	10 36,92	15 19 15,00	10 39,92	5 19 45,25
« 1920	11 10,85	15 21 8,00	12 51,00	5 23 20,50
« 1953	12 50,77	15 22 26,60	16 40,15	5 26 54,40
« 1954	13 23,31	15 21 7,50	19 18,62	5 27 16,00
« 1956	13 48,69	15 22 55,00	20 44,54	5 30 20,50
« 1957	14 15,92	15 23 32,50	21 58,85	5 31 45,00
« 1963	14 43,85	15 23 30,00	23 21,00	5 32 43,00
« 1965	15 12,23	15 24 14,00	25 12,23	5 34 45,50
« 1968	15 37,15	15 23 48,50	26 59,31	5 35 25,50
« 1975	16 6,69	15 24 36,00	28 20,54	5 37 15,50
« 1998	16 31,15	15 26 28,00	29 38,08	5 39 15,50
« 2000	17 3,00	15 24 5,00	30 55,62	5 37 49,00
« 2001	17 33,46	15 26 41,25	32 10,39	5 41 47,00
« 2022	18 19,38	15 26 52,50	33 32,54	5 42 19,50

Nom du chronomètre.	*Nicolajev, le 14 juillet.* K. 1290.	*Nicolajev, le 14 juillet.* Chron. comparé.	*Kiev, le 18 juillet.* K. 1290.	*Kiev, le 18 juillet.* Chron. comparé.
Dent 1818	$11^h\ 2^m\ 36^s,23$	$9^h\ 9^m\ 56^s,25$	$9^h\ 19^m\ 8^s,08$	$7^h\ 26^m\ 36^s,00$
Hauth 32	3 14,08	8 52 7,80	20 32,31	8 9 16,60
Kessels 1276	4 6,00	12 14 46,60	21 17,54	10 32 41,80
Hauth 11	4 43,85	18 44 56,00	22 12,69	17 18 4,50
Hauth 18	5 11,08	16 41 50,25	22 44,08	15 14 58,25
Arnold et Dent 951	5 50,08	7 13 48,25	23 13,38	5 28 59,00
Kessels 1298	6 59,54	11 16 19,50	23 44,54	9 33 20,75
Kessels 1297	7 33,69	18 44 4,50	24 13,62	17 16 7,50
Dent 1828	8 20,08	9 16 24,25	24 41,54	7 32 58,50
« 1613	9 12,92	9 10 2,00	25 39,23	7 26 36,50
« 1687	9 58,38	9 19 38,75	26 15,00	7 36 17,50
« 1705	10 46,62	3 10 11,50	26 40,85	1 26 11,00
« 1730	11 20,08	8 30 9,75	27 3,46	6 45 49,75
« 1739	12 2,31	9 31 24,00	27 33,00	7 47 22,00
« 1774	12 45,92	11 31 43,25	28 20,31	9 48 0,00
« 1776	13 48,23	10 4 35,50	28 45,92	8 19 56,00
« 1787	14 22,15	9 24 55,00	29 9,00	7 40 1,00
« 1789	14 57,23	10 4 43,00	29 29,77	8 19 39,50
« 1798	15 52,38	10 29 25,00	29 50,08	8 44 5,00
« 1799	17 3,46	10 55 13,25	30 12,23	9 9 5,00
« 1808	17 33,92	9 59 48,00	30 32,54	8 13 17,00
« 1732	19 59,54	11 29 58,50	34 57,00	9 45 6,00
« 1752	20 35,54	11 28 23,25	35 31,62	9 43 24,75
« 1761	21 7,62	11 30 46,00	36 5,31	9 45 57,00
« 1862	21 35,08	11 30 47,00	36 26,08	9 46 0,00
« 1919	22 6,69	11 31 45,00	36 46,65	9 46 41,25
« 1920	22 37,85	11 33 46,00	37 6,69	9 48 36,00
« 1953	23 35,31	11 34 47,20	38 4,38	9 49 47,60
« 1954	24 15,00	11 32 35,25	38 55,38	9 47 26,50
« 1956	24 48,92	11 35 2,00	39 24,46	9 49 57,00
« 1957	25 26,08	11 35 51,25	39 58,15	9 50 42,50
« 1963	26 1,85	11 36 6,00	40 24,92	9 50 52,00
« 1965	26 37,31	11 36 40,00	41 3,92	9 51 21,75
« 1968	27 36,23	11 36 24,00	42 12,23	9 51 12,00
« 1975	28 30,23	11 37 52,25	42 36,46	9 52 13,25
« 1998	29 14,77	11 40 25,50	43 2,08	9 54 34,00
« 2000	29 53,54	11 36 36,50	43 24,23	9 50 1,00
» 2001	30 25,38	11 40 41,00	43 53,77	9 54 30,00
« 2022	31 8,08	11 40 7,75	44 14,08	9 53 22,50

Nom du chronomètre.	Jitomir, le 19 juillet. K. 1290.	Chron. comparé.	Varsovie, le 23 juillet. K. 1290.	Chron. comparé.
Dent 1818	14h 16m 23s,08	12h 23m 55s,00	14h 5m 32s,54	12h 13m 17s,00
Hauth 32	18 14,77	13 6 57,40	6 32,54	12 55 8,80
Kessels 1276	19 3,85	15 30 42,40	7 18,46	15 19 44,00
Hauth 11	19 44,77	22 20 25,00	8 9,69	22 24 47,75
Hauth 18	20 12,92	20 17 15,25	8 36,23	20 21 32,00
Arnold et Dent 951	20 47,54	10 25 33,00	8 58,85	10 11 11,00
Kessels 1298	21 33,23	14 31 15,75	9 30,46	14 19 32,00
Kessels 1297	15 16,85	22 11 54,74	9 55,62	22 22 16,00
Dent 1828	22 20,77	12 30 43,00	10 27,92	12 19 7,00
« 1613	23 12,69	12 24 13,50	11 52,15	12 13 5,00
« 1687	23 45,23	12 33 56,00	12 22,62	12 23 1,00
« 1705	24 12,69	6 23 46,00	12 57,23	6 12 39,50
« 1730	24 45,92	11 43 32,50	13 27,69	11 32 15,00
« 1739	25 9,92	12 45 10,00	14 4,62	12 34 40,50
« 1774	25 40,38	14 45 34,25	14 33,23	14 35 14,00
« 1776	26 20,08	13 17 38,25	15 14,77	13 7 0,00
« 1787	26 59,54	12 37 59,00	15 44,08	12 27 8,00
« 1789	27 35,08	13 17 54,00	16 5,77	13 6 55,50
« 1798	28 13,38	13 42 42,75	16 33,23	13 31 50,00
« 1799	28 50,08	14 7 57,50	16 55,62	13 56 52,00
« 1808	29 15,92	13 12 11,00	17 25,38	13 0 57,00
« 1732	30 33,69	14 40 47,00	18 44,77	14 29 11,00
« 1752	31 15,00	14 39 10,50	19 57,69	14 27 59,50
« 1761	31 55,85	14 41 52,50	20 31,85	14 30 44,50
« 1862	32 58,15	14 42 40,50	20 54,23	14 31 2,00
« 1919	33 40,15	14 43 41,50	21 22,85	14 31 43,00
« 1920	34 45,23	14 46 22,00	21 48,23	14 33 49,00
« 1953	36 13,38	14 48 8,20	23 9,00	14 35 36,80
« 1954	36 53,54	14 45 29,75	23 35,77	14 32 25,00
« 1956	37 24,92	14 48 5,25	24 7,62	14 35 12,50
« 1957	38 3,00	14 48 54,50	24 34,85	14 35 48,00
« 1963	38 32,77	14 49 8,00	26 21,69	14 37 21,50
« 1965	39 1,85	14 49 26,00	26 52,85	14 37 36,00
« 1968	40 3,92	14 49 8,75	27 45,92	14 37 7,00
« 1975	40 54,69	14 50 37,00	28 30,00	14 38 30,00
« 1998	41 24,23	14 53 3,00	29 10,15	14 41 12,00
« 2000	41 52,62	14 48 28,50	29 36,23	14 36 8,00
« 2001	42 22,85	14 53 6,50	30 7,85	14 41 14,50
« 2022	42 55,15	14 52 7,25	30 32,08	14 39 56,00

Nom du chronomètre.	*Varsovie, le 28 juillet.*		*Kiev, le 2 août.*	
	K. 1290.	Chron. comparé.	K. 1290.	Chron. comparé.
Dent 1818	$20^h\ 17^m\ 32^s,54$	$18^h\ 25^m\ 24^s,50$	$14^h\ 44^m\ 22^s,62$	$12^h\ 52^m\ 29^s,00$
Hauth 32	18 42,00	19 7 6,60	45 40,85	13 33 57,40
Kessels 1276	19 18,00	21 32 40,80	46 39,00	16 0 59,20
Hauth 11	19 59,08	4 57 42,00	47 44,31	23 44 33,25
Hauth 18	20 27,46	2 54 15,00	48 14,54	21 41 3,00
Arnold et Dent 951	20 55,38	16 21 48,50	48 44,77	10 46 41,00
Kessels 1298	21 26,54	20 31 47,00	50 3,00	15 0 48,00
Kessels 1297	21 54,23	4 54 46,75	50 49,38	23 42 28,50
Dent 1828	22 37,15	18 31 29,75	51 28,15	13 0 40,00
« 1613	24 44,08	18 26 8,00	52 47,31	12 54 26,00
« 1687	25 14,31	18 36 19,25	53 29,08	13 5 6,50
« 1705	25 42,23	12 25 33,00	53 55,85	6 53 57,25
« 1730	26 4,85	17 44 44,00	54 22,85	12 13 2,00
« 1739	26 34,62	18 47 42,50	54 50,08	13 16 39,50
« 1774	27 9,00	20 48 44,00	55 17,08	15 17 48,50
« 1776	27 50,08	19 20 4,00	55 53,77	13 48 40,00
« 1787	28 15,00	18 40 0,50	56 23,08	13 8 37,00
« 1789	28 46,85	19 20 6,50	56 59,54	13 48 54,50
« 1798	29 15,00	19 45 25,00	57 48,46	14 14 54,50
« 1799	29 45,69	20 10 37,50	58 15,92	14 40 5,00
« 1808	30 21,92	19 14 29,00	58 43,38	13 43 30,25
« 1732	30 51,46	20 41 28,50	15 2 39,23	15 13 34,25
« 1752	31 42,23	20 39 49,00	3 7,62	15 11 25,00
« 1761	32 11,77	20 42 40,00	3 35,77	15 14 25,00
« 1862	33 1,62	20 43 39,50	3 57,00	15 15 8,00
« 1919	33 26,08	20 44 8,75	4 19,85	15 15 27,50
« 1920	34 2,77	20 46 28,25	5 1,15	15 17 57,75
« 1953	34 31,88	20 47 36,60	5 39,69	15 19 27,40
« 1954	35 1,62	20 44 5,00	6 13,38	15 15 35,00
« 1956	35 25,15	20 46 54,00	6 43,15	15 18 43,00
« 1957	35 55,62	20 47 33,50	7 1,62	15 19 7,00
« 1963	36 19,15	20 47 51,00	7 32,54	15 19 36,00
« 1965	36 44,54	20 47 47,00	7 55,85	15 19 22,75
« 1968	37 12,69	20 46 50,50	8 28,62	15 18 28,00
« 1975	37 40,85	20 48 5,50	8 54,69	15 19 42,50
« 1998	38 15,92	20 50 55,00	9 18,69	15 22 30,00
« 2000	38 48,69	20 45 14,00	9 49,62	15 16 11,75
« 2001	39 15,00	20 50 50,50	10 19,15	15 22 24,50
« 2022	39 45,00	20 49 26,00	10 53,08	15 20 49,50

Nom du chronomètre.	Nicolajev, le 7 août. K. 1290.	Nicolajev, le 7 août. Chron. comparé.	Odessa, le 9 août. K. 1290.	Odessa, le 9 août. Chron. comparé.
Dent 1818	20ʰ 27ᵐ 42ˢ,69	18ʰ 36ᵐ 3ˢ,00	9ʰ 4ᵐ 22ˢ,62	7ʰ 12ᵐ 45ˢ,00
Hauth 32	28 53,08	19 16 58,00	5 58,62	7 53 58,00
Kessels 1276	29 25,85	21 44 45,80	6 33,00	10 22 8,20
Hauth 11	30 27,69	5 48 11,25	7 12,69	18 31 1,25
Hauth 18	30 51,69	3 44 29,25	7 43,62	16 27 23,25
Arnold et Dent 951	31 13,62	16 25 13,00	8 15,00	5 1 13,00
Kessels 1298	31 39,00	20 42 50,00	8 37,85	9 19 54,00
Kessels 1297	32 3,46	5 44 14,00	9 29,54	18 27 37,25
Dent 1828	32 28,38	18 42 0,75	10 9,00	7 19 44,75
« 1613	33 3,46	18 34 55,00	10 57,92	7 12 51,00
« 1687	33 26,08	18 45 36,50	11 21,69	7 23 39,50
« 1705	33 49,38	12 34 2,00	11 44,54	1 11 59,00
« 1730	34 17,54	17 52 53,50	12 7,15	6 30 40,00
« 1739	34 47,31	18 57 23,50	12 31,85	7 35 18,50
« 1774	35 19,62	20 58 50,00	12 53,77	9 36 39,50
« 1776	35 43,15	19 29 1,00	13 27,69	8 6 54,00
« 1787	36 8,54	18 48 52,00	13 59,31	7 26 50,00
« 1789	36 26,54	19 28 57,00	14 18,69	8 6 57,50
« 1798	36 52,85	19 54 58,50	14 43,85	8 33 5,00
« 1799	37 12,69	20 20 3,00	15 8,08	8 58 14,00
« 1808	37 34,38	19 23 3,50	15 29,77	8 1 11,50
« 1732	39 39,92	20 50 51,00	16 58,62	9 28 12,50
« 1752	40 0,69	20 48 27,50	17 26,08	9 25 54,00
« 1761	40 22,38	20 51 30,00	18 10,15	9 29 21,50
« 1862	40 45,46	20 52 30,50	18 38,31	9 30 31,50
« 1919	41 6,69	20 52 40,00	19 6,23	9 30 45,50
« 1920	41 31,15	20 54 58,25	19 28,85	9 33 3,00
« 1953	42 14,77	20 56 48,00	20 38,08	9 35 22,20
« 1954	42 47,54	20 52 26,00	21 21,00	9 31 2,25
« 1956	43 11,77	20 55 41,50	21 58,85	9 34 35,00
« 1957	43 33,69	20 56 4,50	22 21,92	9 34 57,00
« 1963	44 1,85	20 56 45,50	22 48,69	9 35 43,50
« 1965	44 43,38	20 56 33,50	23 12,69	9 35 8,00
« 1968	45 23,31	20 55 44,50	24 15,00	9 34 40,00
« 1975	45 54,46	20 57 7,50	24 37,15	9 35 56,00
« 1998	46 19,38	21 0 6,00	24 56,54	9 38 52,00
« 2000	46 42,69	20 53 0,50	25 23,31	9 31 38,50
« 2001	47 20,31	20 59 56,50	25 41,77	9 38 25,00
« 2022	47 39,92	20 57 54,00	26 12,23	9 36 30,50

Nom du chronomètre.	*Nicolajev, le 11 août.* K. 1290.	Chron. comparé.	*Krementschoug, le 13 août.* K. 1290.	Chron. comparé.
Dent 1818	11ʰ 51ᵐ 39ˢ,00	10ʰ 0ᵐ 6ˢ,00	10ʰ 24ᵐ 24ˢ,92	8ʰ 32ᵐ 58ˢ,50
Hauth 32	53 16,15	10 41 8,60	25 8,77	9 12 57,80
Kessels 1276	53 59,08	13 9 56,40	25 48,69	11 42 9,80
Hauth 11	54 33,69	21 26 46,50	26 26,77	20 6 25,00
Hauth 18	55 6,00	19 23 8,25	26 57,46	18 2 42,75
Arnold et Dent 951	55 42,46	7 46 37,50	27 36,23	6 16 55,00
Kessels 1298	56 14,08	12 7 38,00	27 57,92	10 39 32,50
Kessels 1297	56 53,31	21 23 16,25	28 48,46	20 2 49,25
Dent 1828	57 28,85	10 7 10,00	29 18,23	8 39 8,00
« 1613	58 22,38	10 0 18,00	29 49,62	8 31 50,25
« 1687	58 55,15	10 11 24,00	30 36,46	8 43 18,75
« 1705	59 24,23	3 59 42,00	30 57,46	2 31 20,00
« 1730	59 48,69	9 18 17,00	31 17,77	7 49 45,50
« 1739	12 0 10,85	10 23 15,00	31 42,69	8 55 3,50
« 1774	0 35,77	12 24 43,50	32 4,62	10 56 35,50
« 1776	1 6,92	10 54 45,25	32 33,92	9 26 26,25
« 1787	1 40,62	10 14 41,75	33 13,15	8 46 26,50
« 1789	2 12,23	10 55 3,50	33 35,31	9 26 41,00
« 1798	2 44,08	11 21 28,00	33 59,31	9 53 7,00
« 1799	3 8,08	11 46 37,00	34 24,46	10 18 16,75
« 1808	3 34,15	10 49 33,50	34 50,77	9 21 8,25
« 1732	6 36,46	12 17 55,00	35 22,38	10 46 48,00
« 1752	7 8,54	12 15 38,50	35 58,85	10 44 33,00
« 1761	7 31,62	12 18 48,75	36 26,08	10 47 51,50
« 1862	8 2,77	12 20 8,00	36 51,23	10 49 10,75
« 1919	8 30,23	12 20 18,00	37 9,23	10 49 7,75
« 1920	8 58,85	12 22 44,00	37 39,92	10 51 38,00
« 1953	9 29,77	12 24 28,20	38 59,54	10 54 15,80
« 1954	10 3,00	12 19 51,00	39 38,08	10 49 32,50
« 1956	10 28,38	12 23 15,50	40 3,92	10 53 3,00
« 1957	10 52,62	12 23 36,00	40 24,69	10 53 18,00
« 1963	11 22,38	12 24 35,00	40 53,54	10 54 23,50
« 1965	11 43,85	12 23 48,00	41 26,54	10 53 40,50
« 1968	12 18,69	12 22 49,00	41 51,92	10 52 30,00
« 1975	12 41,31	12 24 9,00	42 28,15	10 54 6,25
« 1998	13 8,08	12 27 15,50	42 50,08	10 57 13,00
« 2000	13 29,31	12 19 41,00	43 12,92	10 49 24,25
« 2001	13 53,31	12 26 47,50	43 41,54	10 56 49,00
« 2022	14 12,69	12 24 36,00	44 6,23	10 54 36,50

Nom du chronomètre.	Poltava, le 14 août, K. 1290.	Chron. comparé.	Kharkov, le 15 août. K. 1290.	Chron. comparé.
Dent 1818	10h 22m 15s,23	8h 30m 52s,00	15h 9m 26s,31	13h 18m 5s,00
Hauth 32	23 10,38	9 10 57,60	10 13,62	13 57 57,60
Kessels 1276	23 53,54	11 40 26,60	10 58,62	16 27 45,20
Hauth 11	24 46,85	20 8 44,75	11 31,85	1 0 20,50
Hauth 18	25 21,69	18 5 5,50	12 10,38	22 56 39,75
Arnold et Dent 951	25 56,77	6 14 32,00	12 51,92	11 1 10,75
Kessels 1298	26 37,15	10 38 16,75	13 24,46	15 25 8,50
Kessels 1297	27 22,85	20 5 19,00	14 18,46	0 56 56,75
Dent 1828	28 5,08	8 37 59,00	15 9,00	13 25 6,00
« 1613	28 57,23	8 31 0,00	15 45,23	13 17 50,50
« 1687	29 39,23	8 42 27,75	16 27,46	13 29 23,00
« 1705	30 20,31	2 30 45,00	17 9,69	7 17 36,50
« 1730	31 8,54	7 49 35,50	17 44,77	12 36 10,00
« 1739	31 45,23	8 55 14,00	18 15,00	13 41 53,00
« 1774	32 15,00	10 56 57,75	18 43,15	15 43 39,50
« 1776	32 49,38	9 26 48,50	19 18,00	14 13 24,25
« 1787	33 22,62	8 46 41,50	19 59,08	13 33 24,00
« 1789	34 14,08	9 27 26,50	20 34,15	14 13 54,50
« 1798	34 50,31	9 54 9,50	21 9,00	14 40 41,25
« 1799	35 28,85	10 19 32,50	21 46,15	15 6 3,50
« 1808	36 0,92	9 22 27,50	22 14,08	14 8 50,00
« 1732	37 16,15	10 48 45,00	24 19,62	15 35 51,25
« 1752	37 47,77	10 46 23,50	25 3,69	15 33 40,50
« 1761	38 16,15	10 49 45,50	25 34,15	15 37 7,50
« 1862	38 42,69	10 51 9,00	26 3,69	15 38 37,50
« 1919	39 14,08	10 51 17,75	26 38,77	15 38 48,00
« 1920	40 3,23	10 54 7,50	27 8,31	15 41 19,00
« 1953	40 41,31	10 56 6,40	29 51,92	15 45 26,00
« 1954	41 17,54	10 51 15,00	30 25,15	15 40 25,00
« 1956	41 46,62	10 54 51,50	31 5,31	15 44 15,75
« 1957	42 35,54	10 55 33,25	31 45,69	15 44 48,00
» 1963	43 12,23	10 56 50,75	32 12,23	15 45 59,50
« 1965	43 49,38	10 56 8,00	32 44,54	15 45 8,25
« 1968	44 21,69	10 55 3,50	33 18,23	15 44 4,00
« 1975	44 57,23	10 56 40,50	33 47,54	15 45 36,50
« 1998	45 25,85	10 59 57,00	34 22,38	15 49 4,00
« 2000	45 54,46	10 52 5,50	34 45,69	15 40 55,75
« 2001	46 59,08	11 0 13,00	35 18,00	15 48 38,50
« 2022	48 4,62	10 58 38,50	35 45,69	15 46 23,50

Nom du chronomètre.	*Orel, le 18 août.* K. 1290.	Chron. comparé.	*Moscou, le 21 août.* K. 1290.	Chron. comparé.
Dent 1818	10h 48m 4s,15	8h 56m 49s,00	8h 47m 47s,54	6h 56m 40s,00
Hauth 32	49 20,77	9 36 57,80	48 26,54	7 35 58,00
Kessels 1276	50 25,31	12 7 44,00	49 2,77	10 6 56,00
Hauth 11	51 30,92	20 51 38,75	49 29,77	19 1 23,00
Hauth 18	52 10,62	18 47 52,25	49 54,69	16 57 12,00
Arnold et Dent 951	52 49,15	6 39 55,00	50 22,85	4 35 52,50
Kessels 1298	53 15,00	11 5 11,00	50 42,00	9 2 51,25
Kessels 1297	53 44,08	20 47 25,25	51 5,54	18 56 12,75
Dent 1828	54 24,92	9 4 31,50	51 33,46	7 1 51,00
« 1613	55 3,92	8 57 15,50	51 59,08	6 54 18,50
« 1687	55 37,15	9 8 49,00	52 30,00	7 6 0,25
« 1705	56 2,08	2 56 34,00	52 47,77	0 53 26,00
« 1730	56 33,69	8 14 55,50	53 21,00	6 11 41,00
« 1739	57 5,77	9 21 5,00	53 45,00	7 18 9,50
« 1774	57 33,69	11 23 2,50	54 5,77	9 20 9,00
« 1776	58 2,08	9 52 25,00	54 26,54	7 49 8,50
« 1787	58 30,23	9 12 10,00	54 58,38	7 8 55,00
« 1789	58 57,23	9 52 36,00	55 17,77	7 49 17,50
« 1798	59 27,23	10 19 30,00	55 40,38	8 16 16,50
« 1799	11 0 19,85	10 45 9,00	56 4,85	8 41 29,00
« 1808	0 49,15	9 47 47,00	56 22,85	7 43 42,50
« 1732	2 37,62	11 14 16,75	9 1 16,85	9 13 5,00
« 1752	3 13,85	11 11 54,00	1 44,08	9 10 26,50
« 1761	3 39,92	11 15 23,50	2 7,85	9 14 2,50
« 1862	4 4,38	11 16 56,00	2 31,15	9 15 43,00
« 1919	4 27,92	11 16 51,00	2 58,62	9 15 37,00
« 1920	5 2,54	11 19 29,50	3 34,38	9 18 19,25
« 1953	6 37,15	11 22 36,40	4 2,31	9 20 26,60
« 1954	7 5,31	11 17 11,50	4 30,92	9 14 45,25
« 1956	7 32,77	11 20 56,75	4 53,77	9 18 33,50
« 1957	8 4,62	11 21 18,50	5 16,38	9 18 43,00
« 1963	8 28,85	11 22 37,00	5 51,00	9 20 21,50
« 1965	8 53,77	11 21 29,50	6 14,08	9 19 3,00
« 1968	9 39,69	11 20 35,50	6 46,15	9 17 52,75
« 1975	10 24,23	11 22 27,00	7 8,77	9 19 26,75
« 1998	10 49,62	11 25 55,50	7 30,69	9 23 1,00
« 2000	11 19,85	11 17 27,50	7 54,69	9 14 0,00
« 2001	11 54,46	11 25 31,50	8 18,23	9 22 13,00
« 2022	12 32,08	11 23 19,00	8 43,62	9 19 40,50

§ 5. Corrections du chronomètre auxiliaire Kessels 1290.

En général, pendant cette expédition, les intervalles entre les époques moyennes des comparaisons des chronomètres de voyage et les époques moyennes des observations du temps les plus voisines, ne s'élèvent qu'à un couple d'heures. Ce n'est qu'à Nicolajev et à Kiev où ces intervalles montent à 8,6 heures, et dans ces cas les marches des horloges d'observation sont très exactement connues par les corrections déterminées les jours voisins. Il s'en suit que les corrections à déduire pour nos chronomètres de voyage, seront très peu influencées par les petites irrégularités dans les marches des horloges d'observation.

Dans les cas où le chronomètre Kessels 1297 a servi d'horloge d'observation, j'ai réduit les corrections de ce chronomètre, déterminées par les observations, sur l'époque moyenne des comparaisons des autres chronomètres, à l'aide de la marche moyenne horaire $= + 0^s,140$, déduite des observations faites à Kharkov le 7 juillet et le 15 août. La régularité connue de la marche de ce chronomètre, constatée plus tard par l'exactitude des longitudes qu'il a fournies, nous était une garantie qu'il garderait le temps, pendant le bref espace qui sépare les observations des époques des comparaisons, avec toute exactitude requise. Ce n'est qu'à Kharkov que cet espace était un peu plus long, en s'élevant le 7 juillet jusqu'à 4,7 heures. Mais, à cette station, ayant comparé ce chronomètre, pour plus de sûreté, avec notre chronomètre auxiliaire, immédiatement après la fin des observations, nous avions l'avantage d'avoir ici deux chronomètres qui gardaient ensemble le temps jusqu'à l'époque des comparaisons des autres chronomètres. Dans la réduction de la correction du chronomètre auxiliaire, donnée pour l'époque des observations, à l'époque des comparaisons des autres chronomètres, j'ai accepté sa marche horaire, par rapport au temps moyen, $= + 0^s,086$, telle qu'elle suivait des comparaisons faites à Moscou et à Varsovie.

La conversion des corrections des horloges, données primitivement par rapport au temps sidéral de chaque lieu, en des corrections correspondantes au temps moyen, a été exécutée à l'aide des données du Nautical Almanac. Dans ce calcul les longitudes de nos lieux d'observation ont été supposées approximativement:

Moscou	2^h	30^m	17^s	à l'Est	de Greenwich
Varsovie	1	24	7	«	«
Kharkov	2	25	9	«	«
Nicolajev	2	7	56	«	«
Kiev	2	2	15	«	«
Jitomir	1	54	43	«	«
Odessa	2	3	0	«	«
Krementschoug	2	13	46	«	«
Poltava	2	18	27	«	«
Orel	2	24	28	«	«

Ces longitudes demandent les réductions suivantes à appliquer aux temps sidéraux donnés dans le Nautical Almanac, pour les midis moyens de Greenwich, afin de les faire correspondre aux midis moyens de chaque lieu d'observation:

pour *Moscou*	— 24ˢ,69
Varsovie	— 13,82
Kharkov	— 23,84
Nicolajev	— 21,02
Kiev	— 20,08
Jitomir	— 18,84
Odessa	— 20,21
Krementschoug	— 21,97
Poltava	— 22,74
Orel	— 23,73.

Ayant calculé les corrections du chronomètre auxiliaire pour les époques des comparaisons de ce chronomètre avec les horloges d'observation, j'en ai déduit, par une simple interpolation, les corrections de ce chronomètre correspondantes aux époques moyennes des comparaisons des chronomètres de voyage. Dans le calcul ultérieur des longitudes j'ai supposé que, pour chaque série de comparaisons, cette correction soit restée constante pendant toute la durée des comparaisons c. à. d. que, dans ce temps, le chronomètre auxiliaire ait suivi exactement le temps moyen. Cette supposition n'est pas tout à fait rigoureuse, mais comme la marche horaire du chronomètre auxiliaire n'est que de + 0ˢ,086, et que la durée des comparaisons ne s'élève guère à une demie heure, l'erreur commise par cette supposition, n'affectera les corrections des chronomètres placés à la tête et à la fin de notre collection que de ± 0ˢ,022. Il s'en suit que l'accord des longitudes fournies par les différents chronomètres ne sera presque pas du tout influencé par l'inexactitude de la supposition, et qu'elle n'exercera absolument aucune influence sur les longitudes moyennes à déduire de tous les chronomètres. Voici la liste des corrections *c* du chronomètre auxiliaire Kessels 1290:

		Temps du chron.	
Moscou,	le 30 juin	15ʰ 5ᵐ	c = + 37ᵐ 18ˢ,50
Kharkov,	7 juillet	5 0	c = + 32 6,28
Nicolajev,	14 «	11 18	c = + 15 20,53
Kiev,	18 «	9 32	c = + 9 34,49
Jitomir,	19 «	14 30	c = + 2 15,49
Varsovie,	23 «	14 16	c = — 28 4,88
Varsovie,	28 «	20 26	c = — 27 57,60
Kiev,	2 août	15 0	c = + 10 8,85
Nicolajev,	7 «	20 38	c = + 16 13,50
Odessa,	9 «	9 15	c = + 11 19,30
Nicolajev,	11 «	12 5	c = + 16 17,33
Krementschoug,	13 «	10 33	c = + 22 6,32
Poltava,	14 «	10 32	c = + 26 48,95
Kharkov,	15 «	15 23	c = + 33 28,11
Orel,	18 «	11 0	c = + 32 55,08
Moscou,	21 «	8 58	c = + 39 1,99.

§ 6. Première déduction des longitudes.

Le calcul des longitudes se divise en deux parties. D'abord il fallait déduire les longitudes des trois observatoires par une interpolation entre celles des points fondamentaux, Moscou et Varsovie. Ensuite, en acceptant déjà les longitudes de ces trois observatoires comme exactement fixées, celles des points de seconde classe devaient être interpolées entre celles des points principaux les plus voisins. Tous ces calculs ont été exécutés de la même manière que, dans les expéditions de 1845, pour les stations intermédiaires Valdai et Vilkomir.

Lors du premier calcul des longitudes, l'exacte valeur de la différence en longitude entre les points fondamentaux, Moscou et Varsovie, n'était pas encore définitivement fixée. Nous l'avions supposée = $1^h\ 6^m\ 9^s{,}68$, trop grande de $0^s{,}22$. Également, les valeurs des longitudes des points principaux, dont nous nous sommes servis dans le calcul de celles des points de seconde classe, n'étaient pas encore les valeurs définitives. C'est pourquoi il y a aura lieu d'appliquer plus tard aux longitudes primitivement déduites, de petites corrections constantes pour tous les chronomètres.

Avec la différence en longitude entre les observatoires de Moscou et de Varsovie, j'ai changé d'abord les corrections des chronomètres déterminées au second point, en corrections correspondantes au point de sortie. Comparant ensuite les corrections déterminées le 30 juin avec celles du 23 juillet et soustrayant également celles du 28 juillet de celles du 21 août, j'ai obtenu les marches totales des chronomètres, par rapport au temps moyen, pendant les deux voyages, dont je désignerai le premier par *A*, le second par *B*. La durée du transport du temps, pendant le voyage *A* a été de 22 jours 23,3 heures, pendant le voyage *B* de 23 jours 10,5 heures. En divisant maintenant les marches totales par le nombre d'heures correspondant, nous avons déduit les marches horaires des chronomètres que voici.

	Voyage *A*.	Voyage *B*.	Diff. *B*—*A*.
Kessels 1290	+ 0ˢ,0840	+ 0ˢ,0884	+ 0ˢ,0044
Dent 1818	— 0,0024	— 0,0188	— 0,0164
Hauth 32	+ 0,1733	+ 0,1826	+ 0,0093
Kessels 1276	— 0,3877	— 0,3906	— 0,0029
Hauth 11	— 9,9226	— 9,9210	+ 0,0016
Hauth 18	— 9,8498	— 9,8492	+ 0,0006
Arnold et Dent 951	+ 1,1948	+ 1,7243	+ 0,5299
Kessels 1298	— 0,0928	— 0,1043	— 0,0115
Kessels 1297	— 9,7219	— 9,7163	+ 0ˢ,0044
Dent 1828	— 0,0458	— 0,0621	— 0,0163
« 1613	— 0,0180	— 0,0099	+ 0,0081
« 1687	— 0,1690	— 0,1690	0,0000
« 1705	+ 0,0100	+ 0,0043	— 0,0057
« 1730	+ 0,1167	+ 0,1224	+ 0,0057
« 1739	— 0,1984	— 0,2599	— 0,0615
« 1774	— 0,3723	— 0,3868	— 0,0145

	Voyage *A*.	Voyage *B*.	Diff. *B*—*A*.
Dent 1776	— 0,1688	— 0,1739	— 0,0051
« 1787	— 0,1306	— 0,1439	— 0,0133
« 1789	— 0,1908	— 0,1952	— 0,0044
« 1798	— 0,3693	— 0,3831	— 0,0138
« 1799	— 0,3851	— 0,3941	— 0,0090
« 1808	— 0,2530	— 0,2527	+ 0,0003
« 1732	— 0,0321	— 0,0376	— 0,0055
« 1752	+ 0,0208	+ 0,0252	+ 0,0044
« 1761	— 0,0677	— 0,0647	+ 0,0030
« 1862	— 0,1500	— 0,1843	— 0,0343
« 1919	— 0,1012	— 0,1166	— 0,0154
« 1920	— 0,1403	— 0,1585	— 0,0182
« 1953	— 0,2280	— 0,2642	— 0,0362
« 1954	— 0,0340	— 0,0373	— 0,0033
« 1956	— 0,1311	— 0,1434	— 0,0123
« 1957	— 0,1275	— 0,1042	+ 0,0233
« 1963	— 0,1585	— 0,2281	— 0,0696
« 1965	— 0,0999	— 0,1002	— 0,0003
« 1968	— 0,0425	— 0,0689	— 0,0264
« 1975	— 0,0805	— 0,1124	— 0,0319
« 1998	— 0,1428	— 0,2149	— 0,0721
« 2000	+ 0,1389	+ 0,1239	— 0,0150
« 2001	— 0,1316	— 0,1583	— 0,0267
« 2022	— 0,0082	— 0,0460	— 0,0378

La dernière colonne montre que tous les chronomètres de Dent qui portent des numéros au delà de 1808, à l'exception d'un seul, ont accéléré leurs marches avec le temps. C'est que ces chronomètres, nouvellement construits par l'artiste, n'avaient pas encore été assez long temps en usage pour s'approprier des marches uniformes. Évidemment l'effet de cette accélération, étant en proportion des carrés du temps, sera beaucoup plus petit dans les longitudes que nous déduirons de chaque voyage à part.

Dans les tableaux suivants nous avons désigné;

par Δ, la différence en longitude entre les points principaux, employée dans les calculs;

par λ, la longitude du lieu à déterminer; les moyennes des longitudes fournies dans le voyage *A* par λ^a, dans le voyage *B* par λ^b;

par τ et τ', les durées du transport du temps entre les époques moyennes des comparaisons des chronomètres sur les points principaux et le point à déterminer.

Après avoir déduit les longitudes données par chaque chronomètre à part, j'ai pris d'abord la moyenne, en assignant le même poids à tous les chronomètres. Cela s'entend que, dans ces moyennes, les résultats fournis par le chronomètre non-compensé, Arnold et Dent 951, devaient être exclus.

Kharkov, à l'Ouest de Moscou.

Points principaux: Moscou et Varsovie.

$A = 1^h 6^m 9^s,68.$

	Voyage *A* $\tau = 158^h,0$ $\tau' = 393,3$	Voyage *B* $\tau = 137^h,6$ $\tau' = 426,9.$
	λ	λ
Kessels 1290	$5^m 25^s,49$	$5^m 21^s,71$
Dent 1818	19,65	22,69
Hauth 32	24,62	21,28
Kessels 1276	26,83	20,98
Hauth 11	40,64	14,78
Hauth 18	28,70	21,48
Arnold et Dent 951	(10 7,54)	(4 25,79)
Kessels 1298	17,12	23,02
Kessels 1297	23,47	22,06
Dent 1828	17,54	21,88
« 1613	27,72	21,09
« 1687	22,85	22,43
« 1705	25,47	21,86
« 1730	20,69	22,27
« 1739	16,01	23,14
« 1774	22,21	20,22
« 1776	25,57	22,09
« 1787	21,61	21,98
« 1789	24,74	21,36
« 1798	19,87	22,72
« 1799	21,91	21,31
« 1808	23,84	24,93
« 1732	23,57	22,53
« 1752	24,74	24,79
« 1761	24,98	21,48
« 1862	20,68	21,20
« 1919	23,48	20,77
« 1920	22,41	21,51
« 1953	14,60	20,03
« 1954	20,03	24,53
« 1956	21,14	24,32
« 1957	21,63	23,91
« 1963	23,01	22,03
« 1965	27,91	22,45
« 1968	20,34	22,53
« 1975	25,13	20,32
« 1998	15,38	14,76
« 2000	25,57	21,59
« 2001	20,21	21,39
« 2022	24,77	21,14
	$\lambda^a = 5$ 22,98	$\lambda^b = 5$ 21,71

Nicolajev, à l'Ouest de Moscou.
Points principaux: Moscou et Varsovie.
$\Lambda = 1^h\,6^m\,9^s,68$.

	Voyage *A*	Voyage *B*
	$\tau = 332^h,3$	$\tau = 236^h,9$
	$\tau' = 219,0$	$\tau' = 240,2.$
	λ	λ
Kesséls 1290	$22^m 25^s,88$	$22^m 21^s,78$
Dent 1818	20,35	23,04
Hauth 32	23,77	22,58
Kessels 1276	26,87	21,59
Hauth 11	31,97	15,55
Hauth 18	25,37	22,96
Arnold et Dent 951	(24 8,58)	(21 40,16)
Kessels 1298	23,02	24,05
Kessels 1297	24,21	22,63
Dent 1828	19,39	23,21
« 1613	24,44	23,51
« 1687	23,28	23,39
« 1705	24,01	22,33
« 1730	21,08	24,37
« 1739	13,53	25,19
« 1774	22,36	20,94
« 1776	23,27	21,50
« 1787	21,80	22,64
« 1789	22,10	22,48
« 1798	20,99	22,74
« 1799	22,02	22,63
« 1808	22,13	22,10
« 1732	24,03	23,78
« 1752	25,60	25,46
« 1761	24,82	22,45
« 1862	21,26	21,60
« 1919	24,59	21,46
« 1920	22,37	22,32
« 1953	18,29	22,26
« 1954	22,75	25,94
« 1956	21,18	25,53
« 1957	24,21	26,30
« 1963	23,32	18,23
« 1965	25,69	22,91
« 1968	20,27	25,05
« 1975	23,93	20,49
« 1998	24,42	13,59
« 2000	25,06	21,26
« 2001	22,07	21,42
« 2022	21,81	21,30
	$\lambda^a = 22\ 23,01$	$\lambda^b = 22\ 22,37$

Dans le calcul des longitudes du voyage *B*, j'ai éliminé, pour Nicolajev, les marches des chronomètres pendant l'intervalle entre le 7 et le 11 août, employé au voyage d'Odessa. C'est pourquoi ici la durée totale du transport du temps, entre Varsovie et Moscou, est plus courte que pour les autres lieux, déterminés pendant le même voyage.

Kiev, à l'Ouest de Moscou.

Points principaux: Moscou et Varsovie.

$\Delta = 1^h\, 6^m\, 9^s,68.$

	Voyage *A*	Voyage *B*
	$\tau = 426^h,5$	$\tau = 450^h,0$
	$\tau' = 124,7$	$\tau' = 114,5.$
	λ	λ
Kessels 1290	$28^m\, 19^s,83$	$28^m\, 13^s,35$
Dent 1818	14,07	15,50
Hauth 32	16,73	16,08
Kessels 1276	17,38	15,90
Hauth 11	22,05	13,66
Hauth 18	17,64	16,77
Arnold et Dent 951	(29 34,73)	(23,72)
Kessels 1298	13,12	15,83
Kessels 1297	16,74	17,49
Dent 1828	13,90	15,37
« 1613	16,98	16,87
« 1687	15,53	16,36
« 1705	16,94	14,36
« 1730	14,73	17,24
« 1739	8,19	15,02
« 1774	15,69	15,39
« 1776	16,22	15,65
« 1787	14,69	15,19
« 1789	14,12	16,21
« 1798	14,55	15,44
« 1799	14,76	15,41
« 1808	14,72	14,10
« 1732	17,08	16,91
« 1752	19,03	16,73
« 1761	17,80	16,83
« 1862	15,17	15,24
« 1919	17,39	14,86
« 1920	16,36	16,20
« 1953	14,19	15,47
« 1954	16,44	17,20
« 1956	14,33	17,81
« 1957	17,42	18,80
« 1963	17,36	8,73
« 1965	17,46	16,20
« 1968	14,31	16,91
« 1975	17,15	13,53
« 1998	18,20	10,85
« 2000	17,99	14,23
« 2001	16,32	14,96
« 2022	15,83	13,38
	$\lambda^a = 28\ \ 16,11$	$\lambda^b = 28\ \ 15,69$

Jitomir, à l'Ouest de Kiev.

Points principaux: Kiev et Varsovie.

$\Delta = 0^h\,37^m\,53^s{,}91.$

$\tau = 29^s{,}0$

$\tau' = 95{,}8.$

Odessa, à l'Ouest de Nicolajev.

$\tau = 36^s{,}6$

$\tau' = 50{,}8.$

	Jitomir λ	Odessa λ
Kessels 1290	$7^m\,22^s{,}37$	$4^m\,55^s{,}81$
Dent 1818	22,53	55,07
Hauth 32	22,58	55,48
Kessels 1276	22,45	55,41
Hauth 11	21,52	56,68
Hauth 18	22,35	55,60
Arnold et Dent 951	(11,77)	(5 11,64)
Kessels 1298	22,81	55,45
Kessels 1297	22,77	55,85
Dent 1828	22,51	55,50
« 1613	22,30	55,64
« 1687	22,32	55,47
« 1705	22,72	55,49
« 1730	22,43	55,90
« 1739	22,58	54,56
« 1774	22,38	55,51
« 1776	22,31	55,69
« 1787	22,42	55,64
« 1789	22,27	55,44
« 1798	22,46	55,28
« 1799	22,25	55,25
« 1808	22,05	55,76
« 1732	22,69	55,49
« 1752	22,73	55,59
« 1761	22,47	55,55
« 1862	22,95	55,50
« 1919	23,20	55,71
« 1920	22,53	55,30
« 1953	23,62	56,15
« 1954	23,26	54,60
« 1956	22,66	54,95
« 1957	22,84	54,81
« 1963	22,92	54,84
« 1965	22,80	55,12
« 1968	22,49	55,80
« 1975	22,51	55,48
« 1998	22,28	55,94
« 2000	22,65	55,75
« 2001	22,73	55,32
« 2022	22,46	56,13
	$\lambda^a = 7\;\;22{,}57$	$\lambda^b = 4\;\;55{,}50$

Krementschoug, à l'Ouest de Kharkov.

Points principaux: Nicolajev et Kharkov.

$\varDelta = 0^h\,17^m\,0^s{,}40.$

$\tau = 46^h{,}5$

$\tau' = 52{,}8.$

	λ
Kessels 1290	11ᵐ 16ˢ,27
Dent 1818	17,38
Hauth 32	16,82
Kessels 1276	16,97
Hauth 11	14,95
Hauth 18	16,69
Arnold et Dent 951	(10 53,22)
Kessels 1298	17,51
Kessels 1297	17,03
Dent 1828	17,46
« 1613	16,76
« 1687	17,21
« 1705	16,81
« 1730	17,13
« 1739	17,07
« 1774	16,64
« 1776	17,18
« 1787	17,35
« 1789	17,06
« 1798	17,41
« 1799	16,96
« 1808	17,28
« 1732	17,22
« 1752	17,25
« 1761	16,97
« 1862	17,18
« 1919	16,97
« 1920	17,25
« 1953	17,40
« 1954	17,14
« 1956	17,31
« 1957	17,34
« 1963	17,39
« 1965	16,93
« 1968	16,80
« 1975	16,72
« 1998	15,77
« 2000	16,68
« 2001	17,22
« 2022	16,44
	$\lambda^b = 11$ 16,97

Poltava, à l'Ouest de Kharkov.

Points principaux: Nicolajev et Kharkov.

$\varDelta = 0^h\,17^m\,0^s{,}40.$

$\tau = 70^h{,}5$

$\tau' = 28{,}8.$

λ
6ᵐ 36ˢ,15
37,62
36,94
36,91
34,06
36,70
(7,25)
37,55
36,74
37,67
36,45
36,86
36,65
36,99
36,72
36,65
37,11
37,01
36,65
37,10
36,48
37,41
37,17
37,06
36,85
36,93
36,81
37,14
37,50
37,20
37,35
37,04
37,44
36,73
36,67
36,63
35,59
36,66
37,20
36,42
$\lambda^b = 6$ 36,84

Orel, à l'Ouest de Moscou.

Points principaux: Kharkov et Moscou.

$\Delta = 0^h\,5^m\,22^s{,}54$.

$\tau = 67^s{,}6$
$\tau' = 70{,}0.$

	λ
Kessels 1290	6^m $1^s{,}14$
Dent 1818	0,54
Hauth 32	0,35
Kessels 1276	0,49
Hauth 11	5 59,61
Hauth 18	6 0,83
Arnold et Dent 951	(11,36)
Kessels 1298	0,71
Kessels 1297	0,84
Dent 1828	0,63
« 1613	0,50
« 1687	0,40
« 1705	0,64
« 1730	0,31
« 1739	5 59,50
« 1774	6 0,74
« 1776	0,26
« 1787	0,41
« 1789	0,21
« 1798	0,28
« 1799	0,09
« 1808	1,55
« 1732	0,52
« 1752	2,53
« 1761	0,91
« 1862	0,26
« 1919	0,67
« 1920	0,61
« 1953	1,64
« 1954	0,37
« 1956	0,28
« 1957	0,76
« 1963	0,78
« 1965	0,77
« 1968	0,95
« 1975	0,70
« 1998	1,49
« 2000	1,06
« 2001	0,85
« 2022	0,88
	$\lambda^b = 6$ 0,67

§ 7. Corrections à appliquer aux longitudes précédentes.

En comparant attentivement les différences entre les longitudes fournies par les chronomètres qui avaient déjà servi en 1845, et les longitudes moyennes, avec les coefficients de compensation de ces chronomètres, déduits des voyages de l'année précédente (v. § 16 de la première partie de ce mémoire) et avec les résultats obtenus par le chronomètre non-compensé Arnold et Dent 951, en comparant, dis-je, ces quantités, on reconnaît aisément que l'effet de la température se prononce très distinctement dans les nouvelles opérations et surtout dans la première détermination de la longitude de Kharkov. C'est ainsi que par ex. les longitudes données par le chronomètre Hauth 11 qui avait un coefficient de compensation positif considérable, diffèrent toujours des longitudes moyennes dans le sens de celles que nous a fournies le chronomètre non compensé. Au contraire, les chronomètres Dent 1730 et Dent 1789, pour lesquels ce coefficient était négatif, donnent, presque dans tous les cas, des longitudes différentes des moyennes dans le sens opposé. Il n'y a donc pas de doute que nous n'eussions gagné en exactitude des résultats, et qu'un accord encore plus parfait ne se fût établi, s'il avait été possible d'introduire partout ces corrections thermométriques. Malheureusement parmi nos 39 chronomètres, il n'y avait que 16, qui avaient été employés déjà l'année précédente, et pour ceux-ci les expériences directes faites sur la compensation, en indiquant des variations notables du degré de compensation dans des intervalles comparativement brefs, l'avaient rendu très incertain, que les coefficients déterminés en 1845 pouvaient trouver application encore en 1846. Il est vrai que les longitudes déterminées à cette dernière occasion, pouvaient elles-mêmes conduire à une évaluation de ces coefficients. Mais les valeurs qu'on aurait obtenues par ce procédé, pour chaque chronomètre isolé, n'auraient pu prétendre à aucune exactitude, à cause de la longue durée du transport du temps, par laquelle l'effet des irrégularités accidentelles dans les marches des chronomètres a dû accroître en trop forte proportion, vis à vis des effets thermométriques. C'est pourquoi j'ai renoncé à corriger les longitudes données par chaque chronomètre isolé, de l'influence des changements de la température.

Il restait encore à discuter si, dans le calcul des longitudes moyennes, il y avait raison d'attribuer de différents poids relatifs aux différents chronomètres. J'ai déjà dit plus haut (pag. 164) que la méthode que j'avais eu en vue d'abord, pour la déduction des poids, aurait réclamé des calculs trop prolixes, et que je l'ai abandonnée par cette raison. Mais il y avait encore la possibilité de déduire les poids du seul accord des différentes longitudes avec leurs moyennes respectives. Cependant ce dernier expédient n'était plus applicable, dès qu'on voulait négliger les corrections thermométriques. D'ailleurs il n'aurait pu donner que des résultats extrêmement vagues. Il fallait dont assigner le même poids à tous les chronomètres c. à d. il fallait prendre simplement la moyenne arithmétique des longitudes qu'ils avaient données.

Parmi nos chronomètres, il y a cependant quelques uns, qui ont offert des longitudes tellement différentes des moyennes arithmétiques des longitudes fournies par tous les chronomètres, et que nous appelerons ici les longitudes moyennes, qu'il faut supposer qu'ils ont été

troublés extraordinairement dans leurs marches, soit par l'introduction de corps étrangers dans les rouages, soit par un défaut trop fort de la compensation, soit enfin par quelque autre cause accidentelle. Il m'a paru nécessaire de rejeter entièrement les longitudes fournies par ces chronomètres. Mais, pour ne pas procéder trop arbitrairement, j'ai fixé comme règle, que tout chronomètre devait être exclus, qui, dans un seul cas, avait donné une longitude différente de la longitude moyenne, de plus de 6^s. Cette condition m'a obligé de rejeter les 5 chronomètres suivants: Hauth 11, Dent 1739, 1953, 1963, 1998.

Les 34 chronomètres restants donnent maintenant:

	λ^a	λ^b
Kharkov	$5^m 23^s,13$	$5^m 22^s,11$
Nicolajev	22 23,12	22 22,87
Kiev	28 16,13	28 15,83
Jitomir	7 22,57	
Odessa		4 55,48
Krementschoug		11 17,04
Poltava		6 36,93
Orel		6 0,68.

Dans nos calculs des longitudes des trois observatoires, Kharkov, Nicolajev et Kiev, nous avions supposé la différence en longitude entre les points principaux, Moscou et Varsovie, $\varDelta = 1^h 6^m 9^s,68$, au lieu de la valeur définitive fournie par les expéditions de 1845, $\varDelta = 1^h 6^m 9^s,46$. Cette dernière quantité demande encore une petite réduction de $+ 0^s,045$, pour la faire correspondre au petit pavillon de l'observatoire de Moscou, où nous avions établi notre lunette méridienne. Nous avons donc $d\varDelta = - 0^s,18$. Les corrections correspondantes des longitudes des trois observatoires se calculent par la formule $d\lambda = \frac{\tau}{\tau + \tau'} d\varDelta$, où pour τ et τ' il faudra mettre les durées du transport du temps, indiquées dans les listes précédentes. C'est ainsi que nous avons trouvé:

	$d\lambda^a$	$d\lambda^b$
pour *Kharkov*	$- 0^s,05$	$- 0^s,04$
« *Nicolajev*	$- 0,11$	$- 0,09$
« *Kiev*	$- 0,14$	$- 0,14.$

et en ajoutant ces corrections aux valeurs précédentes, les longitudes corrigées:

	λ^a	λ^b	$\lambda^a - \lambda^b$
Kharkov	$5^m 23^s,08$	$5^m 22^s,07$	$+ 1^s,01$
Nicolajev	22 23,01	22 22,78	$+ 0,23$
Kiev	28 15,99	28 15,69	$+ 0,30.$

Comparons maintenant avec ces longitudes, les valeurs l obtenues à l'aide du chronomètre non compensé. En corrigeant les l également des quantités $d\lambda$, nous avons:

		l^a	l^b	$l^a - \lambda^a$	$l^b - \lambda^b$	$l^a - l^b$
pour	*Kharkov*	$10^m\ 7^s{,}49$	$4^m25^s{,}75$	$+4^m44^s{,}41$	$-0^m56^s{,}32$	$+5^m40^s{,}73$
«	*Nicolajev*	24 8,42	21 40,07	+1 45,46	—0 42,71	+2 28,17
«	*Kiev*	29 34,59	28 23,58	+1 18,60	+0 7,89	+1 10,71.

La valeur $\lambda^a - \lambda^b$ trouvée pour Kharkov est trop forte pour être produite seulement par la combinaison des petites erreurs dans les déterminations du temps absolu et dans les corrections du chronomètre auxiliaire, avec les irrégularités dans les marches des chronomètres, indépendantes de la température. Ces trois sources d'erreur combinées auraient pu produire des différences de deux à trois dixièmes de seconde, telles qu'elles se montrent dans les longitudes de Nicolajev et de Kiev, mais point une différence d'une seconde entière. C'est pourquoi il paraît qu'il faudra attribuer la majeure partie de la différence $\lambda^a - \lambda^b$ trouvée pour Kharkov, à l'effet des changements de la température qui, dans ce cas, ont été extraordinairement forts, à ce qu'on voit par les l^a et les l^b. Dans les longitudes de Nicolajev et de Kiev, les effets des changements de la température se sont prononcés également, mais en plus faible proportion et comparativement plus altérés par les trois sources d'erreur indiquées. Nous avons donc les trois équations de la forme $(l^a - l^b)\xi = (\lambda^a - \lambda^b)$, pour la détermination du coefficient de compensation ξ, qui convient à la moyenne de tous les chronomètres.

$$340{,}73\,\xi = +1^s{,}01$$
$$148{,}17\,\xi = +0{,}23$$
$$70{,}71\,\xi = +0{,}30,$$

d'où nous tirons $\xi = +0^s{,}00275$. Avec ce ξ nous avons calculé les corrections suivantes $d\lambda = (\lambda - l)\xi$, à appliquer aux différentes longitudes

		$d\lambda^a$	$d\lambda^b$
pour	*Kharkov*	$-0^s{,}78$	$+0^s{,}15$
«	*Nicolajev*	—0,29	+0,12
«	*Kiev*	—0,22	—0,02;

et nous avons, par conséquent, en définitive

	λ^a	λ^b	Moyenne
Kharkov	$5^m22^s{,}30$	$5^m22^s{,}22$	$5^m22^s{,}26$
Nicolajev	22 22,72	22 22,90	22 22,81
Kiev	28 15,77	28 15,67	28 15,72.

La dernière valeur moyenne de la longitude de Kharkov, diffère de $0^s{,}32$ de celle que nous aurions trouvée, si nous avions négligé les températures. On voit facilement que nous serions parvenus à peu près à la même valeur, si nous avions attribué aux deux déterminations, λ^a et λ^b, des poids relatifs déduits de l'accord des longitudes fournies par chaque chronomètre à part

avec les longitudes moyennes. En effet, le calcul donne ainsi la longitude moyenne $= 5^m 22^s,27$, différente seulement de $+ 0^s,01$ de notre valeur définitive. — Pour les deux autres observatoires les longitudes moyennes ne sont changées que de $0^s,08$ et $0^s,12$, par l'introduction des corrections thermométriques.

Les longitudes des points de seconde classe demandent des corrections analogues à celles que nous avons appliquées aux longitudes des trois observatoires.

Pour Jitomir nous avons supposé la différence en longitude entre les points principaux Kiev et Varsovie, $\varLambda = 0^h 37^m 53^s,91$, tandisque notre calcul définitif la fait $\varLambda = 0^h 37^m 53^s,78$. Nous avons donc $d\varLambda = - 0^s,13$; ce qui donne $d\lambda = - 0^s,03$.

La longitude d'Odessa, étant déterminée par le retour sur le même point principal, Nicolajev, ne demande aucune correction de cette nature.

Les longitudes de Krementschoug et de Poltava sont interpolées entre celles de Kharkov et de Nicolajev. La valeur supposée de $\varLambda$ était $0^h 17^m 0^s,40$; le calcul définitif le fait $\varLambda = 0^h 17^m 0^s,55$. Il y a donc $d\varLambda = + 0^s,15$, d'où nous tirons

pour	*Krementschoug*	$d\lambda = + 0^s,08$
«	*Poltava*	$+ 0,04$.

Enfin, la longitude d'Orel étant interpolée entre celles de Moscou et de Kharkov, nous avons le $\varLambda$ définitif $0^h 5^m 22^s,26$, différent de $- 0^s,28$ de la valeur supposée $\varLambda = 0^h 5^m 22^s,54$. La correction à appliquer à la longitude d'Orel s'en déduit $d\lambda = - 0^s,14$.

Il reste maintenant à trouver les corrections thermométriques pour les longitudes des points de seconde classe. En prenant les différences entre les longitudes données par le chronomètre non compensé et les longitudes moyennes, nous avons ici

pour	*Jitomir*	$l - \lambda = - 0^m 10^s,77$
«	*Odessa*	$+ 0$ 16,16
«	*Krementschoug*	$- 0$ 23,90
«	*Poltava*	$- 0$ 29,72
«	*Orel*	$+ 0$ 10,82.

En multipliant ces quantités par le même coefficient moyen de compensation ξ, déduit des longitudes des trois observatoires, nous avons les corrections thermométriques à ajouter aux longitudes

de *Jitomir*	$d\lambda = + 0^s,03$
d'*Odessa*	$- 0,04$
de *Krementschoug*	$+ 0,07$
de *Poltava*	$+ 0,08$
d'*Orel*	$- 0,03$.

Résumons maintenant dans un seul tableau les longitudes de nos lieux d'observation, en appliquant à celles des points de seconde classe les deux corrections trouvées.

Longitudes relatives des lieux d'observation.

Kharkov	5^{m}22^s,26	à l'Ouest	de Moscou
Nicolajev	22 22,81	«	«
Kiev	28 15,72	«	«
Jitomir	7 22,57	«	de Kiev
Odessa	4 55,44	«	de Nicolajev
Krementschoug	11 17,19	«	de Kharkov
Poltava	6 37,05	«	de Kharkov
Orel	6 0,51	«	de Moscou.

Il est impossible d'indiquer, pour chacune de ces longitudes relatives, l'exacte valeur de l'erreur probable qui lui convient. Mais il paraît que, dans tous les cas, on peut l'estimer au dessous de 0^s,20. La longitude la moins exacte est celle de Kharkov, par suite de l'effet extraordinaire des températures et parce qu'ici la détermination du temps est moins sûre que pour les deux autres observatoires. Quant aux longitudes relatives des points de seconde classe, l'erreur probable doit être estimée de très près égale à celle des déterminations du temps sur ces points mêmes, augmentée un peu par suite de la petite incertitude existante dans la longitude relative des deux observatoires qui avaient servi de points principaux. On voit dans les listes précédentes des longitudes fournies par les différents chronomètres que, dans ces cas, par suite de la plus courte durée des voyages entre chaque couple de points principaux, l'exactitude du transport du temps peut être regardée comme absolue.

§ 8. Jonctions entre les lieux d'observation et des points fixes.

En général j'ai choisi les lieux d'observation aussi près que possible des points fixes, sur lesquels nos déterminations devaient être réduites, de sorte que les réductions sont d'ordinaire très petites. Pour les observatoires ces réductions étaient zéro, parce que nos positions se rapportent directement à l'endroit de l'instrument des passages ou du cercle méridien qui avait servi aux observations et qu'on peut regarder en même temps comme l'instrument principal de chacun de ces établissements. Ce n'est que le point de sortie, l'observatoire de Moscou qui en fait une exception. Ici le petit pavillon, dans lequel notre lunette méridienne était établie, se trouvait de 0^s,045 à l'Est du cercle méridien de l'observatoire.

Ce ne sont donc que les cinq points de seconde classe, pour lesquels des jonctions entre les lieux d'observation et des points fixes devaient être exécutées. Pour quatre de ces points, Jitomir, Krementschoug, Poltava et Orel la jonction était extrêmement facile. Ayant établi le théodolithe sur les places libres qui entourent les églises, je déterminais approximativement, à l'aide du petit cercle horizontal de cet instrument, l'azimuth de la coupôle ou du clocher de l'église par rapport au lieu d'observation, et mon compagnon de voyage mesurait, à l'aide

d'une ligne de mesure, les distances directes entre ces lieux et la base du mur le plus proche de l'église. En levant ensuite, à coup d'oeil, un plan de l'édifice et en mesurant les dimensions des parois, M. Schvarev parvenait à déduire exactement la distance horizontale entre le lieu d'observation et l'objet dont j'avais déterminé l'azimuth. C'est ainsi qu'en comptant les azimuths du Nord par l'Est, nous avons trouvé les relations suivantes.

A *Jitomir* l'azimuth de la croix sur l'église des Bernardins $= 2° 30'$
la distance « « « $= 126$ pieds.

A *Krementschoug* l'azimuth de la coupôle de la cathédrale $= 164° 45'$
la distance « « $= 638$ pieds.

A *Poltava* l'azimuth du clocher de la cathédrale $= 228°$
la distance « « $= 101$ pieds.

A *Orel* l'azimuth du clocher de la nouvelle cathédrale $= 32°$
la distance « « « $= 64$ pieds.

Ce n'est qu'à Odessa que la jonction était un peu plus compliquée. Pour ne pas transporter trop loin les instruments, nous avions choisi le lieu d'observation sur l'extrémité du môle qui abrite le port des vaissaux de cabotage. Nos observations donnent donc directement la position de l'entrée dans ce port. Mais il parut désirable de joindre aussi ce lieu d'observation avec un point encore mieux désigné, nommément avec la cathédrale de la ville, dont la distance était à peu près d'une verste et demie et qui se trouve à une élévation considérable au dessus du môle. La flèche de la cathédrale était visible du lieu d'observation. Je pouvais donc employer directement le théodolithe pour en déterminer l'azimuth à $213° 36'$ et l'angle d'élévation à $4° 11'$. Tandisque je faisais les observations pour la détermination du temps et de la latitude, M. Knorre mesura, à l'aide d'une ligne de mesure, sur la surface horizontale des remparts du môle, une base de 223 pieds de long, dont il joignit ensuite les extrémités, avec mon lieu d'observation et avec la cathédrale, par trois triangles. Sur les deux extrémités de la base, M. Knorre mesura les angles inclinés par un petit sextant, tandisque le théodolithe nous donna les angles horizontaux sur le lieu d'observation. Avec les réductions nécessaires par rapport à l'élévation relative des différents points, cette petite opération conduisit à la distance horizontale entre le lieu d'observation et la cathédrale, qui fut trouvée de 5382 pieds.

En convertissant maintenant les relations linéaires et angulaires trouvées, en quantités correspondantes en latitude et en longitude, nous trouvons les réductions suivantes à ajouter aux coordonnées des lieux d'observation pour obtenir celles des points fixes. Le signe positif désigne ici, dans les réductions en longitude, que le point fixe se trouve à l'Ouest du lieu d'observation.

	Réduction en latitude	Réduction en longitude
A *Jitomir*	+ 1,"2	— 0,ˢ01
» *Odessa*	— 44,2	+ 2,84
« *Krementschoug*	— 5,9	— 0,22
« *Poltava*	— 0,5	+ 0,08
« *Orel*	+ 0,5	— 0,04.

§ 9. Résultats définitifs de l'expédition de 1846.

Après avoir combiné les réductions en longitude, avec les différences en longitude données pag. 199, nous parvenons maintenant, par les additions nécessaires, aux différences en longitude entre les différents lieux déterminés pendant cette expédition et le petit pavillon de l'observatoire de Moscou.

Kharkov	5ᵐ 22ˢ,26	à l'Ouest	du pavillon	de l'observatoire	de Moscou
Nicolajev	22 22,81	«	«	«	«
Kiev	28 15,72	«	«	«	«
Jitomir	35 38,28	«	«	«	«
Odessa	27 21,09	«	«	«	«
Krementschoug	16 39,23	«	«	«	«
Poltava	11 59,39	«	«	«	«
Orel	6 0,47	«	«	«	«

La longitude du pavillon de l'observatoire de Moscou a été trouvée, par l'expédition de 1845, de $0^h\,28^m\,58^s,28$ à l'Est de Poulkova (voy. la première partie de mon mémoire p. 122). Les différences entre cette longitude et les quantités précédentes nous donnent par conséquent les longitudes des différents points à l'Est de Poulkova. En y ajoutant $2^h\,1^m\,18^s,67$ nous aurons les longitudes de ces lieux par rapport à Greenwich. Les latitudes des points de seconde classe, données dans le tableau suivant, sont telles que je les ai déterminées pendant le voyage. Pour Kharkov et Kiev j'ai introduit les latitudes d'après les déterminations de MM. Schidlovsky et Fedorov, mentionnées plus haut (pag. 175) et pour Nicolajev telle qu'elle est donnée par M. Knorre dans les *Astronomische Nachrichten No. 158.*

Tableau des résultats définitifs.

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich
Kharkov, observatoire temporaire	50° 0′ 10″,2	+ 0^h 23^m 36^s,02	2^h 24^m 54^s,69
Nicolajev, observatoire, lieu du cercle méridien	46 58 20,6	+ 6 35,47	2 7 54,14
Kiev, observatoire, lieu de la lunette méridienne	50 27 12,5	+ 0 42,56	2 2 1,23
Jitomir, croix sur l'église des Bernardins	50 15 22,7	— 6 40,00	1 54 38,67
Odessa, flèche de la Cathédrale	46 28 55,6	+ 1 37,19	2 2 55,86
Krementschoug, coupôle de la Cathédrale	49 3 48,8	+ 12 19,05	2 13 37,72
Poltava, clocher de la Cathédrale	49 34 59,1	+ 16 58,89	2 18 17,56
Orël, clocher de la nouvelle Cathédrale	52 58 27,3	+ 22 57,81	2 24 16,48.

SUR

L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES

QUI CONTIENNENT

UNE RACINE CARRÉE D'UN POLYNÔME DU TROISIÈME OU DU QUATRIÈME DEGRÉ.

PAR

P. Tchébychev.

Lu le 20 janvier 1854.

§ 1.

Dans le Mémoire *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles*, publié, en 1853, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, nous avons donné une méthode pour trouver la partie algébrique dans l'expression de l'intégrale $\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, en tant qu'elle est possible sous forme finie, et déterminer séparément tous les termes logarithmiques à l'aide de certaines conditions qu'ils doivent vérifier. A présent, nous allons montrer comment on peut trouver, d'après ces conditions, les termes logarithmiques, dans le cas le plus simple et le plus intéressant, savoir: celui où la différentielle contient une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré. Faute de méthode générale, on ne connaît que des cas très particuliers, où une pareille différentielle s'intègre sous forme finie; dans plusieurs autres cas, pour lesquels cette intégration a aussi lieu, on n'y parvient qu'en essayant différentes transformations, et, le plus souvent, on renonce à l'idée de chercher l'intégrale après avoir fait beaucoup de tentatives sans succès. Or, d'après nos recherches, citées plus haut, les méthodes particulières et les essais de différentes transformations qu'on emploie dans cette intégration, seront remplacés par une méthode générale et directe dès qu'on sera parvenu à définir les termes logarithmiques dans la valeur de $\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda}}$, d'après les conditions que nous avons trouvées pour leur détermination. C'est ce que nous allons faire ici, en donnant la méthode, d'après laquelle la recherche de ces termes se réduit toujours à cette question résolue par Abel:

«Trouver toutes les différentielles de la forme $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, où ρ et R sont des fonctions entières «de x, dont les intégrales puissent s'exprimer par une formule de la forme $\log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$. (*Oeuvres compl. T. I, pag. 33.*)

Cette intégration sera donc due à Abel et par le principe fondamental, d'où nous sommes partis dans nos recherches sur l'intégration des différentielles irrationnelles, et par la méthode de résoudre la question citée, à laquelle se réduit finalement la détermination des termes logarithmiques dans la valeur de $\int \frac{f_0 x}{F_0 x} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda}}$. Ainsi, nos recherches, comme nous nous plaisons à le croire, rempliront, sous un certain rapport, une lacune qui restait entre les

Mémoires de ce grand Géomètre, où il donne la forme générale des intégrales des différentielles algébriques, en tant qu'elles sont possibles sous forme finie, et ceux où il cherche leur valeur, en faisant une hypothèse particulière.

La réduction de nos équations, dont nous venons de parler, est indispensable aussi pour simplifier l'intégration des différentielles plus compliquées. Quant aux différentielles qui ne contiennent sous le signe du radical carré qu'une fonction du premier ou du second degré, cette réduction conduit immédiatement à trouver la partie logarithmique de leurs intégrales. Outre cela, cette réduction est remarquable par différents résultats relatifs à la nature des intégrales qu'on peut en tirer, et cela nous fournit un rapprochement très intéressant de la construction des valeurs irrationnelles avec la règle et le compas, et l'intégration des différentielles sous forme finie. Ainsi on verra que, la somme des nombres n°, n', n'', ... étant impaire, l'intégrale

$$\left(n^0x+\frac{n'\Delta(a')}{x-a'}+\frac{n''\Delta(a'')}{x-a''}+\ldots+C\right)\frac{dx}{\Delta(x)},$$

où nous avons fait pour abréger $\Delta(x)=\sqrt{x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\lambda}$, ne peut être exprimée sous forme finie, si, d'après les quantités

$$a',\ a'',\ldots\ldots\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \lambda,$$

et à l'aide de la règle et du compas, on ne peut construire aucune des racines de l'équation

$$x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\lambda=0.$$

Par exemple, on reconnaît que les intégrales

$$\int\frac{x+C}{\sqrt{x^4+2x^2-8x+9}}dx,\quad \int\frac{n^0x+\frac{3(2n'-n^0-1)}{x}+C}{\sqrt{x^4+2x^2-8x+9}}dx,\quad \int\frac{n^0x+\frac{2n'}{x-1}+\frac{3(2n''-n^0-n'-1)}{x}+C}{\sqrt{x^4+2x^2-8x+9}}dx,$$

etc., etc., etc......

sont impossibles sous forme finie, parce que, à l'aide de la règle et du compas, on ne peut pas inscrire dans le cercle un polygone régulier de 7 côtés, ce qui est nécessaire pour la construction des racines de l'équation $x^4+2x^2-8x+9=0$.

Il y a d'autres questions de l'Analyse transcendante, où la même méthode de réduction peut être avantageusement employée, savoir, quand on cherche à exprimer la somme des intégrales

$$\int^{x_{\prime}}\frac{f_0x}{\alpha_{\prime}x+\beta_{\prime}}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}+\int^{x_{\prime\prime}}\frac{f_0x}{\alpha_{\prime}x+\beta_{\prime}}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}+\ldots\ldots$$

par une somme d'un nombre déterminé d'intégrales semblables, en y ajoutant une certaine onction algébrique et logarithmique.

Enfin, cette même méthode, appliquée aux nombres, nous donne un procédé à l'aide duquel on trouvera la représentation d'un nombre donné par la forme x^2-ny^2, toutes les fois que ce nombre peut être mis sous cette forme et qu'on connait la valeur de x, pour laquelle la

forme $x^2 - n$ est divisible par ce nombre. Dans le cas de $n = -1$, cela se réduit à la méthode ingénieuse que M. Hermite a employée pour démontrer que tous les nombres premiers de la forme $4k+1$ sont toujours décomposables en une somme de deux carrés, et pour effectuer en même temps cette décomposition.

§ 2.

Si dans les formules de notre Mémoire, cité plus haut, on fait

$$m = 2,\ \Delta = \sqrt[m]{\theta x} = \sqrt{\theta x},$$

on trouve que l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

dont l'une des racines primitives nous a servi pour composer des nombres complexes, se réduit à $x^2 - 1 = 0$, et comme la racine primitive de cette équation est égale à -1, les nombres complexes que nous avons désignés par

$$\overset{\circ}{M_i},\ \overset{'}{M_i},\ \overset{''}{M_i},\ \ldots\ldots$$

deviennent réels et rationnels. De plus, la forme générale des termes logarithmiques

$$A \log [\varphi(\Delta) . \varphi^{\alpha}(\alpha\Delta) . \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots . \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)],$$

à cause de $m = 2$, $\Delta = \sqrt{\theta x}$, devient

$$A \log [\varphi(\sqrt{\theta x}) . \varphi^{-1}(-\sqrt{\theta x})] = A \log \frac{\varphi(\sqrt{\theta x})}{\varphi(-\sqrt{\theta x})},$$

et comme φ est une fonction entière, on aura

$$\varphi(\sqrt{\theta x}) = X_0 + X\sqrt{\theta x},\quad \varphi(-\sqrt{\theta x}) = X_0 - X\sqrt{\theta x},$$

où X_0, X sont des fonctions entières.

Donc, les termes logarithmiques, dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{Fx}{fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, s'écriront ainsi:

$$A \log \frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}.$$

En cherchant à déterminer ces termes, nous avons trouvé que le coefficient A sera égal à une valeur connue, divisée par un nombre entier inconnu, et si l'on désigne ce nombre par n_i, le degré de la fonction $\frac{X_0 + X\sqrt{\theta x}}{X_0 - X\sqrt{\theta x}}$ sera exprimé par le produit $n_i . \overset{\circ}{M_i}$, où $\overset{\circ}{M_i}$ est une valeur connue. De plus, cette fonction, pour toutes les valeurs finies de x, sera en rapport fini avec la puissance n_i^{me} de la fonction

$$(x - x')^{\overset{'}{M_i}} . (x - x'')^{\overset{''}{M_i}} . (x - x''')^{\overset{'''}{M_i}} \ldots . (x - x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}} (x - x^{(\lambda-1)});$$

où

$$\overset{'}{M_i},\ \overset{''}{M_i},\ \overset{'''}{M_i},\ \ldots\ldots M_i^{(\lambda-1)},$$

dans le cas que nous examinons, sont réels et rationnels. En passant à la détermination des inconnus n_i, X_0, X, nous remarquons que n_i doit être susceptible de réduire les produits

$$n_i\overset{\circ}{M}_i,\ n_i\overset{'}{M}_i,\ n_i\overset{''}{M}_i,\ n_i\overset{'''}{M}_i,\ n_iM_i^{\lambda-1}$$

à des nombres entiers: car le produit $n_iM_i^{\circ}$ désigne le degré de $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, qui ne peut être fractionnaire, X_0, X étant des fonctions entières; la même chose a lieu relativement aux produits

$$n_i\overset{'}{M}_i,\ n_i\overset{''}{M}_i,\ n_i\overset{'''}{M}_i\ldots\ldots n_iM_i^{\lambda-1},$$

qui sont égaux aux exposants de $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$, ... $x-x^{(\lambda-1)}$ dans les premiers termes du développement de $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ suivant les puissances croissantes de $x-x'$, $x-x''$, $x-x'''$... ...$x-x^{(\lambda-1)}$. Donc, n_i doit être divisible par le plus petit dénominateur, auquel les quantités

$$\overset{\circ}{M}_i,\ \overset{'}{M}_i,\ \overset{''}{M}_i\ldots.M_i^{\lambda-1}$$

peuvent être réduites, et par conséquent, si l'on désigne ce dénominateur par σ, et le quotient $n_i:\sigma$ par $+\rho$ ou $-\rho$, on aura

$$n_i=\pm\rho\sigma,$$

où nous prendrons celui des deux signes qui appartient à la valeur de M_i°. D'après cela, $n_iM_i^{\circ}$, le degré de $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, sera exprimé par $\pm\sigma M_i^{\circ}\rho$, où $\pm\sigma M_i^{\circ}$ se réduira à un nombre entier et positif. En dénotant ce nombre par π, et désignant d'après la notation d'Abel, le degré de $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ par $\delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, nous aurons, relativement à ρ, cette équation

$$\delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho.$$

Quant à la fonction qui, pour toutes les valeurs finies de x, reste dans un rapport fini avec la fonction $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, en vertu de $n=\pm\rho\sigma$, elle se réduit à

$$\left[(x-x')^{\overset{'}{M}_i}.(x-x'')^{\overset{''}{M}_i}.(x-x'')^{\overset{'''}{M}_i}\ldots.(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{\lambda-1}}.\ (x-x^{(\lambda+1)})\right]^{\pm\rho\sigma},$$

et comme les produits $\sigma\overset{'}{M}_i$, $\sigma\overset{''}{M}_i$, ...$\sigma M_i^{(\lambda-1)}$, d'après la propriété du nombre σ, se réduisent à des nombres entiers, la fonction

$$\left[(x-x')^{\overset{'}{M}_i}.(x-x'')^{\overset{''}{M}_i}.(x-x''')^{\overset{'''}{M}_i}\ldots.(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{\lambda-1}}.\ (x-x^{(\lambda+1)})\right]^{\pm\sigma}$$

ne peut être que rationnelle. Donc, si nous faisons, pour abréger,

$$\left[(x-x')^{\overset{'}{M}_i}.(x-x'')^{\overset{''}{M}_i}.(x-x''')^{\overset{'''}{M}_i}\ldots..(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{\lambda-1}}.\ (x-x^{(\lambda+1)})\right]^{\pm\sigma}=\frac{u}{v};$$

où u, v sont des fonctions entières, et que nous convenions de désigner par la lettre T toutes les



fonctions qui restent finies, tant que x n'est pas infini, la propriété de la fonction $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ en question, sera exprimée par cette équation

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}.$$

C'est d'après cette équation, combinée avec la suivante:

$$\delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho,$$

que nous devons chercher le nombre ρ et les fonctions X_0 et X.

Ces équations seront le plus souvent très compliquées à cause du degré élevé des fonctions u et v, et de la valeur considérable de π. Or, nous allons montrer qu'on peut les réduire à la forme, où le degré de uv, plus le nombre π, sera au-dessous du degré de $\sqrt{\theta x}$.

§ 3.

Il n'est pas difficile de s'assurer, que θ_1, θ_2 étant deux fonctions entières dont le produit est égal à θx, et p et q des fonctions entières quelconques, on peut mettre la fonction cherchée $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ sous la forme

$$\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^{\rho}\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}},$$

en choisissant convenablement les fonctions entières P_0 et Q_0. En effet, le quotient

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}:\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^{\rho}$$

se réduit à

$$\frac{(X_0+X\sqrt{\theta x})(p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2})^{\rho}}{(X_0-X\sqrt{\theta x})(p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2})^{\rho}}=\frac{(X_0+X\sqrt{\theta x})(p\theta_1-q\sqrt{\theta x})^{\rho}}{(X_0-X\sqrt{\theta x})(p\theta_1+q\sqrt{\theta x})^{\rho}},$$

expression qu'on peut mettre sous la forme $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$, en dénotant par P_0 la partie rationnelle du produit $(X_0+X\sqrt{\theta x})(p\theta_1-q\sqrt{\theta x})^{\rho}$, et par $Q_0\sqrt{\theta x}$ celle qui a pour facteur $\sqrt{\theta x}$.

Mais, si l'on substitue dans les équations

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho},\quad \delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho\ \dots\dots\dots\dots \text{(I)}$$

le produit $\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^{\rho}\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$ à la place de $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$, elles se réduisent à celles-ci

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\cdot\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}\right)^{\rho},$$

$$\delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=\left(\pi-\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)\rho,$$

et si les fonctions p et q sont choisies de manière à ce qu'elles vérifient les équations

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}} = T\,\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'}; \quad \delta\,\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}} = \pi_1,$$

les équations qui déterminent les nouvelles inconnues P_0 et Q_0 deviennent

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho}, \quad \delta\,\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}} = (\pi-\pi_1)\rho. \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

Ces équations seront plus ou moins simples selon les valeurs de p et q, qu'on emploiera dans la réduction dont nous venons de parler. Or, nous allons montrer que, dans les équations réduites (2), la somme du degré de $u'v'$ et de la valeur numérique de $\pi-\pi_1$ sera au-dessous du degré de $\sqrt{\theta x}$, si l'on prend pour p et q des fonctions qu'on trouve de la manière suivante:

1) On cherche une fonction entière S, pour laquelle les fractions $\frac{S\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}}{u}$, $\frac{S\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}}{v}$ ne deviennent pas infinies, tant que x reste fini.

2) On développe $\dfrac{S-\frac{\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{\theta_1}}}{uv}$ en fraction continue, et parmi les fractions réduites on trouve une fraction dont le dénominateur est d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$; mais qui est suivie d'une fraction dont le dénominateur est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$.

3) En dénotant cette fraction par $\frac{M}{N}$, on prend

$$q = N, \quad p = SN - Muv. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

En effet, d'après les équations (3) et la propriété de la fonction S, on voit que les expressions

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}, \quad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}$$

restent finies pour toutes les valeurs finies de x. Donc, si l'on dénote par

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ldots,$$

les valeurs de x qui rendent ces expressions égales à zéro, et par

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots\ldots,\ g,\ g_1,\ g_2,\ \ldots\ldots,$$

les exposants de

$$x-\alpha,\ x-\alpha_1,\ x-\alpha_2,\ \ldots\ldots,$$

$$x-\beta,\ x-\beta_1,\ x-\beta_2,\ \ldots\ldots$$

dans leur développement suivant les puissances croissantes de ces différences, on aura

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=T_1(x-\alpha)^f(x-\alpha_1)^{f_1}(x-\alpha_2)^{f_2}\ldots\ldots;$$

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=T_2(x-\beta)^g(x-\beta_1)^{g_1}(x-\beta_2)^{g_2}\ldots\ldots;$$

où T_1, T_2 désignent des fonctions qui restent finies pour toutes les valeurs finies de x.

Mais, comme les exposants de $x-\alpha$, $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, ... $x-\beta$, $x-\beta_1$, $x-\beta_2$, ... dans le développement de $\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}$, $\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}$ ne peuvent contenir d'autres fractions que $\frac{1}{2}$, ces équations se réduiront à cette forme

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=T_1v'\sqrt{w},\quad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=T_2u'\sqrt{w'},\quad \ldots\ldots (4)$$

où u', v', w, w', sont des fonctions entières, dont les deux dernières ne contiennent que des facteurs simples. Par la multiplication de ces équations nous trouvons

$$\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}=T_1T_2u'v'\sqrt{ww'},$$

et par conséquent,

$$\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uvu'v'\sqrt{ww'}}=T_1T_2.$$

Cette équation prouve, évidemment, que T_1T_2 est une constante; car, d'après la propriété des fonctions T_1, T_2, leur produit ne devient ni zéro ni infini pour x fini, tandis que cette équation montre que le carré de T_1T_2 est une fraction rationnelle $\frac{(p^2\theta_1-q^2\theta_2)^2}{(uvu'v')^2ww'}$ qui ne peut rester finie pour toutes les valeurs finies de x, à moins qu'elle ne se réduise à une constante. Donc

$$T_1T_2=C,$$

et par conséquent, l'équation précédente devient

$$\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uvu'v'\sqrt{ww'}}=C. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Or cette égalité suppose que ww' est un carré parfait, et comme les fonctions w, w' n'ont que des facteurs simples, cela ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$w=w'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

D'après cela, en divisant les équations (4) l'une par l'autre, on trouve

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}=T\frac{u}{v}\cdot\frac{v'}{u'},$$

en mettant, pour abréger, T à la place de $\frac{T_1}{T_2}$.

Il nous reste maintenant à prouver que si l'on fait

$$\pi_1=\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}},$$

la somme de $\delta(u'v')$ avec la valeur numérique de $\pi-\pi_1$ sera au-dessous de $\delta\sqrt{\theta x}$. Or, selon que $\pi-\pi_1$ est positif ou négatif, cette somme sera égale à $\delta(u'v')+\pi-\pi_1$ ou à $\delta(u'v')-\pi+\pi_1$. Nous allons montrer que ces deux quantités sont effectivement plus petites que $\delta\sqrt{\theta x}$, tant que p et q sont déterminés comme nous l'avons dit.

Pour s'en assurer, nous remarquons que d'après la substitution de δx^π et $\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}$ à la place de π et π_1, ces quantités deviennent

$$\delta(u'v')+\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}x^\pi,\quad \delta(u'v')+\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi}.$$

Mais, d'après l'équation (5), nous trouvons

$$\delta(u'v')\overline{\overline{<}}\,\delta\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}.$$

Donc, les quantités précédentes sont égales ou inférieures à celles-ci

$$\delta\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}+\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}x^\pi=2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\delta\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}+\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi}=2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Mais la première de ces quantités, par la substitution des valeurs de p et q d'après (3), devient

$$2\delta\frac{(SN-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}=\delta\sqrt{\theta x}+2\delta\left(\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}-\frac{M}{N}\right)N\sqrt{\frac{uv\,\theta_1\,.\,x^\pi}{\sqrt{\theta x}}},$$

quantité qui est au-dessous de $\delta\sqrt{\theta x}$, tant que $\frac{M}{N}$, dans la série des fractions réduites de $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, est suivie par une fraction dont le dénominateur est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\,\theta_1\,.\,x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$. Quant à la seconde quantité, nous remarquons qu'elle peut être mise sous cette forme

$$2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{2q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}\right],$$

et par conséquent, qu'elle ne surpasse pas au moins l'une de ces deux valeurs

$$2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}\right]=2\delta\left[\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}\right]-2\pi,$$

$$2\delta\frac{q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}=\delta\sqrt{\theta x}-2\delta\cdot\frac{1}{q}\sqrt{\frac{uv\,\theta_1\,.\,x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}.$$

Mais, comme nous venons de trouver que $2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}$ est plus petit que $\delta\sqrt{\theta x}$, et que nous avons pris $q=N$, d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\,\theta_1\,.\,x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, il s'en suit que ces deux

quantités sont au-dessous de $\delta\sqrt{\theta x}$. Ainsi l'on parvient à s'assurer que les valeurs de p et q, déterminées d'après la méthode énoncée, sont effectivement susceptibles par la substitution

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}},$$

de réduire les équations

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^\rho,\quad \delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho,$$

à ces autres

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u'}{v'}\right)^\rho;\quad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=(\pi-\pi_1)\rho;$$

où la somme du degré de $u'v'$, plus la valeur numérique de $\pi-\pi_1$, est au-dessous du degré de $\sqrt{\theta x}$.

Nous montrerons maintenant, que cette réduction sera toujours possible, tant que les équations primitives elles mêmes ne remplissent pas la condition

$$\delta(uv)+\pi<\delta\sqrt{\theta x}.$$

Il est facile de remarquer que la détermination de p et q, dont nous venons de parler, ne suppose que l'existence de deux fractions réduites de $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ telles que l'une ait pour dénominateur une fonction d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, tandis que la suivante a le dénominateur d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$.

Or nous verrons, que cela aura toujours lieu, tant que la condition $\delta(uv)+\pi<\delta\sqrt{\theta x}$ n'est pas remplie, et que l'on décompose convenablement la fonction θx en deux facteurs $\theta_1.\theta_2$; savoir: de manière que $\sqrt{\frac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ soit d'un degré fractionnaire. En effet, dans ces suppositions, le degré de $\sqrt{\frac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ est au-dessus de zéro, et par conséquent, si l'on commence la série des fractions réduites de $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ par $\frac{0}{1}$, où le dénominateur est du degré zéro, on est sûr de trouver parmi elles au moins une fraction dont le dénominateur soit d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$.

Mais alors, dans la série infinie des fractions réduites de $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{\sqrt{uv}}$, on trouvera nécessairement deux fractions consécutives telles que l'une a pour dénominateur une fonction d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, tandis que le dénominateur de l'autre est d'un degré plus élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_2.x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$, si toutefois aucune des fractions réduites de $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ n'a son dénominateur du

même degré que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$. Or cela n'aura pas lieu, tant que cette fonction est d'un degré fractionnaire; car, pour θx de degré pair, toutes les fractions réduites de $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv} = \frac{s-\frac{\theta_2}{\sqrt{\theta x}}}{uv}$ ne contiennent que les puissances entières de x, et pour θx de degré impair, le degré de $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ a la forme $k \pm \frac{1}{4}$, tandis que les degrés fractionnaires de x, dans la fonction $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, sont de la forme $k+\frac{1}{2}$.

Nous remarquerons encore que, dans la série des fractions réduites de $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv} = \frac{s-\frac{\theta_2}{\sqrt{\theta x}}}{uv}$, on ne rencontrera des puissances fractionnaires de x qu'après la fraction $\frac{M}{N}$, qui sert pour trouver les fonctions p et q. En effet, les puissances fractionnaires de x ne peuvent y entrer que dans le cas où θx est de degré impair. Mais alors toutes les fonctions de la forme $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$ sont évidemment du degré 0, et par conséquent, $\pi = 0$. Or, π étant égal à zéro, d'après ce que nous venons de dire sur la détermination de p et q, le dénominateur N sera d'un degré moins élevé que $\sqrt{\frac{uv\theta_1}{\sqrt{\theta x}}}$, et avec un tel dénominateur la fraction réduite ne donne, en général, la fonction, d'où elle résulte par le développement en fraction continue, qu'avec une exactitude jusqu'aux quantités de l'ordre plus élevé que $\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{uv\theta_1}{\sqrt{\theta x}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\theta x}}{\theta_1}\frac{1}{uv} = \frac{1}{uv}\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}$. Mais la partie irrationnelle de $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ est justement de cet ordre.

Donc, dans ce cas, cette partie n'a aucune influence sur la fraction $\frac{M}{N}$, de manière qu'on peut la supprimer dans la formule $\frac{s-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$, et chercher $\frac{M}{N}$ par le développement seulement de $\frac{s}{uv}$ en fraction continue.

§ 4.

Nous allons montrer maintenant le parti que l'on peut tirer de la réduction, qui vient d'être exposée, pour la solution des équations

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}} = T\left(\frac{u}{v}\right)^\rho, \quad \delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}} = \pi\rho,$$

dans le cas, où θx est du 3me ou du 4me degré. Après avoir trouvé les fonctions p et q, comme nous l'avons dit, et si l'on fait

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\left(\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}\right)^\rho \frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}},$$

on parvient à ces équations

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u'}{v'}\right)^\rho,\quad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=(\pi-\pi_1)\rho.$$

Pour trouver la fonction $\frac{u'}{v'}$, on divisera $p^2\theta_1-q^2\theta_2$ par uv. D'après la méthode qui nous a servi pour trouver les fonctions p et q, il est clair que le quotient de cette division sera d'un degré moins élevé que $\sqrt{\theta x}$, et par conséquent, dans le cas de θx du 3me ou du 4me degré, ce quotient sera, en général, représenté par $ax+b$. Mais, d'après les équations (5, 6), ce quotient, à un facteur constant près, est égal à $u'v'w$. Donc, l'une des trois fonctions

$$u',\ v',\ w$$

sera égale à $ax+b$, et les autres se réduiront à des constantes, et par conséquent, l'on sera conduit à l'un de ces trois cas

$$\frac{u'}{v'}=\frac{1}{ax+b},\quad \frac{u'}{v'}=ax+b,\quad \frac{u'}{v'}=\text{à une constante.}$$

Mais en faisant $x=-\frac{b}{a}$ dans les équations (4), où d'après (6) $w'=w$, on voit que le premier cas aura lieu, si cette valeur de x rend

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=0,$$

le second, si l'on a

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=0,$$

et enfin le troisième, si, pour $x=-\frac{b}{a}$, on trouve en même temps

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=0,\quad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=0.$$

Donc, si nous convenons de désigner par ε une valeur qui se réduit à

$$+1,\quad -1,\quad 0,$$

selon que, pour $x=-\frac{b}{a}$, on trouve

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=0,$$

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=0,$$

ou, en même temps,

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=0, \quad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=0,$$

la valeur de $\frac{u'}{v'}$ sera donnée par cette équation

$$\frac{u'}{v'}=\frac{1}{(ax+b)^{\varepsilon}}.$$

D'après cela, les équations qui déterminent P_0, Q_0 et ρ deviennent

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=\frac{T}{(ax+b)^{\varepsilon\rho}}, \quad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=(\pi-\pi_1)\rho. \; \ldots\ldots \; (7)$$

Dans le cas, où a ne se réduit pas à zéro, on peut mettre ces équations sous une forme plus simple, en introduisant à la place de x une nouvelle variable z d'après l'équation

$$ax+b=\frac{a}{z}.$$

En effet, si l'on traite la valeur de $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$ comme fonction de cette nouvelle variable, on parvient facilement à reconnaître, que, d'après les équations précédentes, la fonction $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$ en z, sera déterminée par ces propriétés:

1) Elle reste finie, tant que z est fini et diffère de 0; car ces valeurs de z correspondent à celles de x différentes de $-\frac{b}{a}$ et finies.

2) Pour $z=0$, la limite du rapport $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}:z^{(\pi-\pi_1)\rho}$ reste finie; car ce rapport n'est lui même que la limite de la valeur de $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}:x^{(\pi-\pi_1)\rho}$ pour $x=\infty$.

3) Pour $z=\infty$, le rapport $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}:z^{\varepsilon\rho}$ reste fini, car ce rapport est égal à $\frac{T}{a^{\varepsilon\rho}}$, quand on fait $x=-\frac{b}{a}$.

Donc, en faisant $ax+b=\frac{a}{z}$, on peut remplacer les équations (7) par celles-ci

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=Tz^{(\pi-\pi_1)\rho}, \quad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\varepsilon\rho.$$

Mais il n'est pas difficile de s'assurer, que a étant différent de zéro, on aura

$$\pi=\pi_1.$$

En effet, comme $\pi_1=\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}$, on peut mettre les différences $\pi-\pi_1$, $\pi_1-\pi$ sous ces formes

$$\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}x^{\pi}=2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}-\delta\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv},$$

$$\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}x^{-\pi}=2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}-\delta\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}.$$

Donc, si le coefficient a dans la valeur de $\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}=ax+b$ n'est pas égal à zéro, les différences

$$\pi-\pi_1,\qquad \pi_1-\pi$$

sont respectivement égales à

$$2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}-1,\quad 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}-1.$$

Mais, d'après le § 3, on a

$$2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{\frac{\pi}{2}}<\delta\sqrt{\theta x},\quad 2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}<\delta\sqrt{\theta x},$$

et comme θx n'est que du 4me ou du 3me degré, cela prouve que les différences $\pi-\pi_1$, $\pi_1-\pi$ sont au-dessous de 1, ce qui ne peut être à moins qu'on n'ait $\pi=\pi_1$. D'après cela, les équations qui déterminent P_0 et Q_0, en fonctions de z, deviennent

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=T,\qquad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\varepsilon\varrho,$$

formules que nous mettrons sous la forme

$$\frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=T,\qquad \delta\frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\varepsilon\varrho,\quad \ldots\ (8)$$

pour délivrer la fonction radicale des puissances négatives de z.

Or, la première de ces équations ne diffère que par la forme de celle, qu'Abel a traitée dans son Mémoire «*Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, *R et* ϱ *étant des fonctions entières*», et d'après les recherches ingénieuses de ce grand Géomètre nous savons que cette équation est impossible, sauf le cas de $P_0=0$, ou $Q_0=0$, si la fraction continue résultante de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ n'est pas périodique, et dans le cas contraire, si l'on a

$$\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)} = r + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \cdots + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{2r + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \cdots}}}}}}}$$

on vérifiera cette équation en prenant

$$\frac{P_0 z^2}{Q_0} = r + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \cdots + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{r_1}}}}$$

Quant à l'équation

$$\delta \frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = \varepsilon\rho,$$

on la vérifiera, en choisissant convenablement ρ, savoir en prenant

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon}\delta \frac{P_0 z^2 + Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0 z^2 - Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}} = \frac{1}{\varepsilon}\delta \frac{\frac{P_0 z^2}{Q_0} + \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\frac{P_0 z^2}{Q_0} - \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}.$$

Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi(z) = r + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \cdots + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{r_1}}}}$$

la valeur cherchée de $\frac{P_0 + Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0 - Q_0\sqrt{\theta x}}$, en fonction de z, sera

$$\frac{\varphi(z) + \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\varphi(z) - \sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}},$$

et d'après l'équation $ax+b=\frac{a}{z}$, nous aurons, en fonction de x,

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=\frac{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2\varphi\left(\frac{a}{ax+b}\right)+\sqrt{\theta x}}{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2\varphi\left(\frac{a}{ax+b}\right)-\sqrt{\theta x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Quant au nombre ρ, on le trouvera d'après l'équation

$$\rho=\frac{1}{\varepsilon}\delta\,\frac{\varphi(z)+\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\varphi(z)-\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}.$$

Cette valeur de ρ nous montre que la solution des équations (8), que nous venons de trouver, ne peut être employée que dans le cas, où ε ne se réduit pas à zéro; car, pour $\varepsilon=0$, cette valeur de ρ devient infinie, tandis que ρ désigne chez nous un nombre fini. Mais dans ce cas on vérifiera, évidemment, nos équations par une valeur finie de ρ, en prenant une des solutions de l'équation

$$\frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=T,$$

que nous avons exclues, savoir: $Q_0=0$ ou $P_0=0$, ce qui donne

$$\frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\pm 1, \qquad \delta\,\frac{P_0z^2+Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{P_0z^2-Q_0\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}=\varepsilon\rho=0.$$

Dans ces solutions, pour $\varepsilon=0$, le nombre ρ reste arbitraire, et l'on pourra prendre $\rho=1$. Remarquons que ces solutions qu'on pouvait aussi tirer de la formule (9), en prenant $\varphi(z)$ égale à 0 ou ∞, ne pourront être employées, à leur tour, que dans le cas de $\varepsilon=0$, car, autrement, ρ serait égal à 0, tandis que ce nombre doit être différent de zéro.

Ainsi l'on trouve la fonction $\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}$ et le nombre ρ, si le quotient de la division de $p^2\theta_1-q^2\theta_2$ par uv se réduit à $ax+b$, et que a ne soit pas égal à zéro. Mais s'il arrive que $a=0$, les fonctions u', v', d'après ce que nous venons de dire relativement à leur détermination, se réduisent à des constantes, et par conséquent, les équations qui déterminent P_0, Q_0 et ρ deviennent

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T, \qquad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=(\pi-\pi_1)\rho.$$

Or, comme ces équations sont de même nature que les équations (8), et que seulement

ici P_0, Q_0, $\sqrt{\theta x}$, $\pi-\pi_1$ remplacent $P_0 z^2$, Q_0, $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$, ε, nous concluons, d'après les formules précédentes, que la solution de ces équations sera donnée par ces formules

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}=\frac{\varphi_0(x)+\sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x)-\sqrt{\theta x}}, \qquad \rho=\frac{1}{\pi-\pi_1}\,\delta\frac{\varphi_0(x)+\sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x)-\sqrt{\theta x}},$$

où l'on prendra pour $\varphi_0(x)$ zéro ou l'infini, si

$$\pi-\pi'=0,$$

et dans le cas contraire, on développera $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue

$$r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{2r+\cfrac{1}{r_1+\ddots}}}}}}}$$

et l'on prendra

$$\varphi_0(x)=r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1}}}}}$$

Nous remarquerons encore que si les équations primitives

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \qquad \delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho$$

remplissent elles mêmes la condition

$$\delta(uv)+\pi<\sqrt{\theta x},$$

on trouvera leur solution au moyen des formules que nous venons de donner pour résoudre les équations réduites

$$\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u'}{v'}\right)^{\rho}, \qquad \delta\frac{P_0+Q_0\sqrt{\theta x}}{P_0-Q_0\sqrt{\theta x}}=(\pi-\pi_1)\rho.$$

Dans ce cas, on prendra π au lieu de $\pi-\pi_1$, et l'on trouvera a, b, ε, en égalant

$$\frac{u}{v}=\frac{1}{(ax+b)^{\varepsilon}}.$$

§ 5.

D'après ce que nous venons de donner sur la solution des équations

$$\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=T\left(\frac{u}{v}\right)^{\rho}, \quad \delta\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}=\pi\rho, \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

on peut prouver qu'elles sont impossibles, si, θx étant du quatième degré et $\frac{uvx^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}$ de degré impair, l'équation $\theta x=0$ n'est pas vérifiée, en prenant pour x une valeur composée des racines de l'équation $uv=0$ et des coefficients de θx, à l'aide des seuls radicaux carrés, et que, par conséquent, on ne peut pas exprimer en termes finis toutes les intégrales, dont la détermination se réduit aux équations (10) de cette catégorie.

Pour le démontrer, nous remarquerons d'abord que, dans le cas où $\frac{uvw^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}$ est de degré impair, on peut exécuter la réduction des équations (10), d'après le § 3, en prenant cette décomposition de θx en deux facteurs θ_1, θ_2:

$$\theta_1=1\,,\ \theta_2=\theta x\,,$$

et si, avec ces valeurs de θ_1, θ_2, et en supposant connues les racines de l'équation $uv=0$, on fait la réduction des équations (10), et qu'on cherche leur solution, on ne rencontre que l'extraction des racines carrées et les différentes opérations rationnelles. Donc, dans toute cette analyse, on n'aura que des quantités qui ne peuvent vérifier l'équation $\theta x=0$ dans le cas que nous examinons. Or nous allons prouver que tant que cela a lieu, on ne peut donner une solution des équations (10).

D'après le § précédent, dans la solution des équations (10) on ne peut se passer du développement de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ ou $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue, que dans le cas, où l'on a $\varepsilon=0$, ou $\pi-\pi_1=0$, $a=0$.

Mais nous savons (voyez § 4) que la quantité ε ne se réduit à zéro, que dans le cas, où la valeur $x=-\frac{b}{a}$ vérifie ces deux équations

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}=0, \quad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v}=0,$$

et, comme le produit $\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}.\frac{p\sqrt{\theta_1}-p\sqrt{\theta_2}}{v}$ est égal à $\frac{p^2\theta_1-p^2\theta_1}{uv}=ax+b$, cela suppose que le développement de

$$\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{u}, \quad \frac{p\sqrt{\theta_1}-q\sqrt{\theta_2}}{v},$$

suivant les puissances de $x+\frac{b}{a}$, contient des exposants fractionnaires, ce qui ne peut avoir

lieu, à moins que θ_1 ou θ_2 ne contienne le facteur $x+\frac{b}{a}$, et par conséquent, cela suppose que la valeur $x=-\frac{b}{a}$ vérifie l'équation $\theta_1\theta_2=\theta x=0$, ce qui ne peut être admis, comme nous l'avons remarqué.

Le cas de $a=0$, $\pi-\pi_1=0$ ne peut avoir lieu, car nous avons trouvé, dans le § précédent,

$$\pi_1-\pi=2\delta\frac{p\sqrt{\theta_1}+q\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}-\delta\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv},$$

et comme

$$\frac{p^2\theta_1-q^2\theta_2}{uv}=ax+b,$$

$$\theta_1=1,\qquad \theta_2=\theta x,$$

cela nous donne

$$\pi_1-\pi=2\delta\frac{p+q\sqrt{\theta x}}{\sqrt{uv}}x^{-\frac{\pi}{2}}-\delta(ax+b)=2\delta\frac{p+q\sqrt{\theta x}}{\sqrt[4]{\theta x}}-\delta\frac{uv.x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}-\delta(ax+b).$$

Mais dans le cas que nous examinons, la fonction $\frac{uvx^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}$ est de degré impair et la fonction $\frac{p+q\sqrt{\theta x}}{\sqrt[4]{\theta x}}$ d'un degré entier; donc, si $a=0$, la différence $\pi_1-\pi$ est de la forme $2k+1$; et, par conséquent, ne peut se réduire à zéro.

Il nous reste maintenant à prouver qu'on ne parviendra pas non plus à la solution de nos équations par le développement de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ ou $\sqrt{\theta x}$ en fraction continue. Pour cela, nous allons montrer qu'en général, si aucune des racines de l'équation bicarrée $R=0$ ne peut être exprimée à l'aide des seuls radicaux carrés, la fraction continue, résultante de $\sqrt{R}$, ne peut être périodique, de la forme

$$r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cdots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{2r+\cfrac{1}{r_1}\cdots}}}}}$$

En effet, si cela avait lieu, nous savons, par les recherches d'Abel, qu'on parviendrait, par ce développement de $\sqrt{R}$, à la solution de l'équation

$$Y_0^2-Y^2R=C,$$

où Y_0, Y sont des fonctions entières et C une constante; le tout, étant déterminé par le développement de $\sqrt{R}$, ne peut contenir que des quantités exprimables par les coefficients de R au moyen des seuls radicaux carrés. Or, une telle solution de l'équation

$$Y_0^2 - Y^2 R = C$$

étant admise, supposons que

$$y_0^2 - y^2 R = c,$$

soit celle parmi elles dans laquelle y diffère de zéro et soit en même temps du degré le moins élevé.

D'après l'équation précédente nous trouvons

$$y_0^2 - c = y^2 R,$$

et, par conséquent,

$$(y_0 + \sqrt{c})(y_0 - \sqrt{c}) = y^2 R.$$

Comme $y_0 - \sqrt{c}$, $y_0 + \sqrt{c}$ ne peuvent avoir de commun diviseur, cette équation ne peut être vérifiée à moins qu'on n'ait

$$y_0 + \sqrt{c} = y_1^2 R_1, \; y_0 - \sqrt{c} = y_2^2 R_2, \; y_1 y_2 = y, \; R_1 R_2 = R, \quad . . (11)$$

et, par conséquent,

$$2\sqrt{c} = y_1^2 R_1 - y_2^2 R_2.$$

Or, on ne peut pas supposer que l'une des fonctions R_1, R_2 se réduise à une constante; car, en admettant, par exemple, que $R_1 = c_1$, on trouve, d'après (11), $R_2 = \frac{R}{c_1}$, et, par conséquent, l'équation précédente devient

$$2\sqrt{c} = y_1^2 c_1 - y_2^2 \frac{R}{c_1},$$

ou

$$2c_1\sqrt{c} = (c_1 y_1)^2 - y_2^2 R,$$

ce qui donne, contre l'hypothèse, une solution de l'équation

$$Y_0^2 - Y^2 R = C,$$

où $Y = y_2$ est d'un degré moins élevé que y.

Mais les fonctions R_1, R_2 ne peuvent être non plus de degrés supérieurs à zéro; car, autrement, on parviendrait à décomposer la fonction bicarrée R en deux facteurs $R_1 . R_2$, et par conséquent, à trouver au moins une racine de l'équation $R = 0$ au moyen des seuls radicaux carrés; car, d'après (11), pour trouver R_1 et R_2 on n'a qu'à chercher le commun diviseur des fonctions $y_0 + \sqrt{c}$ et R, $y_0 - \sqrt{c}$ et R.

§ 6.

En terminant notre Mémoire, nous allons faire le résumé des procédés qui, d'après ce que nous venons d'exposer, constituent, avec nos recherches, citées plus haut, une méthode générale d'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du 3me ou du 4me degré, en tant que cette intégration est possible sous forme finie.

Nous supposons que préalablement la partie rationnelle de ces différentielles a été séparée, et que le reste a été mis sous la forme $\frac{f_0x}{F_0x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, où f_0x, F_0x n'ont point de commun diviseur; nous supposons aussi que θx, qui n'est que du 3me ou du 4me degré, n'a pas de facteurs multiples; car, autrement, l'intégration de $\frac{f_0x}{F_0x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$ deviendrait très simple.

Pour trouver l'intégrale $\int\frac{f_0x}{F_0x}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$ sous forme finie, en tant que cela est possible, on procédera de la manière suivante:

1) On cherchera le plus grand commun diviseur entre les fonctions $F_0x\,\theta x$ et $\frac{d[F_0x.\theta x]}{dx}$. Nous dénoterons ce diviseur par Q.

2) On déterminera les degrés des fonctions $\frac{Q.f_0x}{F_0x.\theta x}$, $\frac{Q}{x\sqrt{\theta x}}$. Si ces fonctions sont de degrés inférieurs à -1, le terme algébrique dans l'expression de l'intégrale cherchée est zéro. Dans le cas contraire, on prendra n égal au plus petit nombre entier supérieur aux degrés de ces fonctions, et on cherchera les coefficients du polynome

$$P=B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+B_2x^2+B_1x+B_0$$

d'après cette condition:

«la fonction $f_0x-\frac{F_0x\,\theta x}{Q}\frac{dP}{dx}-\left(\frac{F_0x\frac{d\theta x}{dx}}{2Q}-\frac{F_0x.\theta x.\frac{dQ}{dx}}{Q^2}\right)P$, étant divisée par Q, donne zéro pour «reste et pour quotient une fonction d'un degré qui n'est pas plus élevé que celui de $\frac{F_0x\sqrt{\theta x}}{xQ}$».

Si cette condition ne peut être remplie, on conclura, tout de suite, que l'intégrale cherchée est impossible sous forme finie. Dans le cas contraire, on trouvera les coefficients du polynome P, et l'on conclura que la partie algébrique dans l'intégrale cherchée a pour valeur $\frac{P}{Q}\sqrt{\theta x}$.

3) On mettra la fonction $\frac{f_0x}{F_0x}-\sqrt{\theta x}\,\frac{d\frac{P}{Q}\sqrt{\theta x}}{dx}$ sous la forme $\frac{fx}{Fx}$, où fx, Fx sont des fonctions entières qui n'ont point de commun diviseur; on cherchera les racines de l'équation $Fx=0$, et l'on calculera des quantités K°, K', K'', K''', ... $K^{(l)}$ d'après les équations

$$K^\circ=\left[\frac{xfx}{Fx\sqrt{\theta x}}\right]_{x=\infty},\ K'=\frac{f(x')}{F'(x')\sqrt{\theta(x')}},\ K''=\frac{f(x'')}{F'(x'')\sqrt{\theta(x'')}},\ \ldots.K^{(l)}=\frac{f(x^l)}{F'(x^l)\sqrt{\theta(x^l)}};$$

où x', x'', ... $x^{(l)}$ désignent les racines de l'équation $Fx=0$ et $F'x=\frac{dFx}{dx}$.

4) On cherchera les nombres entiers M°, M', M'', ... $M^{(l)}$ qui rendent

$$M^\circ K^\circ + M'K' + M''K'' + \ldots\ldots + M^{(l)}K^{(l)} = 0.$$

Soient λ le nombre de toutes les équations de cette forme qui ne sont pas identiques entre elles par rapport à

$$K^\circ,\ K',\ K'',\ \ldots\ldots\ K^{(l)},$$

et

$$K^\circ = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^\circ K^{(\lambda+i)},\quad K' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i' K^{(\lambda+i)},\quad K'' = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i'' K^{(\lambda+i)},\ \ldots\ K^{(\lambda-1)} = \sum_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^{(\lambda-1)} K^{(\lambda+i)}$$

les valeurs de λ quantités de la série

$$K^\circ,\ K',\ K'',\ \ldots\ldots\ K^{(l)},$$

en fonctions des autres, qu'on tire de ces équations.

D'après cela on conclura que la partie logarithmique de l'intégrale cherchée est composée de ces $l-\lambda+1$ termes

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0}\log W_0 + \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}\log W_1 + \ldots\ldots + \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}}\log W_{l-\lambda},$$

où n_0, n_1, ... $n_{l-\lambda}$ désignent des nombres entiers, et W_0, W_1, ... $W_{l-\lambda}$ des fonctions de la forme $\frac{X_0+X\sqrt{\theta x}}{X_0-X\sqrt{\theta x}}$.

5) Pour trouver un terme quelconque $\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i$, on cherchera le plus petit dénominateur auquel les quantités M_i°, M_i', M_i'', ... $M_i^{(\lambda-1)}$ peuvent être réduites. En dénotant ce dénominateur par σ, on fera

$$\pi = \pm M_i^\circ \sigma,$$

en prenant celui des deux signes $\pm$ qui appartient à M_i°, et l'on mettra l'expression

$$\left[(x-x')^{M_i'}(x-x'')^{M_i''}\ldots\ldots(x-x^{(\lambda-1)})^{M_i^{(\lambda-1)}}(x-x^{(\lambda+i)})\right]^{\pm\sigma}$$

sous la forme d'une fraction simple $\frac{u}{v}$.

6) On décomposera θx en deux facteurs $\theta_1 . \theta_2$, de manière que $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^\pi}{\sqrt{\theta x}}}$ ne soit pas d'un degré entier, on trouvera une fonction entière S, pour laquelle les fractions

$$\frac{S\sqrt{\theta_1}+\sqrt{\theta_2}}{u},\qquad \frac{S\sqrt{\theta_1}-\sqrt{\theta_2}}{v}$$

ne deviennent pas infinies, tant que x reste fini, et en développant l'expression $\frac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ en fraction continue, on cherchera parmi les fractions réduites de $\frac{S-\sqrt{\frac{\theta_2}{\theta_1}}}{uv}$ celle dont le dénominateur est du degré le plus proche de celui de $\sqrt{\frac{uv\theta_1 . x^{\pi}}{\sqrt{\theta x}}}$, mais moins élevé que celui de cette fonction.

En dénotant cette fraction par $\frac{M}{N}$, on cherchera le quotient de la division de

$$(NS-Muv)^2\theta_1-N^2\theta_2$$

par uv. Ce quotient sera toujours d'un degré au-dessous du second.

7) Si ce quotient est une fonction du premier degré $ax+b$, on prendra

$$\frac{K^{(\lambda+1)}}{n_i}\log W_i=\frac{K^{(\lambda+1)}}{\pm\sigma}\log\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}},$$

dans le cas où les deux fonctions

$$\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}{u}, \qquad \frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}{v}$$

se réduisent à zéro pour $x=-\frac{b}{a}$.

Dans le cas contraire, on aura

$$\frac{K^{(\lambda+1)}}{n_i}\log W_i=\frac{\varepsilon K^{(\lambda+1)}}{\pm\rho\sigma}\log\left[\left(\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}\right)^{\frac{\rho}{\varepsilon}}\cdot\frac{\left(\frac{ax+b}{a}\right)^2\varphi\left(\frac{a}{ax+b}\right)+\sqrt{\theta x}}{\left(\frac{ax+b}{a}\right)^2\varphi\left(\frac{a}{ax+b}\right)-\sqrt{\theta x}}\right],$$

où $\varphi(z)$ est une fonction égale à

$$r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1}}}}}$$

la fraction continue résultante de $\sqrt{z^4\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}$ étant périodique et de la forme

$$r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{2r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\ddots}}}}}}}}$$

ρ le degré de $\dfrac{\varphi(z)+\sqrt{z^i\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}{\varphi(z)-\sqrt{z^i\theta\left(\frac{a-bz}{az}\right)}}$, $\varepsilon=+1$ ou -1, selon que $x=-\frac{b}{a}$ vérifie l'équation

$$\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}{u}=0,\quad \text{ou}\quad \frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}{v}=0.$$

8) Si ce quotient se réduit à une constante, on prendra

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i=\frac{K^{(\lambda+i)}}{\pm\sigma}\log\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}},$$

dans le cas où $\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}x^{\pi}$ est du degré zéro. Dans le cas contraire, en désignant par ε le degré de $\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}x^{\pi}$, on aura

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i=\frac{\varepsilon K^{(\lambda+i)}}{\pm\rho\sigma}\log\left[\left(\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}\right)^{\frac{\rho}{\varepsilon}}\cdot\frac{\varphi_0(x)+\sqrt{\theta x}}{\varphi_0(x)-\sqrt{\theta x}}\right],$$

où

$$\varphi_0(x)=r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cdots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1}}}}$$

la fraction continue résultante de $\sqrt{\theta x}$ étant périodique et de la forme

$$r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cdots+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{2r+\cfrac{1}{r_1+\cfrac{1}{r_2+\cdots}}}}}}}$$

ρ le degré de $\frac{\varphi_0 x+\sqrt{\theta x}}{\varphi_0 x-\sqrt{\theta x}}$.

9) Ce que nous venons de dire sur la détermination du terme $\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i$ ne sera applicable que dans le cas, où le degré de la fonction uvx^{π} surpasse 1. S'il arrive que le degré de uvx^{π} n'est pas au-dessus de 1, le terme $\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i}\log W_i$ sera aussi déterminé par les formules que nous venons d'exposer, seulement on fera $\frac{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}+N\sqrt{\theta_2}}{(NS-Muv)\sqrt{\theta_1}-N\sqrt{\theta_2}}=1$, on trouvera a, b, ε, en égalant $\frac{u}{v}=\frac{1}{(ax+b)^{\varepsilon}}$, et on prendra $\varepsilon=\pi$, dans le cas de $a=0$.

10) Après avoir trouvé tous les termes logarithmiques, on différentiera leur somme. Si cette différentielle ne se réduit pas à $\frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$, l'intégrale cherchée est impossible sous forme finie; dans le cas contraire sa valeur sera précisément donnée par la somme

$$\frac{P}{Q}\sqrt{\theta x}+\frac{K^{(\lambda)}}{n_0}\log W_0+\frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}\log W_1+\ldots\ldots+\frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}}\log W_{l-\lambda}.$$

S'il s'agit, par exemple, de trouver l'intégrale

$$\int\frac{2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}dx,$$

on cherchera le plus grand commun diviseur entre les fonctions

$$(2x^2-1)^2(x^4+4x^3+2x^2+1),\quad \frac{d[(2x^2-1)^2(x^4+4x^3+2x^2+1)]}{dx}.$$

Comme ce diviseur est $2x^2-1$, et que les fonctions

$$\frac{(2x^2-1)(2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-2x^2-8x-8)}{(2x^2-1)^2(x^4+4x^3+2x^2+1)},\quad \frac{2x^2-1}{x\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}$$

sont de degrés au-dessous de 1, on cherchera les coefficients de la fonction du premier degré $P=B_1x+B_0$. Pour cela on divisera

$$2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8-\frac{(2x^2-1)^2}{2x^2-1}(x^4+4x^3+2x^2+1)B_1$$
$$-\left[\frac{1}{2}\frac{(2x^2-1)^2(4x^3+12x^2+4x)}{2x^2-1}-\frac{(2x^2-1)^2(x^4+4x^3+2x^2+1)\cdot 4x}{(2x^2-1)^2}\right](B_1x+B_0)$$

par $2x^2-1$. Comme cette division donne le reste

$$\left(4B_1+9B_0-\frac{17}{2}\right)x+\frac{9}{2}B_1+4B_0-\frac{13}{2},$$

et qu'on trouve, en outre, dans le quotient le terme

$$(1-B_1)x^4$$

qui est d'un degré plus élevé que $\frac{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{x(2x^2-1)}$, on égalera tout cela à zéro, ce qui donne les équations

$$4B_1+9B_0-\frac{17}{2}=0,\quad \frac{9}{2}B_1+4B_0-\frac{13}{2}=0,\quad 1-B_1=0,$$

et de là

$$B_1=1,\ B_0=\frac{1}{2},\ P=x+\frac{1}{2}.$$

Donc, le terme algébrique, dans l'expression de l'intégrale cherchée, a cette valeur

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}.$$



En réduisant l'expression

$$\frac{2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8}{(2x^2-1)^2}-\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}\,\frac{d\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{dx}$$

à la forme la plus simple, on parvient à

$$\frac{6x^2+5x+7}{2x^2-1};$$

et comme les racines de l'équation $2x^2-1=0$ sont $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, on calculera les quantités K^0, K', K'' d'après les formules

$$K^0=\lim\left[\frac{x(6x^2+5x+7)}{(2x^2-1)\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\right]_{x=\infty},\quad K'=\frac{6x'^2+5x'+7}{4x'\sqrt{x'^4+4x'^3+2x'^2+1}},$$

$$K''=\frac{6x''^2+5x''+7}{4x''\sqrt{x''^4+4x''^3+2x''^2+1}},$$

en prenant $x'=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x''=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne

$$K^0=0,\quad K'=-\frac{5}{2},\quad K''=\frac{5}{2},$$

et, par conséquent, on aura

$$M^0K^0+M'K'+M''K''=0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

si l'on prend

$$M^0=1,\quad M'=0,\quad M''=0,$$

ou

$$M^0=0,\quad M'=1,\quad M''=1.$$

Quant aux autres valeurs de M^0, M', M'' qui satisfont à l'équation (12), elles ne conduisent par rapport à K^0, K', K'', qu'à des équations identiques à celles qu'on trouve en prenant les valeurs mentionnées de M^0, M', M'', savoir:

$$1.K^0+0.K'+0.K''=0,\quad 0.K^0+1.K'+1.K''=0,$$

et ces équations nous donnent

$$K^0=0.K'',\quad K'=-K''.$$

D'après cela on conclut que la partie logarithmique de l'intégrale cherchée ne contient qu'un seul terme

$$\frac{\frac{5}{2}}{n_1}\log W_1.$$

Les coefficients de l'expression de K^0 et K', en fonction de K'', n'étant pas fractionnaires, et le coefficient de K'' dans la valeur de K^0 étant zéro, on prendra

$$\sigma = 1\,,\quad \pi = 0\,;$$

on mettra le produit

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

sous la forme d'une fraction

$$\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

et après avoir décomposé $x^4+4x^3+2x^2+1$ en deux facteurs $(x+1)(x^3+3x^2-x+1)$, on cherchera une fonction entière S pour laquelle les fractions

$$\frac{S\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}},\qquad \frac{S\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

ne deviennent pas infinies, tant que x reste fini; ou, ce qui revient au même, une fonction S qui, pour $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, se réduise respectivement à

$$\frac{-\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}+1}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}}=-\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

et à

$$\frac{\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}}+1}}{\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{2}}+1}}=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

D'après cela on trouve

$$S=1-3x.$$

En cherchant la fraction réduite de $\dfrac{1-3x-\sqrt{\dfrac{x^3+3x^2-x+1}{x+1}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, dont le dénominateur est du degré le plus proche possible de celui de $\sqrt{\dfrac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+1\right)x^0}{\sqrt{(x^4+4x^3+2x^2+1)}}}$, mais moins élevé que $\sqrt{\dfrac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+1\right)x^0}{\sqrt{(x^4+4x^3+2x^2+1)}}}$, on prendra pour cette fraction $\frac{0}{1}$, et comme

$$\left[1.(1-3x)-0.\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2(x+1)-1^2.(x^3+3x^2-x+1)=8x^3-4x,$$

divisé par $\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=x^2-\frac{1}{2}$, donne pour quotient $8x$, et que $x=0$ rend nulle la dernière de deux expressions

$$\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}, \qquad \frac{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

le terme logarithmique, d'après le n° 7, sera donné par la formule

$$\frac{-1\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot\rho}\log\left[\left(\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right)^{\frac{\rho}{-1}}\cdot\frac{x^2\varphi\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}{x^2\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\right];$$

où ρ désigne le degré de $\dfrac{\varphi(z)+\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}}{\varphi(z)-\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}}$.

Pour trouver la fonction $\varphi(z)$, on développera le radical

$$\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}=\sqrt{z^4+2z^2+4z+1}$$

en fraction continue. Comme on trouve

$$\sqrt{z^4+2z^2+4z+1}=z^2+1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z+\cfrac{1}{2z-2+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z+\cfrac{1}{2(z^2+1)+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z+\cfrac{1}{2z-2+\cdots}}}}}}$$

on prendra

$$\varphi(z)=z^2+1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z+\cfrac{1}{2z-2+\cfrac{1}{\frac{1}{2}z}}}$$

ce qui donne
$$\varphi(z)=\frac{z^5-z^4+3z^3+z^2+2}{z^3-z^2+2z},$$

et par conséquent ρ, degré de $\dfrac{\varphi(z)+\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}}{\varphi(z)-\sqrt{z^4\left[\left(\frac{1}{z}\right)^4+4\left(\frac{1}{z}\right)^3+2\left(\frac{1}{z}\right)^2+1\right]}}$, est égal à 10.

Ainsi, en faisant pour abréger,

$$\Delta=\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1},$$

le terme logarithmique cherché aura cette valeur

$$-\frac{5}{2.10}\log\left[\left(\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right)^{-10}\cdot\frac{x^2\left[\left(\frac{1}{x}\right)^5-\left(\frac{1}{x}\right)^4+3\left(\frac{1}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\right]+\left[\left(\frac{1}{x}\right)^3-\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}\right)\right]\Delta}{x^2\left[\left(\frac{1}{x}\right)^5-\left(\frac{1}{x}\right)^4+3\left(\frac{1}{x}\right)^4+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\right]-\left[\left(\frac{1}{x}\right)^3-\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}\right)\right]\Delta}\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{4}\log\left[\left(\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right)^{10}\cdot\frac{2x^5+x^3+3x^2-x+1-(2x^2-x+1)\Delta}{2x^5+x^3+3x^2-x+1+(2x^2-x+1)\Delta}\right].$$

Donc, si l'intégrale cherchée peut être exprimée sous forme finie, elle doit être égale à

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\Delta+\frac{1}{4}\log\left[\left(\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right)^{10}\cdot\frac{2x^5+x^3+3x^2-x+1-(2x^2-x+1)\Delta}{2x^5+x^3+3x^2-x+1+(2x^2-x+1)\Delta}\right];$$

où

$$\Delta=\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}.$$

Effectivement, on trouve par la différentiation, que c'est bien la valeur de l'intégrale

$$\int\frac{2x^6+4x^5+7x^4-3x^3-x^2-8x-8}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}}\,dx$$

sur laquelle nous avons opéré.

POSITIONS GÉOGRAPHIQUES

DÉTERMINÉES EN 1847

PAR LE LIEUTENANT-COLONEL LEMM

DANS

LE PAYS DES COSAQUES DU DON.

MÉMOIRE

DE

M. O. STRUVE.

(Avec une planche.)

LU LE 15 DÉCEMBRE 1848.

Le travail de M. Lemm qui est l'objet du mémoire suivant, forme le premier chaînon d'une série d'opérations géographiques, dont l'exécution, en telle étendue et pour tel but, n'a jamais été tentée ni en Russie ni autre part. Pour joindre les parties isolées de la levée topographique d'un pays et pour en former une carte générale, on couvre d'ordinaire tout le terrain à lever par un réseau de triangles. Ce travail exige des moyens pécuniaires très considérables et ne peut être exécuté qu'avec un sacrifice considérable de temps et de forces. Voilà que s'est présentée la question de savoir s'il n'existait pas quelque moyen de remplacer les opérations géodésiques par d'autres opérations qui donneraient également un nombre suffisant de points fixes pour les travaux du détail, opérations qui devaient être moins dispendieuses quant aux frais et au temps.

L'art de déterminer les positions géographiques par les observations astronomiques s'est développé rapidement de nos jours. C'est surtout aux progrès de la haute horlogerie et à une étude très soignée des instruments transportables que nous devons ce succès. Nous sommes maintenant en état d'obtenir, à l'aide de l'observation des astres, en peu de jours, des positions géographiques absolues de la plus haute exactitude; et pour y parvenir il ne faut qu'un seul individu expérimenté et muni d'un bon théodolite de Munich et de quelques chronomètres. — Il y avait donc lieu de supposer que la détermination astronomique des positions géographiques d'un nombre considérable de points répandus sur tout le terrain dont il fallait construire une carte, pourrait servir de moyen à remplacer le réseau géodésique et aurait sur celui-ci l'avantage incontestable par rapport à l'épargne du temps et des frais de l'exécution. Quant au degré de précision de ces déterminations, on pouvait espérer que, si même elles n'étaient encore propres à être substituées aux opérations géodésiques, dans des contrées où une exactitude presque absolue est requise, au moins elles fourniraient des résultats qui suffiraient entièrement au but proposé, surtout dans telles parties de notre vaste patrie, où la population est très rare et où l'uniformité du terrain n'impose pas le devoir d'atteindre, sous tous les rapports, le plus haut degré d'exactitude.

Son Excellence le Quartiermaître Général de Berg, ayant pris connaissance des progrès de l'astronomie pratique, eut le premier l'idée de les faire valoir au profit des travaux géographiques qui s'exécutent, sous sa direction suprême, à l'État-major Impérial. Après une consultation avec le directeur du Dépôt topographique militaire, le Lieutenant-général Toutchkoff, le pays des Cosaques du Don fut choisi, pour terrain où le premier essai de remplacer le réseau géodésique par un réseau de points déterminés astronomiquement, devait être fait. Le terrain étant fixé, la besogne de dresser un projet détaillé de l'exécution du travail proposé me fut confiée. Le projet que j'avais l'honneur de présenter au Général de Berg ayant obtenu son approbation, l'exécution du travail, conformément à ce projet, fut remise au Colonel-lieutenant Lemm. Je n'entre pas ici dans les détails du projet, parce que l'esquisse historique que je donnerai plus bas des travaux de M. Lemm en contiendra aussi les traits principaux.

Dans le courant de l'été 1847 les observations furent exécutées sur 72 points et dans l'hiver suivant M. Lemm, aidé de plusieurs officiers du Dépôt topographique, entreprit le calcul de ses observations. Ces calculs étant achevés, le Général Toutchkoff me chargea de lui faire un rapport sur l'exactitude des résultats obtenus. Pour motiver le jugement à prononcer, il fut nécessaire d'entrer dans quelques détails soit des opérations mêmes, soit des calculs, et c'est ainsi que le mémoire suivant a pris son origine.

L'Académie des sciences, depuis sa fondation, a été la dépositaire de presque tous les travaux de géographie exacte dans notre patrie. C'est de son sein que sont émanés jusqu'à présent la plupart des travaux auxquels nous devons nos connaissances de la géographie astronomique de l'empire russe. Par cette raison j'espère qu'il sera de quelque intérêt pour l'Académie de prendre connaissance de ces nouvelles opérations géographiques dont le premier essai a mené à des résultats d'une exactitude presqu'inattendue.

M. Lemm quitta Poulkova le $\frac{16}{4}$ juin 1847. Il avait reçu ici, pour ses observations astronomiques, un théodolite de Munich, dont le limbe divisé a 8 pouces de diamètre et qui appartient à l'Observatoire central. Pour le transport du temps, six chronomètres de boîte lui avaient été remis, dont cinq, Dent No. 1687, 1730, 1739, 1787 et 1808, reglés sur le temps moyen, appartiennent au Dépôt topographique, et le sixième Hauth 11, reglé sur le temps sidéral, avait été ajouté de la part de l'Observatoire central, pour servir particulièrement aux observations astronomiques. En outre M. Lemm était muni d'une ligne de mesure et d'une boussole, à l'aide desquelles il devait exécuter de petites jonctions géodésiques entre les lieux où il avait observé, et d'autres points fixes qui se trouvent indiqués dans les planchettes de la levée topographique du pays. Enfin, pour pouvoir faire les observations météorologiques, nécessaires pour la déduction des réfractions astronomiques, M. Lemm était pourvu d'un bon baromètre et de deux thermomètres.

Les six chronomètres se trouvaient ensemble dans une boîte mâtelassée. Cette boîte reposait sur quatre ressorts vissés contre le plancher d'une seconde boîte entourante. Cette seconde boîte fut placée directement sur le fond de la voiture (tarantasse) dans laquelle M. Lemm

voyageait. C'est ainsi que d'un côté les secousses, auxquelles la voiture fut sujette pendant le voyage, ne pouvaient agir de toute leur force sur les chronomètres, et d'autre côté que la température dans l'intérieur de la boîte qui contenait les chronomètres, ne pouvait subir des changements rapides.

Ayant quitté Poulkova, notre voyageur se rendit par Moscou à Kharkov. Ici une consultation devait avoir lieu avec M. Schidlovsky, professeur d'astronomie à l'université de cette ville, chargé d'opérations analogues à celles de M. Lemm, dans les gouvernements voisins du pays des Cosaques du Don, pour fixer les limites de leurs travaux respectifs. L'observatoire temporaire de Kharkov, dont la différence en longitude par rapport à Moscou était très exactement déterminée par l'expédition chronométrique de 1846, devait être le point de sortie de leurs travaux communs. Avec ce point deux autres points principaux, Voronèje et Novo-Tcherkask, devaient être joints par deux voyages complets c. à d. en allant et revenant, pendant lesquels on ne s'arrêterait point dans les lieux intermédiaires. Enfin, en partant d'un de ces derniers lieux, la longitude d'un quatrième point normal, situé à la frontière orientale du pays des Cosaques du Don devait être également fixée par deux voyages complets. Pour quatrième point normal M. Lemm choisit la colonie allemande Sarepta, située aux bords du Volga, à peu près à 40 verstes de distance de la frontière du pays des Cosaques du Don. Après avoir fixé les positions des quatre points principaux, les longitudes des autres points à déterminer devaient être obtenues par une sorte d'interpolation chronométrique. Or, pour pouvoir effectuer cette interpolation, l'astronome n'avait qu'à exécuter plusieurs voyages entre les points principaux, pendant lesquels, à côté des observations faites sur les points principaux, il devait déterminer, par des observations astronomiques, les corrections de ses horloges pour les époques de son séjour sur les stations intermédiaires.

M. Lemm, n'ayant pas trouvé le professeur Schidlovsky à Kharkov, lors de sa première arrivée dans cette ville, fit tout de suite, entre le 28 juin et le 5 juillet, l'un des voyages fixés à Voronèje et de retour, pour obtenir la première détermination exacte de la longitude de cette ville. Revenu de ce voyage, il trouva M. Schidlovsky à Kharkov et il fut convenu entre eux que ce dernier exécuterait le second voyage de Voronèje et les deux voyages entre Kharkov et Novo-Tcherkask. Par suite de cette convention, M. Schidlovsky fit la seconde jonction entre Kharkov et Voronèje, à l'aide de six chronomètres choisis, dans l'intervalle entre le 5 et le 15 août. Plus tard, pendant qu'il se préparait à faire les voyages entre Kharkov et Novo-Tcherkask, le choléra éclata avec beaucoup d'intensité dans ces contrées, ce qui l'obligea de remettre l'exécution de ces voyages à l'été de l'année suivante 1848. Cependant, une détermination approximative de la différence en longitude entre ces deux endroits étant fournie par les voyages mêmes de M. Lemm, il a été possible de tirer tous les résultats de ses observations, sans avoir besoin d'attendre la détermination exacte de cette différence en longitude. Par l'arrangement des voyages de M. Lemm et comme toutes les longitudes devaient être données d'abord par rapport à celle de Novo-Tcherkask, l'erreur dans la valeur acceptée de cette quantité n'entrera, avec un coefficient considérable, que dans la détermination

de deux points intermédiaires, situés sur la route qui joint les deux villes Kharkov et Novo-Tcherkask. Pour tous les autres points, dont les déterminations ne sont que dans une dépendance indirecte de la différence en longitude entre ces deux villes, il y a lieu de supposer que l'influence de l'erreur dans la valeur acceptée de cette quantité, sera presqu'entièrement insensible dans les résultats. Or, si je ne me trompe, le fruit des voyages de M. Schidlovsky entre ces deux lieux, par rapport aux opérations dont nous traitons ici, consistera principalement à servir de contrôle rigoureux à l'exactitude des travaux de M. Lemm.

C'est par les observations du 6 juillet que commencent les opérations proprement dites de M. Lemm. Je ferai ici l'énumération des différents voyages entre les points principaux, en ajoutant le nombre des jours employés et celui des points intermédiaires, déterminés pendant chacun de ces voyages. Les jours dans cette liste, ainsi que dans toutes les autres parties de ce mémoire, sont tous du nouveau style.

I	Kharkov à Novo-Tcherkask	6 juillet — 10 juillet	4	jours	2	points
II	Novo-Tcherkask à Sarepta	13 juillet — 20 juillet	7	«	6	«
III	Sarepta à Novo-Tcherkask	20 juillet — 27 juillet	7	«	5	«
IV	Novo-Tcherkask à Sarepta	30 juillet — 14 août	15	«	12	«
V	Sarepta à Voronèje	17 août — 25 août	8	«	4	«
VI	Voronèje à Sarepta	25 août — 31 août	6	«	5	«
VII	Sarepta à Voronèje	2 sept. — 13 sept.	11	«	8	«
VIII	Voronèje à Sarepta	13 sept. — 21 sept.	8	«	5	«
IX	Sarepta à Novo-Tcherkask	23 sept. — 7 oct.	14	«	9	«
X	Novo-Tcherkask à Novo-Tcherkask	8 oct. — 16 oct.	8	«	4	«
XI	Novo-Tcherkask à Novo-Tcherkask	17 oct. — 26 oct.	9	«	7	«

Somme des points intermédiaires 67.

Ajoutons à ce nombre encore les trois points principaux Voronèje, Novo-Tcherkask et Sarepta, ainsi que la ville de Koursk, dont la position fut déterminée pendant le voyage de retour de Kharkov à St.-Pétersbourg, et nous avons le nombre total de 71 points déterminés par M. Lemm en 1847. Nous voyons dans son journal d'observations que, pour obtenir ce résultat, M. Lemm a observé en 93 nuits, dans le courant de près de 4 mois, et pendant lesquels il lui a fallu parcourir des distances dont la somme monte à peu près à 12000 verstes. Il n'y a pas de doute que ce résultat avantageux doit être attribué en premier lieu à l'application infatigable de notre voyageur, mais en même temps nous devons avouer que son travail a été beaucoup favorisé par le beau climat du pays, dans lequel il l'avait à exécuter. Même avec le plus grand zèle de la part du voyageur, nous ne pourrons guères espérer d'obtenir une récolte aussi riche en si peu de temps, dans nos contrées plus boréales de la Russie, où l'état brumeux et inconstant de l'atmosphère nous expose à des vexations fréquentes dans nos travaux astronomiques.

Dans le plan du travail il avait été arrêté que la distance moyenne entre deux lieux voisins à déterminer astronomiquement, devait être environ de 50 verstes. Voyons maintenant jusqu'à quel point M. Lemm a réussi de suffire à cette condition. La surface du pays des Cosaques du Don contient de très près 142400 verstes carrées. Or, comme des 71 points déterminés 65 sont situés en dedans des frontières de ce pays, il y a en moyenne un point sur 2191 verstes carrées, d'où nous concluons que la distance moyenne entre deux points voisins est égale à 50,2 verstes. Par conséquent, sous ce rapport, l'exécution du travail est en accord parfait avec le projet. Si nous jetons un coup d'oeil sur la petite carte du pays des Cosaques du Don, annexée à ce mémoire, nous nous persuaderons facilement que les 65 points déterminés par M. Lemm sont très régulièrement répandus sur tout le terrain. Les points noirs sont tous des points déterminés, et les points principaux sont entourés en outre par un petit cercle rouge, pour les faire mieux ressortir. Les nombres qui se trouvent à côté des points indiquent l'ordre dans lequel les déterminations se sont suivies. C'est en poursuivant ces nombres qu'on se formera la meilleure idée des voyages de M. Lemm. Les cercles qui entourent dans notre carte les points déterminés répondent à 25 verstes de rayon. On voit que plusieurs de ces cercles s'entrecoupent, tandisque dans d'autres parties ils restent quelques lacunes entre les périphéries des cercles. La plus grande lacune se trouve dans la partie méridionale du pays entre les rivières Sal et Manytch. Dans cette partie cependant il n'était pas si important que les points déterminés se trouvaient aussi près l'un de l'autre que dans les autres parties du pays, vu que tout le terrain situé entre les rivières Sal et Manytch n'est qu'une steppe continue, dans laquelle les Cosaques et les Kalmuques nomades paissent leurs troupeaux en été et où il n'y a presqu'aucune habitation fixe. Par cette raison les moyens de communication manquent entièrement dans l'intérieur de ce terrain; c'est pourquoi notre voyageur s'est vu dans la nécessité de se contenter, pour ce cas, de la détermination de plusieurs points situés sur les frontières.

A l'exception seulement de quelques points où l'état du ciel était moins favorable, dans tous les lieux quatre étoiles ont été observées, deux pour la latitude et deux pour la détermination du temps. Ces quatre étoiles furent tellement choisies que l'une se trouvait près du premier vertical à l'Est, la seconde près du premier vertical à l'Ouest, la troisième près du méridien du côté méridional de l'hémisphère céleste; enfin la quatrième étoile, au Nord, était toujours l'étoile polaire. D'ordinaire de chacune de ces quatre étoiles 8 observations ont été faites, dont 4 dans chaque position du limbe de l'instrument. Ce n'est que dans quelques cas exceptionnels, où l'état de l'atmosphère recommandait de se dépêcher, que l'astronome se contenta de quatre observations de chaque étoile. La plus grande partie des observations ont été faites la nuit, parce qu'alors il était plus facile de trouver les étoiles qu'on voulait observer, et de les choisir favorablement. Il y a cependant aussi un nombre très considérable d'observations faites le jour, lesquelles par rapport à l'exactitude ont l'avantage sur celles de nuit. Pour trouver les étoiles en plein jour, le voyageur était muni d'une collection de tables des azimuths et des distances au zénith, correspondants à différents angles horaires des étoiles les plus brillantes.

Ces tables, calculées d'avance à Poulkova, furent construites de manière qu'elles valaient pour les différentes latitudes dans lesquelles notre voyageur avait à observer. La direction du méridien était indiquée par la boussole appliquée au centre du pied du théodolithe, dans une position constante par rapport au cercle horizontal de l'instrument, avec assez d'exactitude pour ne pas manquer les étoiles. Il s'entend que, dans ce but, M. Lemm avait soin de vérifier de temps à temps la déclinaison de son aiguille aimantée, en différents points de son voyage.

Avant et après chaque série d'observations, les cinq chronomètres reglés sur le temps moyen, furent soigneusement comparés au chronomètre d'observation Hauth 11 reglé sur le temps sidéral. De cette manière l'astronome parvient à obtenir les corrections des autres chronomètres presqu'entièrement indépendantes des variations dans la marche du chronomètre sidéral, pendant la durée des observations, tant que ces variations se produisent en proportion du temps écoulé et que la marche du chronomètre d'observation n'a été sujette à des sauts irréguliers. Mais à côté de ces comparaisons principales, qui devaient servir à la déduction des longitudes, une autre série de comparaisons fut exécutée chaque jour à une heure fixe. Par cette seconde série de comparaisons faites dans des intervalles égaux de temps, le voyageur était à même de juger chaque jour de l'état de ses chronomètres et pouvait être averti, d'un coup d'oeil, des irrégularités qui avaient eu lieu dans la marche des différents chronomètres. A l'exception des irrégularités produites par les changements de la température, heureusement, pendant toute l'expédition, il n'a pas été remarqué, dans la marche d'aucun des chronomètres aucun saut, qui aurait pu jeter quelque soupçon sur les résultats.

Pendant toute la durée de l'expédition, M. Lemm fit, plusieurs fois par jour, la lecture d'un thermomètre placé à l'intérieur de la boîte qui contenait les chronomètres. Par ce soin il a été possible de gagner une connaissance approchée des températures, dans lesquelles les chronomètres s'étaient trouvés pendant les voyages. Cette connaissance nous a servi à donner une explication très probable de quelques différences plus considérables, qui se sont montrées dans les résultats.

En passant maintenant aux calculs mêmes et aux résultats du voyage, je remarque en premier lieu que, pour les quatre points principaux, tous les calculs, soit des latitudes, soit des déterminations du temps, ont été exécutés deux fois et indépendamment l'une fois de l'autre, par M. Lemm lui-même et par d'autres officiers du Dépôt topographique. Par conséquent, par rapport à ces points normaux, nous pouvons être persuadés que nulle part une erreur de calcul ne soit commise. Mais, comme le temps pressait, pour la plus grande partie des points intermédiaires, les calculs qui me furent remis, n'avaient été faits que par un seul calculateur. Il était donc possible que de petites erreurs se fussent glissées dans quelques uns des résultats. Par cette raison, il m'a paru important de soumettre ces calculs à un examen et, par conséquent, j'ai refait les calculs dans tous les cas où quelques différences considérables se montraient dans les résultats; dans d'autres cas où les résultats s'accordaient bien entre eux, j'ai répété les calculs au moins pour tous les coefficients qui y agissaient d'une manière constante. Par ce

procédé j'ai découvert plusieurs erreurs assez considérables. Après les avoir corrigées, je me tiens persuadé que maintenant les résultats ne seront plus affectés d'aucune erreur de conséquence.

Pour déduire d'une distance au zénith z, observée près du méridien, la distance au zénith $= z'$ correspondante au passage de l'étoile par le méridien lui-même, nous avons la formule connue de réduction:

$$\log(z - z') = k - \log \sin \frac{(z+z')}{2} + \nu + \log \sin^2 \frac{t}{2}$$

dans laquelle $$k = 5{,}615455 + \log \cos \varphi + \log \cos \delta$$

et $$\nu = \log \operatorname{arc} \tfrac{1}{2}(z - z') - \log \sin \tfrac{1}{2}(z - z').$$

M. Lemm a négligé, dans ses calculs, le terme ν comme insignifiant. La considération suivante nous prouve que, par rapport à l'exactitude à laquelle il pouvait prétendre dans ses déterminations des latitudes, cette quantité est réellement évanouissante. Les étoiles situées sur la partie méridionale de l'hémisphère céleste sont toujours observées par lui si près du méridien, que toute la réduction $z - z'$ ne monte d'ordinaire qu'à quelques minutes. Cela sera donc dans les latitudes déduites des observations de l'étoile polaire que le terme négligé aura la plus grande influence. Pour cette étoile qui a été observée sous des angles horaires très différents, $z - z'$ peut monter à un degré et demi ou à 5400″. Dans l'ouvrage «*Gradmessung in den Ostseeprovinzen von W. Struve*» Vol. I, pag. 267, nous trouvons une petite table des valeurs de ν correspondantes aux différentes valeurs de $\log(z - z')$. Cette table nous apprend que, pour $z - z' = 5400''$, la sixième décimale de $\log(z - z')$ se change, par l'introduction de ν, de 13 unités, ce qui augmenterait la réduction seulement de 0″,16. Cette quantité, comme nous verrons plus tard, n'est pas même la sixième partie de l'erreur probable à craindre, dans les résultats pour les latitudes, par suite des erreurs accidentelles des observations. En outre, cette quantité de 0″,16 correspond au maximum possible de réduction dans les observations de l'étoile polaire. Par conséquent, nous devons supposer qu'en général la réduction et la valeur correspondante du terme négligé ν, ont dû être considérablement plus petites.

Dans le calcul des latitudes il s'agit en premier lieu de connaître exactement les déclinaisons des étoiles observées. L'on sait que les déclinaisons données dans les différentes éphémérides réclament en partie des corrections notables. Par cette raison j'ai calculé à l'aide des catalogues fondamentaux de Mm. Airy, Argelander et Struve, les déclinaisons moyennes des étoiles observées, pour le commencement de l'année 1847, et en les comparant ensuite avec les données du *Морской Мѣсяцословъ* pour la dite année, employées dans les calculs de M. Lemm, j'ai trouvé les corrections qu'il fallait appliquer aux latitudes respectives. On conviendra facilement que ces corrections ne pouvaient pas être négligées, si l'on considère que par ex. pour α Aquilae la correction trouvée de la déclinaison a été de + 3″,74, pour α Aurigae de + 3″,68.

Pour pouvoir calculer l'angle horaire t d'après la formule:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta},$$

ou

$$\sin\frac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)\sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}},$$

il faut connaître approximativement la latitude φ. Les valeurs de φ acceptées par M. Lemm dans ses calculs, différaient, dans quelques cas, considérablement des valeurs définitives, déduites par lui pour les latitudes. La théorie nous prouve que l'influence d'une erreur dans la latitude supposée, sur le résultat des calculs de l'angle horaire, est zéro pour toutes les étoiles observées exactement au premier vertical; mais cette influence, qui s'exprime par la formule différentielle $dt = -\frac{\cot a}{\cos\varphi}d\varphi$, augmente rapidement avec la distance de l'étoile du premier vertical, au moment des observations. Dans des observations de voyage, il n'est pas possible de choisir toujours les meilleures conditions de l'observation. Nous voyons, dans le journal de M. Lemm, que quelquefois les étoiles observées à l'Est ou à l'Ouest, étaient au moment des observations éloignées d'un couple d'heures, du premier vertical. Par cette raison, dans tous les cas où la valeur supposée de la latitude différait de la valeur définitive de plus de 5", j'ai déduit la correction qu'il fallait ajouter à l'angle horaire calculé t, d'après la formule différentielle

$$dt = \left(\frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin t} - \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang} t}\right)d\varphi.$$

En général l'influence de cette correction n'a pas été très sensible dans la moyenne des corrections de l'horloge obtenues par les deux étoiles, parce qu'assez souvent il est arrivé que la correction à appliquer aux résultats déduits des observations de l'étoile occidentale a eu le signe contraire de celle qu'il fallait ajouter au résultat fourni par l'étoile orientale. Il y a eu cependant des cas où cette influence a été assez considérable; à Piati-isbanskaja par. ex. la correction de l'horloge, déduite par M. Lemm, a subi, par mes calculs, un changement de 1ˢ06. Mais même dans les cas où la correction moyenne de l'horloge n'a pas été sensiblement changée par mes calculs, nous en avons pu tirer néanmoins un autre avantage, en ce qu'ils ont fait évanouir toutes les grandes différences qui auparavant nous avaient choqué dans les résultats trouvés par les deux étoiles. Par ex. pour Ilowaiskaja, la différence entre les deux corrections de l'horloge, calculées par M. Lemm, montait à 4ˢ31, tandisqu'après avoir ajouté la dite correction, elles s'accordent maintenant à 0ˢ28 près. — Une erreur dans la déclinaison employée aurait dû nécessairement exercer, sur les angles horaires calculés, une influence analogue à celle d'une erreur dans la latitude supposée. Mais, comme j'avais trouvé que les corrections des déclinaisons ne montent jamais à 5", limite des erreurs de la latitude que j'avais prises en considération, j'ai cru pouvoir les négliger entièrement.

Après avoir appliqué toutes les corrections mentionnées, un jugement pouvait être formé sur l'exactitude des résultats gagnés, soit pour les latitudes, soit pour les corrections de l'hor-

loge d'observation. Dans ce but, j'ai comparé en premier lieu 200 déterminations isolées de la latitude avec leurs moyennes respectives, ce qui m'a donné une erreur probable de 2″,85 pour une observation isolée de la distance au zénith. Il s'en suit que, si 8 observations de deux étoiles ont été faites, l'erreur probable du résultat moyen pour la latitude n'est que de 0″,71. Mais cette valeur ne peut être regardée comme l'erreur probable, à laquelle les latitudes sont réellement sujettes. Elle donne seulement une preuve de l'exactitude extraordinaire des pointages et des lectures du cercle divisé, de la part de M. **Lemm**, tandisque les latitudes obtenues peuvent encore être affectées d'erreurs qui ont agi d'une manière constante sur toutes les observations faites le même soir sur la même étoile, comme par ex. les erreurs de division du cercle, la flexion du tube etc. Cette considération m'a engagé à soumettre l'exactitude des observations encore à une autre épreuve, savoir, à déduire leur erreur probable, de la constance dans la différence entre les résultats obtenus pour les latitudes par l'étoile polaire $= N$, et par les étoiles australes $= S$. Je donnerai ici la liste de tous les $S-N$ déterminés par M. **Lemm**. Dans cette liste, les chiffres romains indiquent les différents voyages (voyez pag. 238), dans le courant desquels les points ont été déterminés.

Voyage.	Point.	$S-N$.
I	1	+ 3″,62
	4	+ 8,16
	4	+ 3,42
II	5	− 0,32
	7	+ 2,65
	8	+ 1,23
	9	− 1,70
	10	− 1,30
III	11	+ 1,69
	14	+ 1,79
	15	+ 4,07
	16	+ 2,54
IV	18	+ 3,47
	20	+ 4,91
	23 *)	(+ 15,60)
	24	+ 9,76
	25	+ 5,78
	26	+ 11,44
	28	+ 11,45

Voyage.	Point.	$S-N$.
V	29	+ 2″,88
	31	+ 6,89
	32	+ 2,71
VI	33	+ 7,75
	34	+ 4,61
	35	+ 3,48
	36	+ 3,17
	37	+ 4,21
VII	38	+ 8,54
	39	+ 1,05
	40	+ 9,72
	41	+ 3,07
	44	+ 9,59
	45	+ 6,59
VIII	46	+ 3,55
	48	+ 7,48
	50	− 0,51

*) Les observations de l'étoile polaire, faites dans ce point, paraissent être affectées d'erreurs considérables. Par cette raison, dans l'évaluation de l'erreur probable, j'ai omis la différence $S-N$ déterminée dans ce point.

Voyage.	Point.	$S-N$.
IX	51	+ 2″,15
	53	+ 4,52
	54	+ 5,36
	55	+ 3,40
	56	— 0,05
	57	— 4,71
	58	+ 7,79
	59	+ 4,56
X	60	+ 3,05
	61	+ 8,32
	62	+ 2,26
	63	+ 2,60
XI	64	+ 5″,31
	65	+ 3,34
	66	+ 5,89
	67	+ 5,18
	68	+ 3,58
	69	+ 6,71
	70	+ 5,38
	71	+ 4,65

La liste précédente nous fait voir que de 56 valeurs de $S-N$, il n'y a que 6, encore très petites pour la plupart, qui ont le signe négatif, toutes les autres étant positives. La valeur moyenne de $S-N$ est + 4″,30. Nous en concluons que, par suite d'une flexion du tube ou par quelque autre cause agissante comme une flexion, toutes les distances au zénith ont été mesurées trop grandes. Si l'on compare les valeurs isolées de $S-N$ avec la moyenne, on trouve:

l'erreur probable d'une différence $S-N$ = 2″,18,
« « de la moyenne (4″,30) = 0″,30,
« « d'une latitude déterminée par 2 étoiles = 1″,09,
« « « « « par 1 étoile = 1″,62.

Cette valeur 1″,09 de l'erreur probable des latitudes doit être plutôt trop grande que trop petite, parce qu'elle a été évaluée dans la supposition que la flexion du tube fût restée constante pendant toute la durée de l'expédition. Mais si l'on regarde attentivement la série des $S-N$, on remarque facilement que cette supposition n'a été juste que dans certaines périodes. En divisant la durée de l'expédition en périodes qui correspondent aux différents voyages, nous trouvons, dans les différentes périodes, les valeurs moyennes suivantes de $S-N$:

pendant le voyage I	$S-N$ = + 5″,07
II	+ 0,13
III	+ 2,52
IV	+ 7,80
V	+ 4,16
VI	+ 4,65
VII	+ 6,43
VIII	+ 3,51
IX	+ 2,88
X	+ 4,06
XI	+ 5,00.

Quoique ces valeurs moyennes de $S-N$ soient elles-mêmes encore affectées d'erreurs probables assez considérables, vu que le nombre des déterminations dans chaque période n'a été que modique, néanmoins le résultat moyen du voyage II $+0\overset{''}{,}13$, comparé à celui du voyage IV $+7\overset{''}{,}80$, ne peut laisser aucun doute que la cause qui a produit les différences $S-N$, n'ait été sujette à des changements périodiques sensibles. En comparant les valeurs isolées de $S-N$, déterminées dans chaque période, avec les moyennes correspondantes, nous trouvons l'erreur probable d'une latitude $=0\overset{''}{,}95$. Par conséquent nous ne nous écarterons pas beaucoup de la vérité, si nous posons l'erreur probable d'une latitude, déterminée par 8 observations de deux étoiles, égale à une seconde. Encore cette valeur est-elle plutôt trop grande que trop petite.

Pour pouvoir juger de l'exactitude des corrections de l'horloge, j'ai comparé 188 résultats isolés, avec les 42 moyennes respectives. C'est ainsi que j'ai trouvé l'erreur probable d'une observation isolée faite pour la détermination du temps $=0\overset{s}{,}341$, ce qui donne l'erreur probable de la moyenne des résultats de 8 observations de deux étoiles $=0\overset{s}{,}085$. Dans ce cas les recherches sur l'exactitude des observations ne pouvaient être menées de la même manière que pour les latitudes. Les différences entre les résultats obtenus, pour les corrections de l'horloge, par les observations de l'étoile orientale (E) et par celles de l'étoile occidentale (O), sont trop altérées par les irrégularités dans la marche du chronomètre d'observation, qui ont eu lieu dans les intervalles entre les observations faites dans les deux verticaux, pour admettre une déduction approximativement exacte de l'erreur probable. Cependant, malgré ces altérations irrégulières, la série des $O-E$ déterminés par M. Lemm, nous a fait voir que les valeurs positives ont a une préponderance très marquée, tant en nombre, qu'en grandeur. On juge facilement que c'est bien cela à quoi il fallait s'attendre, parce que, pour les étoiles qui ont servi à trouver les corrections de l'horloge, les distances au zénith ont dû être observées trop grandes, comme cela a eu lieu dans les distances zénithales des étoiles observées pour la détermination des latitudes. Dans ces circonstances, pour avoir égard, de quelque sorte, aux erreurs qui peuvent avoir affecté d'une manière constante toutes les observations d'une étoile, faites le même soir, il ne nous reste d'autre moyen que d'augmenter l'erreur probable $0\overset{s}{,}085$ précédemment trouvée, en proportion de la quantité dont nous avons déduit l'erreur probable des latitudes plus grande par les $S-N$, que par la comparaison des observations isolées avec leurs moyennes. Il s'en suit que nous pouvons estimer l'erreur probable d'une correction de l'horloge, déduite de 8 observations de deux étoiles, à peu près égale à $0\overset{s}{,}12$.

Le calcul des longitudes, dans les manuscrits remis entre mes mains, n'avait été fait qu'une seule fois par M. Lemm lui-même. Quoique j'eusse pleine confiance dans l'exactitude de ses calculs, je l'ai pourtant jugé nécessaire de refaire entièrement cette partie des calculs, d'après une méthode plus uniforme et plus rationelle.

En premier lieu il fallait se décider de quelle manière les longitudes données, pour le même point, par différents chronomètres, devaient être combinées à une valeur moyenne. Les calculs de M. Lemm avaient déjà fait voir que les déterminations obtenues à l'aide des deux

chronomètres **Hauth 11** et **Dent 1739** s'écartaient en général le plus de la moyenne tirée de tous les 6 chronomètres. Par cette raison, pour quelques voyages dans lesquels les différences étaient plus considérables, M. **Lemm** avait rejeté entièrement les résultats tantôt de l'un, tantôt de l'autre de ces deux chronomètres, et quelquefois même de tous les deux. Ce procédé est inadmissible, principalement parce que le nombre (4) des chronomètres restants, dont les résultats s'accordaient mieux entre eux, n'était pas assez grand. Mais nous avions encore d'autres raisons pour procéder autrement. Il est connu qu'aucune autre cause ne nuit autant à l'exactitude des longitudes chronométriques, que des variations rapides et considérables de la température. A l'aide d'expériences faites en différentes températures, on peut bien parvenir à déterminer de combien chaque chronomètre change sa marche journalière pour chaque degré de changement dans la température. Mais il est beaucoup plus difficile d'indiquer la température, dans laquelle les chronomètres se sont réellement mûs pendant tout le voyage, ou dans certaines parties du voyage; ce qui serait nécessaire de savoir pour pouvoir appliquer exactement les corrections thermométriques. Le seul moyen pour parvenir à cette connaissance, et que nous avons déjà employé en d'autres occasions, est celui de placer à côté des chronomètres, dans la même boîte, encore une bonne horloge pourvue d'une balance non-compensée, et dont les indications, comparées à celles des chronomètres proprement dits, fourniraient le moyen de calculer les températures, dans lesquelles les chronomètres se sont trouvés dans chaque intervalle du voyage. Un autre moyen, pour se mettre à l'abri de l'influence thermométrique, serait celui de choisir, dans un grand nombre de chronomètres, ceux qu'on veut employer dans le voyage, de sorte que la somme des coefficients thermométriques, antérieurement déterminés, se réduise à zéro. Enfin, en cas que ni l'un ni l'autre de ces moyens n'a été praticable, il reste encore en général un troisième expédient, savoir celui d'attribuer aux résultats, obtenus par les différents chronomètres, de tels poids qu'ayant multiplié ces coefficients thermométriques par les poids relatifs, la somme des produits soit zéro. On peut objecter, contre cette dernière manière de procéder, qu'ainsi, en général, les chronomètres ne recoivent pas les poids qui leur conviennent d'après la grandeur de leurs erreurs accidentelles; mais cette considération ne m'a pas paru digne d'être mise en parallèle avec l'avantage que cette méthode nous offre d'anéantir l'influence thermométrique. Aussi ne serait-il pas possible d'évaluer exactement les poids des chronomètres, si l'on n'a pas eu égard auparavant aux changements que doivent subir les résultats par les changements de la température. Par suite à ces considérations, et comme les deux premiers expédients n'étaient pas praticables dans notre cas, je n'ai plus hésité à suivre la dernière méthode.

Des expériences directes sur la compensation des six chronomètres employés dans l'expédition de M. **Lemm**, faites par M. **Döllen** à l'Observatoire de Poulkova, en printemps 1847, avaient donné le coefficient thermométrique

de **Hauth 11** $= + 0{,}0408k$
Dent 1678 $= - 0{,}0027k$
Dent 1730 $= - 0{,}0028k$

de Dent 1739 = — 0,0106*k*
Dent 1787 = — 0,0034*k*
Dent 1808 = — 0,0050*k*

où *k* signifie le changement produit, dans la marche journalière d'un chronomètre non-compensé, Arnold et Dent 951, par chaque degré de changement dans la température. Par une longue série d'expériences cette quantité *k* a été déterminée = + 13ˢ74 pour le chronomètre Arnold et Dent 951. Par conséquent un degré de changement dans la température change la marche journalière

de Hauth 11, de + 0ˢ561
Dent 1687, de — 0,037
Dent 1730, de — 0,038
Dent 1739, de — 0,146
Dent 1787, de — 0,047
Dent 1808, de — 0,067.

On voit que, de nos 6 chronomètres, le seul Hauth 11, ayant le coefficient thermométrique du même signe que le chronomètre non-compensé, a la compensation trop faible; pour tous les autres, la compensation est trop forte, c. à d. ils sont construits de sorte qu'avec un accroissement de la chaleur leur marche s'accélère, tandisque pour le chronomètre non-compensé elle se ralentit, si la température se lève. La moyenne arithmétique des six coefficients est + 0ˢ039. Or, dans un voyage de plus longue durée, et s'il y a eu des changements considérables de température, il aurait pu arriver facilement que la moyenne arithmétique des six valeurs isolées des longitudes, ait été fautive d'entières secondes, par le seul effet de la température. Mais, si l'on donne le poids $=\frac{1}{2}$ aux résultats obtenus par les deux chronomètres Hauth 11 et Dent 1739, tandisque les autres gardent l'unité de poids, la moyenne des marches journalières des 6 chronomètres, eu égard à ces poids, ne pourra plus être changée que de 0ˢ0051, par chaque degré de température. Donc, si nous procédons de cette manière, les moyennes de nos résultats pourront être regardées comme entièrement libres de l'influence thermométrique. On aurait pu modifier encore les poids des deux chronomètres de manière qu'aussi le petit reste dans la somme des coefficients, multipliés par les poids respectifs, fût réduit exactement à zéro. Mais cela m'a paru inutile, vu que la détermination même des coefficients thermométriques ne peut prétendre à ce degré d'exactitude, qui serait nécessaire pour pouvoir décider de si petites quantités. L'expérience nous a prouvé en outre, que les coefficients thermométriques, particulièrement des chronomètres qui n'ont pas été long-temps en usage, sont sujets, avec le temps, à des variations très sensibles, de sorte que les valeurs obtenues ne sont exactes que pour l'époque de leur évaluation et que, pour les périodes voisines, elles peuvent seulement être regardées comme des valeurs approximativement justes.

Les coefficients thermométriques des deux chronomètres Hauth 11 et Dent 1739 étant de signe contraire, il est nécessaire que les longitudes données par ces deux chronomètres diffèrent en général en sens opposé, de la moyenne donnée par tous les 6 chronomètres. Il est également nécessaire qu'à cause du coefficient plus grand de Hauth 11, les écarts, pour ce chronomètre, soient en général plus considérables que pour le chronomètre Dent 1739. La justesse de ces remarques a été confirmée par les résultats des voyages de M. Lemm. Nous avons par ex. pour les différences en longitude, déterminées pendant le voyage VII les résultats suivants:

Point.	Hauth 11.	Moyenne de 6 chron.	Dent 1739.
38	2m 32s,73	35s,32	34s,94
39	0 10,50	14,65	15,92
40	0 27,37	31,52	34,19
41	3 10,73	15,10	17,54
42	4 19,11	23,30	26,15
43	6 29,89	32,82	35,92
44	9 55,41	57,83	60,69
45	15 10,39	12,88	15,30.

On voit qu'à la seule exception du premier lieu d'observation, pour lequel l'influence de la température, dans le bref intervalle passé entre le départ du point normal jusqu'à l'époque des observations dans ce premier point intermédiaire, n'a pu être que très peu sensible, de sorte que les sauts irréguliers dans les marches des chronomètres ont dû prévaloir, au moins pour Dent 1739, je dis qu'à cette seule exception tous les autres résultats du voyage VII sont parfaitement d'accord avec les suppositions énoncées précédemment. Mais il y a eu aussi des cas où nos suppositions n'ont pas été confirmées par l'expérience. Ce sont cependant des cas, dans lesquels on peut indiquer, avec beaucoup de probabilité, d'autres causes qui ont dû agir défavorablement sur les résultats fournis par les chronomètres.

Conformément à ce que nous venons d'expliquer, dans la déduction des résultats moyens pour les longitudes, fournis par les 6 chronomètres, l'unité du poids a toujours été attribuée aux quatre chronomètres Dent 1687, 1730, 1787 et 1808, et le poids $= \frac{1}{2}$ aux deux autres chronomètres Hauth 11 et Dent 1739. Pour les chronomètres employés par M. Schidlovsky, les coefficients thermométriques n'ont pas été déterminés d'avance et par les expériences antérieures nous n'avions aucune indication sûre sur la valeur relative de ses chronomètres. Dans ces circonstances, pour les longitudes fournies par les observations de M. Schidlovsky, il n'y avait pas moyen de procéder autrement que de prendre simplement la moyenne arithmétique des résultats donnés par les six chronomètres.

Ayant fixé la méthode de combiner les résultats, il fallait en premier lieu évaluer, aussi exactement que possible, les différences en longitude entre les quatre points principaux Kharkov, Voronèje, Novo-Tcherkask et Sarepta. Les observations de M. Schidlovsky avaient donné la

différence en longitude ($\varDelta L$) entre l'observatoire temporaire de Kharkov et le clocher de l'église de St.-Mitrofan à Voronèje $= 11^m 54^s,65$. D'après M. Lemm $\varDelta L$ se trouve entre les lieux d'observation dans ces deux villes $= 11^m 52^s,84$

réduction à Voronèje $= + 0,49$

« à Kharkov $= + 2,12$

Somme $= 11 \;\; 55,45$.

Nous avons par conséquent la moyenne entre les deux déterminations:

$\varDelta L$, obs. temp. de Kharkov — Voronèje, clocher de St. Mitrofan $= 11^m 55^s,05$,

avec l'erreur probable $= 0^s,18$

ou $\varDelta L$, obs. temp. de Kharkov — Voronèje, lieu d'observation $= 11^m 54^s,56$.

Pour la différence en longitude entre les lieux d'observation à Voronèje et à Sarepta nous avons les trois déterminations suivantes:

$$\varDelta L = 21^m 24^s,95$$
$$26,12$$
$$24,82.$$

Quoique les trois voyages de M. Lemm entre ces deux points aient été de différente durée, savoir respectivement de 14, de 17 et de 19 jours, ces différences dans les durées du transport du temps ne m'ont pas paru assez fortes pour le rendre nécessaire d'attribuer de différents poids aux différents voyages. J'ai donc pris simplement la moyenne arithmétique des trois déterminations, ce qui donne:

$\varDelta L$, lieu d'obs. à Voronèje — lieu d'obs. à Sarepta $= 21^m 25^s,30$

réduction à Voronèje $= - 0,49$

« à Sarepta $= - 0,18$.

Par conséquent

$\varDelta L$, clocher de St.-Mitrofan à Voronèje — Sarepta, puits sur le marché $= 21^m 24^s,63$,

avec l'erreur probable $= 0^s,21$.

Le puits se trouve, dans la colonie Sarepta, exactement au centre du marché qui a la forme d'un carré régulier. Toute la colonie est construite symétriquement autour de ce carré. Le point auquel M. Lemm a rapporté ses observations est donc très distinctement indiqué.

Enfin Novo-Tcherkask et Sarepta sont liés par deux voyages qui ont donné

1) $\varDelta L$, lieu d'obs. à Novo-Tcherkask — lieu d'obs. à Sarepta $= 17^m 49^s,60$

2) « « « « « « $= 48,92$

Moyenne $= 17 \;\; 49,26$

réduction à Sarepta $= - 0,18$

« à Novo-Tcherkask $= + 0,80$.

Par conséquent

ΔL, Novo-Tcherkask, église de St.-Nicolas — Sarepta, puits sur le marché = $17^m 49^s,88$,
avec l'erreur probable = $0^s,24$.

Par simple addition et soustraction, nous pouvons maintenant déduire, des déterminations précédentes des différences en longitude, celle qui existe entre les lieux d'observation à Kharkov et à Novo-Tcherkask. Nous avons:

ΔL, lieu d'obs.	Kharkov — Voronèje	$+11^m 54^s,56$
« «	Voronèje — Sarepta	$+21\ 25,30$
« «	Sarepta — Novo-Tcherkask	$-17\ 49,26$

La somme de ces trois quantités donne

ΔL, lieu d'obs. Kharkov — Novo-Tcherkask = $+15^m 30^s,60$, avec l'err. prob. = $0^s,37$.

Ayant ajouté la réduction à Novo-Tcherkask = $-0^s,80$, nous avons finalement

ΔL, obs. temp. de Kharkov — Novo-Tcherkask, église de St.-Nicolas = $15^m 29^s,80$.

Après avoir fixé ainsi les différences en longitude entre les quatre points normaux, on pouvait procéder à interpoler celles des points intermédiaires déterminés dans les différents voyages entre chaque couple de points normaux. A cet effet j'ai réduit, à l'aide de la différence connue, en longitude, entre les points normaux respectifs, les corrections des horloges, déterminées dans le second point normal, sur celles qui auraient été trouvées, pour le même moment, au point de sortie. Les différences entre les deux séries de corrections de nos chronomètres, obtenues ainsi pour le point de sortie, me fournissaient alors les marches moyennes des chronomètres pendant le voyage. Ensuite, ces marches des horloges, multipliées par l'intervalle entre les époques des observations au point de sortie et au point intermédiaire à déterminer, et ajoutées aux corrections trouvées pour le point de sortie, donnaient les corrections qui auraient dû avoir lieu au point de sortie, à un moment identique avec celles des observations faites sur le point intermédiaire. La comparaison de ces corrections avec les corrections déduites des observations faites sur le point même, nous donne directement la longitude de ce point, comptée du point de sortie. Ayant appliqué ensuite les petites réductions géodésiques entre les lieux d'observation et les objets fixes en chaque place, j'ai ajouté encore, en cas que le point de sortie n'avait pas été Novo-Tcherkask, la différence en longitude entre ce point normal et le point de sortie respectif. C'est ainsi que je me formais une liste des longitudes de tous les points intermédiaires, comptées de l'église de St.-Nicolas à Novo-Tcherkask.

Il me reste encore le problème épineux d'indiquer le degré d'exactitude qu'on peut attribuer aux différences en longitude obtenues de la manière précédente. Il est évident que la comparaison des longitudes données, pour chaque point, par les différents chronomètres, avec la moyenne respective, même si l'on a égard aux poids relatifs des chronomètres, doit mener à une valeur beaucoup trop forte de l'erreur probable, vu que, par notre méthode de calcul, dans la moyenne la température n'a plus aucune influence, tandisque toutes les longitudes

isolées en sont plus ou moins affectées. Par cette raison, pour avoir égard de quelque sorte à l'augmentation de l'exactitude, produite dans la moyenne par l'élimination des coefficients thermométriques, j'ai fait la supposition arbitraire que, par notre procédé, l'exactitude du résultat moyen soit augmentée en proportion de $\sqrt{2}$ à 1, étant persuadé que cette augmentation est en réalité plutôt trop faible que trop forte. Mais à côté des erreurs dans le transport du temps, dont le seul effet est considéré si l'on compare les valeurs données par les différents chronomètres avec la moyenne, l'exactitude des longitudes dépend encore de différentes causes qui ont dû agir d'une manière constante sur les résultats donnés, pour le même point, par les différents chronomètres. Ces causes sont: 1) les inexactitudes qui ont lieu dans les valeurs déterminées des différences en longitude entre les points normaux, qui ont servi dans chaque voyage, 2) le défaut en longitude entre le point de sortie et Novo-Tcherkask, 3) l'inexactitude de la détermination du temps, soit sur les deux points normaux, soit sur le point intermédiaire à déterminer.

Soit f l'erreur probable déduite de l'accord des résultats gagnés par les différents chronomètres, g l'erreur probable dans la différence en longitude entre le couple respectif de points normaux, g' l'erreur probable de la longitude du point de sortie par rapport à Novo-Tcherkask, h l'erreur probable dans la détermination du temps sur le lieu à déterminer, h' l'erreur probable introduite dans le résultat pour le point intermédiaire, par les erreurs des déterminations du temps dans les deux points normaux; soit ensuite J la durée totale du voyage entre les deux points normaux, i l'intervalle écoulé depuis le départ du point de sortie jusqu'à l'époque des observations dans le point intermédiaire, et nous aurons, d'après ce qui précède, l'erreur probable v de la longitude de ce point intermédiaire à compter de Novo-Tcherkask, par la formule:

$$v = \sqrt{\frac{f^2}{2} + \frac{i^2}{J^2} g^2 + g'^2 + h^2 + h'^2}.$$

La quantité f, comme nous avons vu, se déduit de l'accord des résultats donnés par les différents chronomètres. Les g et g' employés dans notre calcul, sont les erreurs probables données précédemment pour les différences en longitude entre les quatre points normaux. Elles ont été évaluées aussi d'après les principes que je viens d'exposer. h est une quantité constante dont la valeur a été trouvée (pag. 245) $= 0\overset{s}{,}12$. Par rapport à h', j'ai fait la supposition que cette quantité ait été constante pour tous les points et égale à $0\overset{s}{,}10$. Certes cette valeur supposée de h' n'est pas trop petite.

Je donnerai maintenant la liste des différences en longitude par rapport à Novo-Tcherkask, de tous les points intermédiaires déterminés par M. Lemm, en y ajoutant les erreurs probables v provenues des calculs basés sur les principes précédents. Quoique ces v reposent sur trop de suppositions pour pouvoir prétendre à être des valeurs exactes des erreurs probables, néanmoins elles seront des valeurs approximativement justes et donneront une idée de l'exactitude des déterminations. En général, je suis convaincu, ces v seront plutôt trop forts que trop faibles.

Voyage.	Point.	ΔL	v
	1	$-3^{m}34^{s},75$	$0^{s},32$
I	2	− 4 35,91	0,30
	3	− 2 39,63	0,21
	4	0 0,00	0,00
II	5	+ 2 12,55	0,17
	6	+ 4 59,86	0,18
	7	+ 8 33,37	0,21
	8	+ 10 57,04	0,28
	9	+ 11 17,67	0,25
	10	+ 13 27,12	0,27
	11	+ 17 49,88	0,24
III	12	+ 15 31,99	0,28
	13	+ 11 29,12	0,28
	14	+ 8 56,57	0,27
	15	+ 4 27,26	0,22
	16	+ 3 14,30	0,19
IV	17	+ 3 18,29	0,25
	18	+ 5 51,24	0,31
	19	+ 6 35,99	0,35
	20	+ 9 37,89	0,41
	21	+ 12 50,98	0,38
	22	+ 13 44,83	0,39
	23	+ 14 13,32	0,34
	24	+ 10 55,54	0,38
	25	+ 6 18,00	0,43
	26	+ 9 5,11	0,38
	27	+ 13 43,04	0,36
	28	+ 13 35,62	0,30
V	29	+ 15 44,45	0,31
	30	+ 13 25,52	0,32
	31	+ 10 34,47	0,31
	32	+ 7 46,77	0,32
VI	33	+ 4 9,04	0,33
	34	+ 5 29,13	0,32
	35	+ 8 19,48	0,33
	36	+ 12 5,36	0,30
	37	+ 17 41,85	0,29
VII	38	$+15^{m}15^{s},50$	$0^{s},35$
	39	+ 17 35,49	0,44
	40	+ 17 17,90	0,47
	41	+ 14 35,27	0,47
	42	+ 13 26,47	0,47
	43	+ 11 17,42	0,43
	44	+ 7 51,64	0,42
	45	+ 2 37,52	0,41
VIII	46	+ 6 9,51	0,33
	47	+ 7 11,33	0,33
	48	+ 7 4,70	0,35
	49	+ 10 32,29	0,38
	50	+ 9 59,01	0,34
IX	51	+ 13 56,90	0,32
	52	+ 7 47,53	0,55
	53	+ 5 50,40	0,57
	54	+ 5 57,74	0,59
	55	+ 2 55,23	0,56
	56	+ 0 24,10	0,59
	57	− 2 25,87	0,74
	58	+ 0 38,05	0,76
	59	+ 2 53,16	0,56
X	60	− 2 41,66	0,30
	61	− 5 54,12	0,42
	62	− 0 6,04	0,25
	63	+ 1 50,47	0,21
XI	64	+ 0 2,09	0,21
	65	− 2 27,78	0,33
	66	− 4 44,01	0,36
	67	− 7 24,72	0,32
	68	− 6 17,42	0,33
	69	− 7 3,31	0,31
	70	− 4 38,77	0,23
	71	− 15 34,64	1,0

La valeur moyenne de tous les v donnés dans la liste précédente est 0ˢ,36. Dans la latitude moyenne 48° 30′ du pays des Cosaques du Don, une seconde en temps correspond de très près à 145 sajènes. Par conséquent les différences en longitude, toutes comptées de Novo-Tcherkask et exprimées en mesure linéaire, ont l'erreur probable de 52 sajènes. Les différences en longitude entre deux points consécutifs, déterminés pendant le même voyage, sont nécessairement sujettes à des erreurs probables considérablement plus petites. Je ne crois pas beaucoup m'éloigner de la vérité si je leur assigne la valeur = 0ˢ,18 ou de 26 sajènes en distance linéaire.

En regardant la liste précédente des v il nous a frappé que l'exactitude des résultats obtenus, pour les longitudes, dans le voyage IX, est considérablement plus petite que celle des autres voyages. L'explication de cette abnormité apparente se prête tout de suite lorsqu'on fait attention à la marche des températures pendant le voyage IX. Le journal de M. Lemm nous fournit, pour ce voyage, les moyennes arithmétiques suivantes des lectures faites par lui, plusieurs fois par jour, sur le thermomètre appliqué dans l'intérieur de la boîte qui contenait les chronomètres:

23	Sept.	+ 14°,8 R.	30	Sept.	+ 13°,6 R.
24	«	+ 9,6	1	Oct.	+ 12,9
25	«	+ 13,5	2	«	+ 14,2
26	«	+ 13,8	3	«	+ 13,8
27	«	+ 15,2	4	«	+ 4,3
28	«	+ 15,8	5	«	+ 3,1
29	«	+ 10,5	6	«	+ 6,5.

Il est clair que c'est à l'abaissement considérable de la température, dans les derniers jours de ce voyage, qu'il faut attribuer la plus grande partie des irrégularités observées dans les résultats. A cette occasion nous remarquons encore qu'un grand nombre d'expériences nous a prouvé que presque tous les chronomètres perdent la régularité de la marche aussitôt que la température tombe au dessous de + 6°R, probablement parce qu'à cette température l'huile qui se trouve sur les roues et les pivots de l'horloge, passe à un autre état de cohésion. D'après nos expériences, faites en plus grande partie sur des chronomètres de Dent, les limites des températures, entre lesquelles les marches des chronomètres sont les plus régulières, se trouvent à peu près à + 6°R. et + 25°R. Mais nous avons remarqué aussi, qu'en général les marches des chronomètres deviennent beaucoup plus irrégulières si la température tombe au dessous de + 6°R, que si elle monte au dessus de + 25°R.

Dans le journal de M. Lemm les températures les plus basses se trouvent notées, pendant le voyage IX, le 4 oct. = + 0°,2 R. et le 5 oct. + 0°,5 R. Or, si même pour ce voyage, par notre procédé, le manque de compensation dans les chronomètres a été pris exactement en considération, il n'y a néanmoins aucun doute que les résultats n'aient soufferts par le changement d'état de cohésion de l'huile. Dans tous les autres voyages de M. Lemm, dans le pays des Cosaques

du Don, la température est toujours restée au dessus de $+6°$R, à l'exception d'un seul jour où, le matin, elle a été notée $= +3°,5$R. Les irrégularités produites, dans les marches des chronomètres, par l'abaissement de la température, ce jour là, ont également été sensibles dans les résultats. Ce sont elles qui ont élevé l'erreur probable de la longitude du point 61 à 0ˢ,42.

Pendant le retour de M. Lemm de Kharkov à Poulkova, les chronomètres ont été exposés à des froids très considérables. Par cette raison, les marches des chronomètres, dans cette période, ne pouvaient plus garder leur régularité. Il s'en suit que la longitude de Koursk, déterminée pendant ce voyage, ne peut être que très peu certaine en comparaison avec les autres résultats du voyage de M. Lemm. Pour plus de sûreté, dans la déduction de cette longitude, j'ai considéré à côté des marches moyennes des chronomètres, fournies par les observations de Kharkov et de Poulkova, aussi les marches trouvées dans la période précédente du voyage de Novo-Tcherkask à Kharkov. Néanmoins, d'après mon opionion, l'erreur à craindre dans la longitude de Koursk doit être estimée à une seconde en temps.

Je donnerai maintenant la liste des positions déterminées par M. Lemm. Dans cette liste les longitudes sont comptées de Poulkova et de Greenwich. La différence en longitude entre Poulkova et l'observatoire temporaire de Kharkov, telle qu'elle suit des deux expéditions chronométriques de 1845 et 1846 est $+23^m 36^s,02$ *), valeur qui doit être estimée exacte en dedans de 0ˢ,2. La différence en longitude entre l'observatoire temporaire de Kharkov et l'église de St.-Nicolas à Novo-Tcherkask est trouvée $= +15^m 29^s,99$ **). La quantité constante qu'il fallait ajouter aux différences en longitude données précédemment par rapport à l'église de St.-Nicolas à Novo-Tcherkask, pour les changer en longitudes comptées de l'Observatoire de Poulkova, est donc $= +39^m 6^s,01$. Par rapport aux latitudes, j'ai donné simplement la moyenne arithmétique entre les déterminations fournies par l'étoile polaire et par les étoiles méridionales. En cas qu'une seule étoile avait été observée pour la détermination de la latitude, j'ai ajouté la correction constante $\frac{S-N}{2} = \pm 2'',15$, dont il a été question plus haut pag. 244.

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich
1. Voronèje (Воронежъ), clocher de l'église St.-Mitrofan	51° 39′ 25″,7	0ʰ 35ᵐ 31ˢ,26	2ʰ 36ᵐ 49ˢ,93
2. Ivanovka (Ивановка), église	48 14 40,4	34 30,10	35 48,77
3. Babinsk (Бабинскъ), poste	47 27 11,8	36 26,38	37 45,05

*) Dans l'édition russe de ce mémoire, publiée dans les Записки Военно-Топографическаго Депо, Часть XIII, la longitude de l'observatoire temporaire de Kharkov a été supposée 23ᵐ 35ˢ,76 à l'Est de Poulkova. La nouvelle valeur étant le résultat définitif des expéditions chronométriques de 1845 et 1846 (voyez mon mémoire pag. 202), toutes les longitudes données dans le mémoire russe demandent une correction de $+0^s,26$.

**) Cette quantité n'est pas exactement la même qui a été donnée pag. 250. Elle est pourtant plus exacte que l'autre valeur, comme on verra plus tard. Ce sont les observations de M. Schidlovsky jointes à celles de M. Lemm qui ont donné la nouvelle valeur.



	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich
4. Novo-Tcherkask (Ново-Черкаскъ), église de St.-Nicolas	47° 24′ 36″,0	0h 39m 6s,01	2h 40m 24s,68
5. Rasdorskaja (Раздорская), église	47 32 25,0	41 18,56	42 37,23
6. Lapatinskaja (Лапатинская), église	47 38 48,8	44 5,87	45 24,54
7. Zymlianskaja (Цымлянская), église	47 43 29,9	47 39,38	48 58,05
8. Nagajevskaja (Нагаевская), église	47 47 10,3	50 3,05	51 21,72
9. Jessaoulovskaja (Есауловская), église	48 6 40,8	50 23,68	51 42,35
10. Piatiisbianskaja (Пятiизбянская), église	48 35 25,0	52 33,13	53 51,80
11. Sarepta (Сарепта), puits au milieu du marché	48 30 41,9	56 55,89	58 14,56
12. Karpovka (Карповка), église	48 42 13,1	54 38,00	55 56,67
13. Dobrinskaja (Добринская), église	48 49 13,5	50 35,13	51 53,80
14. Jarskaja (Ярьская), petit village, sinuosité sud-ouest de la rivière Tchira.	48 30 10,4	48 2,58	49 21,25
15. Rykovskaja (Рыковская), pont sur la rivière Bystraja	48 20 57,9	43 33,27	44 51,94
16. Jekatérininskaja (Екатерининская), église	48 1 35,8	42 20,31	43 38,98
17. Ilowaiskaja (Иловайская)*), centre du petit village	47 3 0,8	42 24,30	43 42,97
18. Gremoutchy-Kolodetz (Гремучiй-Колодецъ), fontaine dans la steppe	46 55 30,5	44 57,25	46 15,92
19. Embouchure de la Jegorlitzkaja dans le Manytch (Впаденie Егорлицкой въ Манычъ)	46 34 39,1	45 42,00	47 0,67
20. Poste de cordon, Trekh-Bratiev (Кордонъ Трехъ Братьевъ)	46 33 42,5	48 43,90	50 2,57
21. Poste de cordon, Stary-Manytchsky (Кордонъ Старый Manычecкiй)	46 10 7,8	51 56,99	53 15,66
22. Poste de cordon, Verkhny-Kamenny (Кордонъ Верхный Каменный)	46 26 18,8	52 50,84	54 9,31
23. Krylov (Крыловъ), extrémité orientale du village	47 25 5,8	53 19,33	54 38,00
24. Ilinskaja (Ильинская), église	47 24 5,7	50 1,55	51 20,22

*) Il y a trois villages de la même dénomination, dont celui qui a été déterminé par M. Lemm, est situé le plus vers l'Ouest.

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich
25. Martynovka (Мартыновка), église . . .	47° 16′ 32,″5	0ʰ 45ᵐ 24,ˢ05	2ʰ 46ᵐ 42,ˢ72
26. Nijnij-Jirov (Нижный-Жировъ), petit village, sinuosité occidentale de la rivière Sal.	47 23 38,5	48 11,12	49 29,79
27. Nebykov (Небыковъ), centre du petit village	47 47 47,4	52 49,05	54 7,72
28. Jonction des rivières Koumskaja et Mychkova (Усть Кумской и Мышковой)	48 13 1,8	52 41,63	54 0,30
29. Katchalinskaja (Качалинская), église	49 6 18,5	54 50,46	56 9,13
30. Kremenskaja (Кременская), église . .	49 28 43,6	52 31,53	53 50,20
31. Oust-Medweditzkaja (Усть-Медвѣдицкая), église	49 35 9,7	49 40,48	50 59,15
32. Jelanskaja (Еланская), église	49 36 53,0	46 52,78	48 11,45
33. Kazanskaja (Казанская), église	49 47 41,6	43 15,05	44 33,72
34. Solonka (Солонка), église	50 11 59,3	44 35,14	45 53,81
35. Oust-Bouzouloutskaja (Усть-Бузулуцкая), église	50 11 22,6	47 25,49	48 44,16
36. Artchadinskaja (Арчадинская), église	49 53 21,8	51 11,37	52 30,04
37. Tsaritsyn (Царицынъ), cathédrale . . .	48 42 5,0	56 47,86	58 6,53
38. Kamennoj (Каменной), la détermination vaut pour le point où les deux grandes rues du village se coupent	49 47 16,8	54 21,51	55 40,18
39. Razouvajev (Разуваевъ), extrémité occidentale du village, sur le grand chamin	49 56 31,2	56 41,50	58 0,17
40. Orekhovaja (Орѣховая), église	50 28 15,2	56 23,91	57 42,58
41. Orlovskaja (Орловская), église	50 13 7,7	53 41,28	54 59,95
42. Trostianka (Тростянка), église	50 48 47,1	52 32,48	53 51,15
43. Koupava (Купава), église	51 6 52,2	50 23,43	51 42,10
44. Borissoglebsk (Борисоглѣбскъ), cathédrale	51 21 54,5	46 57,65	48 16,32
45, Novo-Arkhanguelskaja (Ново-Архангельская), église	50 51 23,0	41 43,53	43 2,20
46. Novokhopersk (Новохоперскъ), cathédrale	51 5 55,5	45 15,52	46 34,19
47. Mikhailovskaja (Михайловская), église	50 57 15,8	46 17,34	47 36,01
48. Loukovskaja (Луковская), église. . . .	50 34 50,7	46 10,71	47 29,38

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich
49. Filonovskaja (Филоновская), église .	50° 34′ 58″,7	0ʰ 49ᵐ 38ˢ,30	2ʰ 50ᵐ 56ˢ,97
50. Koumiljenskaja (Кумылженская), église	49 52 47,6	49 5,02	50 23,69
51. Goloubinskaja (Голубинская), église	48 50 47,8	53 2,91	54 21,58
52. Tchistiakova (Чистякова), église ...	49 3 13,8	46 53,54	48 12,21
53. Berezovaja (Березовая), église	48 46 16,9	44 56,41	46 15,08
54. Likhovidov (Лиховидовъ), passage par la rivière Tchir	49 22 37,8	45 3,75	46 22,42
55. Setrikovskaja (Сетриковская), poste	49 21 46,0	42 1,24	43 19,91
56. Maltchevskaja (Малчевская), église .	48 59 32,7	39 30,11	40 48,78
57. Louganskaja (Луганская), église....	48 38 27,4	36 40,14	37 58,81
58. Kamenskaja (Каменская), église....	48 20 2,0	39 44,06	41 2,73
59. Stepanovka (Степановка), église....	48 43 12,2	41 59,17	43 17,84
60. Azov (Азовъ), nouvelle église.......	47 6 41,4	36 24,35	37 43,02
61. Eiskoje, forteresse, (Эйское укрѣпленіе), église	46 41 58,3	33 11,89	34 30,56
62. Bataiskaja (Батайская), poste	47 3 0,4	38 59,97	40 18,64
63. Merkoulovskaja (Меркуловская), nouvelle poste	46 39 45,3	40 56,48	42 15,15
64. Souline (Сулинъ), jonction des rivières Koundroutchaja et Gniloutchaja.....	47 52 46,3	39 8,10	40 26,77
65. Nagolnaja (Нагольная), église......	48 0 7,1	36 38,23	37 56,90
66. Golodajevka (Голодаевка), église ...	47 48 38,3	34 22,00	35 40,67
67. Zoujevka (Зуевка), église	48 3 34,1	31 41,29	32 59,96
68. Anastassievka (Анастасіевка), église	47 33 59,9	32 48,59	34 7,26
69. Jelantchikskaja (Еланчикская), église	47 8 20,6	32 2,70	33 21,37
70. Taganrog (Таганрогъ), cathédrale ...	47 12 26,9	34 27,24	35 45,91
71. Koursk (Курскъ), Couvent de la Ste. Vierge	51 43 42,6	23 31,37	24 50,04

J'ajoute encore, à la liste précédente, les positions de quelques points situés dans le pays des Cosaques du Don, et qui ont été joints, par les opérations géodésiques exécutées à l'occasion de l'expédition pour le nivellement entre la mer Noire et la mer Caspienne, avec l'église de St. Nicolas à Novo-Tcherkask. C'est de la description publiée de cette expédition que j'ai puisé les résultats de ces jonctions géodésiques:

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich
72. Kagalnik (Кагальникъ), église......	47° 4′ 26″,3	0ʰ 35ᵐ 59ˢ,92	2ʰ 37ᵐ 18ˢ,59
73. Novo-Nicolajevka (Ново-Николаевка), église	46 58 37,6	37 9,69	38 28,36
74. Novo-Bataiskaja (Ново-Батайская), église	46 53 49,1	37 49,96	39 8,63
75. Kagalnitskaja (Кагальницкая), église.	46 52 59,7	39 17,27	40 35,94
76. Novo-Jegorlitskaja (Ново-Егорлицкая), église....................	46 33 40,2	41 19,96	42 38,63
77. Sredne-Jegorlitskaja (Средне-Егорлицкая), église	46 22 13,8	41 57,54	43 16,21

Lorsque la plus grande partie du rapport précédent fut écrite, j'ai reçu encore, de la part de M. Schidlovsky, la communication en manuscrit des observations faites par lui, en été 1848, pour la détermination directe de la différence en longitude entre les deux points normaux Kharkov et Novo-Tcherkask. Cette jonction, comme nous avons vu plus haut, devait fournir un contrôle rigoureux aux opérations de M. Lemm. Par cette raison je me suis mis tout de suite à l'oeuvre d'en tirer les résultats.

Simultanément avec M. Lemm, le général Vrontchenko a déterminé en 1847, par des opérations analogues, les positions géographiques d'un grand nombre de points répandus sur les gouvernements d'Orel, Tambov, Voronèje, Riasan et Vladimir. Le calcul de ces positions est déjà achevé sous la direction du général Vrontchenko lui-même; la seule partie restante, le calcul des longitudes, vient d'être achevée sous mon inspection à l'Observatoire de Poulkova. Les deux voyageurs Vrontchenko et Lemm ont déterminé indépendamment les positions des villes Novo-Khopersk et Borissoglebsk, dont la première est située dans le gouvernement de Voronèje, l'autre dans celui de Tambov. C'est ainsi que nous gagnons des contrôles réciproques de leurs travaux.

Je donnerai maintenant la comparaison des différents résultats, en ajoutant encore, aux contrôles des latitudes, la détermination de la latitude de Novo-Tcherkask obtenue par l'astronome M. Sabler, à l'occasion du nivellement exécuté entre la mer Noire et la mer Caspienne, à l'aide d'un grand instrument universel. Cette dernière détermination, par conséquent, peut prétendre à un haut degré d'exactitude.

1. *Contrôles des latitudes.*

	Latitudes d'après M. Lemm	Latitudes d'après M. Sabler.	Différ. $L-S$
Novo-Tcherkask...	47° 24′ 36″,0	47° 24′ 34″,9	+ 1″,1
		d'après M. Vrontchenko	
Novo-Khopersk ...	51 5 55,5	51 5 57,7	— 2,2
Borissoglebsk.....	51 21 54,5	51 21 56,2	— 1,7

Un accord plus parfait pouvait à peine être attendu, si l'on considère que les cercles employés par MM. Vrontchenko et Lemm n'avaient que huit à neuf pouces de diamètre.

2. *Contrôles des longitudes.*

Les voyages de M. Schidlovsky donnent les deux déterminations suivantes de la différence en longitude entre l'observatoire temporaire de Kharkov et l'église de St. Nicolas à Novo-Tcherkask:

1 voyage	+	15^m	30^s,40
2 »	+	15	29,72
Moyenne	+	15	30,06

La détermination de M. Lemm, gagnée par l'addition des différences en longitude déterminées entre Kharkov et Voronèje, Voronèje et Sarepta, Sarepta et Novo-Tcherkask donna la même quantité (voyez pag. 250) = + 15^m 29^s,80. Par conséquent la valeur trouvée par M. Lemm tombe entre les deux résultats de M. Schidlovsky et ne s'écarte que de 0^s,26 de leur moyenne. En donnant à chacune des déterminations de M. Schidlovsky et à celle de M. Lemm un poids égal, nous trouvons en moyenne l'église de St. Nicolas à Novo-Tcherkask à l'Est de l'observatoire temporaire de Kharkov, de 15^m 29^s,97.

Cet accord surpasse toute attente, surtout si l'on considère la complication des opérations exécutées par M. Lemm pour la déduction de la différence en longitude entre Kharkov et Novo-Tcherkask. C'est la meilleure preuve de la valeur intrinséque de tout son travail, et qui doit exciter la pleine confiance dans tous les résultats de ses voyages. En même temps cet accord nous prouve, dans ce cas spécial, que l'erreur probable donnée plus haut = 0^s,37 (pag. 31) surpasse de beaucoup l'erreur réelle de 0^s,17, ce qui nous fait supposer qu'aussi pour les autres points nous n'avons pas estimé trop haut l'exactitude des résultats.

L'accord qui existe, par rapport aux longitudes, entre le travail de M. Lemm et celui du général Vrontchenko m'a paru encore plus surprenant. En comptant de l'Observatoire de Poulkova, nous avons les longitudes suivantes

	d'après M. Lemm	d'après M. Vrontchenko	Diff. L—V
de Novo-Khopersk...	0^h 45^m 15^s,52	0^h 45^m 14^s,89	+0^s,63
de Borissoglebsk	46 57,65	46 57,58	+0,07

Les déterminations du général Vrontchenko ont pour points de sortie les villes de Moscou et d'Orel, dont les longitudes, à compter de Poulkova, ont été fixées par les expéditions chronométriques exécutées sous ma direction en 1845 et 1846. M. Lemm au contraire, comme il a déjà été dit, est parti de ma détermination de l'observatoire temporaire de Kharkov. Il



s'en suit que les déterminations de MM. Vrontchenko et Lemm sont entièrement indépendantes l'une de l'autre. Leur accord excitera certainement dans tous ceux qui sachent apprécier les travaux de ce genre, une admiration sincère de l'habilité de nos deux voyageurs. En même temps ceux à qui ces travaux doivent leur origine, et qui les ont honoré de leur protection, éprouveront une grande satisfaction de ce que le but proposé a été complètement atteint.

Addition.

Je saisis cette occasion pour communiquer au monde savant aussi les positions géographiques déterminées la même année (1847) par le major-général de Vrontchenko, dans les gouvernements Orel, Tambov, Voronèje, Riasan et Vladimir. Ce travail fut exécuté aux dépens de la Société Impériale Géographique, par la coopération de cette Société et de l'Observatoire central. Il avait pour but de fournir un grand nombre de positions bien déterminées qui devaient servir de points d'appui à la confection des atlas des dits gouvernements. En 1847, l'exécution de ces atlas n'était que projetée. Depuis, par suite de la réussite des voyages de M. de Vrontchenko et de M. Lemm, ce travail se trouve déjà en progrès rapide par le concours actif de l'État-Major Impérial et du Département de l'arpentage, réunis dans ce but par ordre spécial de Sa Majesté Impériale.

M. de Vrontchenko, un des fondateurs de la Société Impériale Géographique se chargea, avec le zèle que nous lui connaissons, de l'exécution des déterminations astronomiques, et certainement le conseil de la Société Géographique ne pouvait confier ce travail à des mains plus habiles. C'est pourquoi la coopération de l'Observatoire central pouvait se limiter à fournir les instruments au voyageur, à dresser le plan du voyage conjointement avec M. de Vrontchenko, enfin à déduire les résultats définitifs du voyage, surtout pour les longitudes.

Étant muni d'un bon théodolithe, du même dont je m'étais servi dans les expéditions chronométriques de 1842 et 1846, et de 8 chronomètres choisis, M. de Vrontchenko commença ses opérations à Moscou, le 5 juillet 1847, en se servant partout des mêmes principes d'observation que M. Lemm. Les longitudes de Moscou et d'Orel étant données par les expéditions chronométriques de 1845 et 1846, le voyageur détermina d'abord, par un voyage rapide entre ces deux villes, les longitudes de Riasan, Koslov, Tambov et Lipezk, avec une exactitude suffisante à élever ces quatre villes au rang de points principaux. Depuis, ces quatre points devaient également servir à l'interpolation chronométrique des autres longitudes à déterminer. Les longitudes suivantes des lieux d'observation dans les dites quatre villes, fournies par les différents chronomètres, donneront une idée de leur exactitude, en tant qu'elle dépend du transport du temps.

A l'Est de Moscou

Chronomètre	Riasan	Koslov	Tambov	Lipezk
Dent 1941	8ᵐ 41ˢ,02	11ᵐ 47ˢ,65	15ᵐ 33ˢ,55	8ᵐ 7ˢ,79
» 1828	40,30	47,21	33,37	7,77
» 1818	41,28	47,61	33,42	8,19
» 1956	40,84	47,01	33,35	7,68
» 2001	40,27	46,21	31,74	7,04
» 2022	40,41	47,13	33,08	7,14
Hauth 31	40,39	46,39	32,75	6,84
Kessels 1297	40,69	47,66	33,78	7,83
Moyenne	8 40,65	11 47,11	15 33,13	8 7,53
Err. prob.	0,088	0,134	0,144	0,111

Les longitudes de Riasan et de Lipezk ont été déterminées aussi dans mon voyage de 1842. Mais, par suite de la durée plus prolongée du transport du temps et de la qualité inférieure de quelques chronomètres, les erreurs probables ont été trouvées beaucoup plus fortes dans ces déterminations antérieures. Par cette raison il nous a paru inutile de les consulter maintenant dans la déduction définitive des longitudes.

Le voyage de M. de Vrontchenko s'étend depuis le 5 juillet jusqu'au 22 octobre et embrasse ainsi un intervalle de 109 jours. Dans cet intervalle le voyageur a déterminé les positions de 70 lieux, ayant fait, dans ce but, des observations astronomiques en 89 différents jours. Il s'en suit que le voyage de M. de Vrontchenko, quoiqu'exécuté en général dans des latitudes plus septentrionales, n'a pas été moins favorisé par le beau temps, que celui de M. Lemm. Sous un autre rapport il a été même plus favorisé, nommément par la température qui, pendant les trois mois de juillet, d'août et de septembre, est restée tellement constante, dans l'intérieur de la boîte qui contenait les chronomètres, qu'à peine, dans le journal de M. de Vrontchenko, nous rencontrons quelques jours isolés, où la température moyenne de la journée ait différé de 3° de la température moyenne des trois mois de + 17°,7 R. Au commencement du mois d'octobre la température s'abaissait tout d'un coup, de sorte que la température moyenne de ce mois n'était que de + 9°,8 R., et que, pendant quelques heures, elle tombait même au dessous du point de congélation. Il est clair que l'accord des longitudes déterminées, au mois d'octobre, dans le gouvernement de Vladimir a dû souffrir un peu par l'effet thermométrique; mais la qualité supérieure des chronomètres se prononce déjà par le fait que, malgré les changements assez rapides de la température, dans le cas le plus défavorable, l'accord des longitudes fournies par les différents chronomètres n'accuse, dans la moyenne, qu'une erreur probable de 0ˢ,33.

On pourrait encore croire que les marches de tous les chronomètres aient été affectées par les températures à peu près de la même quantité et dans le même sens, et qu'ainsi les longitudes, quoiqu'en apparence d'un accord admirable, fussent sujettes à des erreurs communes

considérables. Mais les expériences faites à Poulkova sur le degré de compensation des chronomètres employés par M. de Vrontchenko, s'opposent directement à cette conclusion, en nous donnant:

pour Dent	1941	le coefficient	de	compensation	+ 0,0035
» »	1828	»	»	»	— 0,0027
» »	1818	»	»	»	+ 0,0020
» »	1956	»	»	»	— 0,0012
» »	2001	»	»	»	— 0,0007
» »	2022	»	»	»	+ 0,0213
» Hauth	31	»	»	»	+ 0,0146
» Kessels	1297	»	»	»	— 0,0108
				Moyenne	+ 0,0032

Ici les coefficients de compensation se rapportent de nouveau au changement de 13ˢ74 produit dans la marche journalière de notre chronomètre sans compensation, Arnold et Dent 951, par un changement d'un degré de Réaumur dans la température moyenne du jour. Il s'en suit que chaque degré de température a changé la marche moyenne des chronomètres employés par M. de Vrontchenko, de 0ˢ044 par jour. Pour le point le moins favorablement déterminé dans tout le voyage, celui que nous avons déjà cité plus haut, la température de la première partie du voyage qui a donné cette longitude, différait seulement de 1°5 de la température moyenne du voyage entier. La durée totale de ce voyage ayant été de 12 jours, il en résulte au maximum, une correction thermométrique de 0ˢ40, quantité qui est du même ordre que l'erreur probable déduite de l'accord des longitudes fournies par les différents chronomètres. Dans tous les autres cas, les corrections thermométriques peuvent être regardées comme entièrement évanouissantes.

Le théodolithe employé par M. de Vrontchenko, avait fourni des résultats très satisfaisants pendant mon voyage de l'année précédente, à ce qu'on peut voir dans mon rapport sur ce voyage. En 1847, au contraire, les observations de M. de Vrontchenko indiquent une variabilité de l'instrument, dont la nature est restée inconnue. Probablement elle doit son origine aux secousses plus fortes auxquelles l'instrument était exposé par le transport dans le tarantasse. Les latitudes (N), déduites des observations de l'étoile polaire, diffèrent toujours dans un sens constant des latitudes (S), fournies par les étoiles au Sud du zénith; mais la quantité de ces différences, accusées également par les déterminations du temps, est quelquefois plus forte qu'il ne fallait l'attendre, et il paraît impossible de les expliquer uniquement par l'effet de la flexion. Par cette raison les erreurs probables des positions données dans la table suivante doivent être supposées plus fortes que celles des positions fournies par le voyage de M. Lemm, au moins pour les latitudes. En moyenne, je crois, l'erreur probable des latitudes doit être estimée de 2″ à 3″, et celle des longitudes de 0ˢ3 à 0ˢ4. Pour la dernière coordonnée, l'erreur probable serait donc à peu près égale à celle que nous avons déduite en moyenne pour les dé-

terminations dans le pays des Cosaques du Don. C'est que, dans ce cas, la qualité supérieure des chronomètres employés par M. de Vrontchenko et les conditions thermométriques plus favorables de ses voyages, ont contrebalancé l'incertitude introduite dans les déterminations par la variabilité indiquée du théodolithe.

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich	Gouvern.
1. **Riasan** (Рязань), cathédrale	54°38′ 4″,2	$0^h37^m40^s,64$	$2^h39^m59^s,31$	Riasan
2. **Koslov** (Козловъ), cathédrale	52 53 17,5	40 45,22	42 3,89	Tambov
3. **Tambov** (Тамбовъ), cathédrale	52 43 33,3	44 31,85	45 50,52	»
4. **Lipezk** (Липецкъ), cathédrale	52 36 40,2	37 5,63	38 24,30	»
5. **Orel** (Орелъ), cathédrale	52 58 26,9	22 57,81	24 16,48	Orel
6. **Kromi** (Кромы), cathédrale	52 41 21,9	21 46,89	23 5,56	»
7. **Dmitrovsk** (Дмитровскъ), cathédrale .	52 30 20,8	19 15,68	20 34,35	»
8. **Sevsk** (Сѣвскъ), cathédrale.........	52 9 26,0	16 40,56	17 59,23	»
9. **Troubtchevsk** (Трубчевскъ), cathédrale	52 34 32,8	13 45,69	15 4,36	»
10. **Outi** (Уты), village, égl. de St. Nicolas	52 51 46,9	14 33,86	15 52,53	»
11. **Briansk** (Брянскъ), égl. de l'Assomption	53 14 18,0	16 9,50	17 28,17	»
12. **Karatchev** (Карачевъ), cathédrale ...	53 6 59,2	18 37,21	19 55,88	»
13. **Somovo** (Сомово), vill., égl. de St. Nicolas	52 51 46,0	18 27,79	19 46,46	»
14. **Bolkhov** (Болховъ), égl. de l'Assomption	53 26 47,0	22 43,53	24 2,20	»
15. **Mzensk** (Мценскъ), église de l'Exaltation de la Ste. Croix	53 16 34,8	24 57,89	26 16,56	»
16. **Malo-Arkhanguelsk** (Мало-Архангельскъ), cathédrale	52 23 59,1	24 43,48	26 2,15	»
17. **Livni** (Ливны), cathédrale	52 25 21,4	29 6,88	30 25,55	»
18. **Borki** (Борки), village, église	52 9 12,0	31 8,18	32 26,85	»
19. **Sadonsk** (Задонскъ), cathédrale	52 23 11,2	34 21,98	35 40,65	Voronèje
20. **Jeletz** (Елецъ), égl. de l'Assomption ..	52 37 14,7	32 40,78	33 59,45	Orel
21. **Lebedian** (Лебедянь), cathédrale	53 0 36,8	35 12,46	36 31,13	Tambov
22. **Donkov** (Донковъ), cathédrale	53 14 38,5	35 15,65	36 34,32	Riasan
23. **Ousman** (Усмань), cathédrale.......	52 2 37,2	37 38,39	38 57,06	Tambov
24. **Nijnaia Matrenka** (Нижняя Матренка), égl. de l'Épiphanie	52 15 49,6	39 7,58	40 26,25	»
25. **Schtchoutchie** (Щучье), village, égl. de St. Dmitri	51 45 49,1	40 39,98	41 58,65	Voronèje
26. **Verkhotoida** (Верхотойда), village, égl. de St. Nicolas..................	51 25 26,4	39 56,19	41 14,86	»
27. **Arkhanguelskoje** (Архангельское), village, égl. de St. Michel	51 26 37,8	42 22,25	43 40,92	Tambov

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich	Gouvern.
28. Novokhopersk (Новохоперскъ), cathédrale	51° 5′ 57″,7	0h 45m 14s,89	2h 46m 33s,56	Voronèje
29. Borissoglebsk (Борисоглѣбскъ), cathédrale	51 21 56,2	46 57,58	48 16,25	Tambov
30. Bournak (Бурнакъ), village, église de Notre Dame	51 52 1,7	44 35,17	45 53,84	»
31. Ouvarovo (Уварово), village, égl. Rojestvenskaja	51 59 31,8	47 46,06	49 4,73	»
32. Ponsar (Понзарь), village, église de la Protection de Notre Dame	52 14 28,2	45 29,88	46 48,55	»
33. Lavrovo (Лаврово), village, église de Notre Dame	52 20 6,4	42 26,97	43 45,64	»
34. Rojestvenskoje (Рожественское), village, église	52 46 2,9	47 26,08	48 44,75	»
35. Kirsanov (Кирсановъ), cathédrale	52 39 7,6	49 35,11	50 53,78	»
36. Roudovka (Рудовка), village, égl. de la Protection de Notre Dame	53 6 2,6	48 12,77	49 31,44	»
37. Sademka (Садемка), village, église de Notre Dame	53 38 11,5	49 7,45	50 26,12	»
38. Spask (Спаскъ), cathédrale	53 55 26,1	51 26,73	52 45,40	»
39. Aturevo (Атюрево), village, égl. de St. Nicolas	54 19 14,1	52 2,74	53 21,41	»
40. Temnikov (Темниковъ), cathédrale	54 37 46,9	51 29,97	52 48,64	»
41. Sarovskaja Poustine (Саровская Пустынь), clocher sur la porte du Couvent	54 55 34,3	52 0,12	53 18,79	»
42. Schiromasovo (Широмасово), village, égl. de la Protection de Notre Dame	54 42 16,7	48 51,82	50 10,49	»
43. Islejevo (Исдеево), village, égl. de Notre Dame	54 26 45,1	46 33,92	47 52,59	»
44. Bokovoi Maidan (Боковой Майданъ), village, église	54 10 3,3	48 40,87	49 59,56	»
45. Schatzk (Шацкъ), égl. de Notre Dame de Kazan	54 1 25,7	45 31,53	46 50,20	»
46. Morschansk (Моршанскъ), cathédrale	53 26 27,9	46 0,00	47 18,67	»
47. Staroje-Jourievo (Старое-Юрьево), égl. de St. Nicolas	53 19 31,9	41 29,31	42 47,98	»
48. Oranienbourg (Ораніенбургъ), cathédrale	53 14 12,9	38 35,17	39 53,84	Riasan

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	Longitude à l'Est de Greenwich	Gouvern.
49. Riajsk (Ряжскъ), égl. de la Ste. Trinité	53°42′32,″6	0h38m56,s63	2h40m15,s30	Riasan
50. Sapojok (Сапожокъ), cathédrale.....	53 56 32,1	41 25,65	42 44,32	»
51. Skopin (Скопинъ), cathédrale.......	53 49 23,8	36 51,10	38 9,77	»
52. Pronsk (Пронскъ), cathédrale	54 6 52,7	37 8,88	38 27,55	»
53. Mikhailov (Михайловъ), égl. de la Ste. Trinité........................	54 13 54,5	34 48,05	36 6,72	»
54. Saraisk (Зарайскъ), église de la Ste. Trinité	54 45 30,8	34 12,27	35 30,94	»
55. Spask (Спаскъ), cathédrale	54 23 59,0	40 12,14	41 30,81	»
56. Ijevskoje (Ижевское), village, égl. de Notre Dame	54 33 14,2	42 10,36	43 29,03	»
57. Kasimov (Касимовъ), égl. de l'Assomption	54 56 8,5	44 14,42	45 33,09	»
58. Ielatma (Елатма), égl. de la Ste. Trinité	54 57 48,6	45 41,10	46 59,77	Tambov
59. Touma (Тума), village, égl. de St. Nicolas	55 9 1,9	40 53,10	42 11,77	Riasan
60. Serednikovo (Середниково), village, église.........................	55 15 18,2	37 23,42	38 42,09	»
61. Iegorievsk (Егорьевскъ), cathédrale .	55 22 54,2	34 50,11	36 8,78	»
62. Vlassovskoje (Власовское), village, égl.	55 39 44,6	37 41,40	39 0,07	Vladimir
63. Oungdal (Унгдалъ), village, église ..	56 0 26,2	38 24,77	39 43,44	»
64. Vladimir (Владиміръ), cathédrale ...	56 7 41,5	40 20,25	41 38,92	»
65. Soudogda (Судогда), cathédrale.....	55 57 2,8	42 10,95	43 29,62	»
66. Gouss (Гусь), fabrique, église.......	55 36 46,2	41 24,73	42 43,40	»
67. Melenki (Меленки), église.........	55 20 15,4	45 15,23	46 33,90	»
68. Mourom (Муромъ), égl. de St. Jean..	55 34 47,9	46 56,23	48 14,90	»
69. Siablitzki Pogost (Заблицкій Погостъ), égl. de la Ste. Trinité.......	55 52 21,7	50 10,54	51 29,21	»
70. Gorokhovetz (Гороховецъ), cathédrale	56 12 21,9	49 25,93	50 44,60	»
71. Viasniki (Вязники), égl. du Couvent de l'Annonciation..................	56 15 0,5	47 15,58	48 34,25	»



MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DE LA PERCUSSION,

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(LU LE 26 MAI 1854.)

1. Nous allons rappeler d'abord les équations générales du mouvement que nous avons données dans le mémoire sur les déplacements instantanés *).

Concevons un système de points matériels, ou d'éléments d'un corps, liés entre eux d'une manière qui doit être définie, et désignons en les masses respectivement par m, m', m'', m''',..... Le mode des liaisons entre ces masses constitue la définition analytique du système, il revient, comme on le sait, à la connaissance des déplacements que le système pourrait recevoir à chaque instant. Il s'agit d'acquérir cette connaissance d'après la nature du système, c'est-à-dire d'après la nature des liaisons qui gènent le mouvement des points m, m', m'', m''',.... Or les liaisons dont il s'agit consisteront toujours en ce que, pendant que le système se déplace, certaines quantités L, L_1, L_2, L_3,...., qui naturellement exprimeront quelques propriétés du système dépendantes de sa position, ne changeront point, ou ne sauraient point diminuer, ou bien encore ne pourront pas augmenter. Comme, par exemple, les fils flexibles et inextensibles qui réuniraient les points du système.

La présence d'une surface qu'un point serait obligé de décrire, reviendrait à l'invariabilité d'une fonction des coordonnées, fonction qui est celle de la surface **), ou à l'impossibilité qu'elle puisse diminuer, selon que le point serait assujetti à demeurer sur la surface, ou seulement à y être contigu.

Il est facile de voir que, pour obtenir les déplacements possibles du système, nous n'avons qu'à exprimer algébriquement les propriétés tout-à-l'heure mentionnées des quantités L, L_1, L_2, L_3... Pour cela, imaginons un système de droites infiniment petites $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,... et du reste tout-à-fait arbitraires, tant en grandeur qu'en direction, pour nous représenter tous les déplacements, que nous pourrons, mentalement et respectivement, attribuer aux masses m, m', m'', m''',... à chaque instant. Ces droites auront donc pour origines les masses mêmes m, m', m'', m''',... et pour extrémités les points où celles-ci se trouveraient après le déplacement, si elles pouvaient en effet recevoir celui qu'on leur attribue seulement par la pensée. Pour se rapporter à

*) Mémoires de l'Académie Impériale, tome III, page 565.

**) Par fonction d'une surface nous entendons cette fonction des coordonnées qui étant égalée à zéro fournirait l'équation de la surface.

chaque instant, les quantités $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$ contiendront, d'une manière arbitraire, le temps, que nous désignerons par t, et que nous compterons à partir d'une origine prise convenablement, ou arbitrairement.

Cela posé, considérez le système à la fin d'un temps quelconque t, pour que ce que vous en direz puisse s'appliquer à chaque instant; admettez mentalement que, pendant l'instant dt qui suit le temps t, le système se déplace de manière que ses points m, m', m'', m''',.... parcourent respectivement les espaces $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... dont on vient de parler, et cherchez les changements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,... que les quantités L, L_1 L_2, L_3,.. éprouvent par les déplacements dont il s'agit. Cependant ne perdez pas de vue que ces déplacements ne sont nullement réels, car $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,... représentent tout ce que vous pouvez concevoir, pour le mouvement instantané du système, et par conséquent, non seulement les mouvements possibles, c'est-à-dire ceux que les liaisons ou les obstacles qui gènent le système laissent libres, mais aussi ceux qui sont impossibles à cause de ces mêmes liaisons ou obstacles. Il n'y pas d'autre limitation pour $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon$,... que leur grandeur infiniment petite, afin qu'elles puissent répondre à un élément du temps.

Il n'y a point de méthode générale pour trouver les changements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3....; chaque cas particulier exigeant un procédé qui lui soit propre, mais qui ne demandera que des considérations géométriques le plus souvent fort simples.

2. Supposons, par exemple, qu'à la fin du temps t, le point m se trouve en contact avec une surface impénétrable, et peut s'en détacher, dans cette partie de l'espace où la fonction de la surface est positive. Il s'agit de trouver les déplacements que cette circonstance laisse libres. Appelons μ le point appartenant à la surface correspondante au mobile m, et désignons par $d\mu$ le déplacement effectif de μ pendant l'instant dt. $\Delta\varepsilon$ représentant toujours un déplacement quelconque de m, soit $\Delta\xi$ la droite réunissant les extrémités de $d\mu$ et de $\Delta\varepsilon$; cette droite $\Delta\xi$ doit se trouver tout entière en dehors de la surface impénétrable, ou sur cette même surface, quand $\Delta\varepsilon$ sera un déplacement possible; il s'en suit que la projection de $\Delta\xi$ sur la normale à la surface, à la fin du temps $t+dt$ et au point où se trouve μ à cette même époque, doit être positive ou zéro, or cette projection étant représentée par la différence

$$\Delta\varepsilon \cos\theta - d\mu \cos\alpha,$$

les lettres θ et α désignant les angles que $\Delta\varepsilon$ et $d\mu$ font avec la normale à la surface au point μ, et sans doute à la fin de $t+dt$; nous aurons

$$\Delta\varepsilon \cos\theta - d\mu \cos\alpha > 0,$$

sans en exclure l'égalité, toutes les fois que $\Delta\varepsilon$ représentera un déplacement possible. Nous verrons bientôt qu'on pourra négliger les infiniment petits du second ordre dans l'inégalité

$$\Delta\varepsilon \cos\theta - d\mu \cos\alpha > 0$$

et par suite, on pourra admettre que θ et α sont les angles que $\Delta\varepsilon$ et $d\mu$ font avec la normale au point μ, non à la fin du temps $t+dt$, mais à la fin du temps t. Présentée de cette manière,



l'inégalité dont il s'agit, n'excluant point l'égalité, exprimera la condition des déplacements possibles relatifs à la surface impénétrable, car elle sera nécessairement satisfaite par toute valeur de Δs que cette surface n'empêche pas, et sans doute ne le sera pas par les $\Delta\varepsilon$ purement idéales, c'est-à-dire par ceux que l'impénétrabilité de la surface rend impossibles. Pour ce qui regarde $d\mu$. $\cos\alpha$, cette projection sera donnée dans chaque cas particulier, car la manière dont se déplace et varie la surface impénétrable doit être connue. Supposons, par exemple, qu'on en connaît l'équation

$$f(x, y, z, t) = 0$$

en coordonnées rectangles. Les lettres x, y, z représentant les coordonnées de μ, et par conséquent celles de m, à la fin du temps t; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, en négligeant les infiniment petits du second ordre, seront les coordonnées de μ à la fin du temps $t+dt$, et comme nous avons

$$0 = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dt}dt$$

en divisant par le radical

$$\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}$$

pris positivement, nous en tirerons sur le champ

$$d\mu \cos\alpha + \frac{\frac{df}{dt}dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} = 0$$

et par suite, la condition pour que $\Delta\varepsilon$ soit possible, deviendra

$$\Delta\varepsilon \cos\theta + \frac{\frac{df}{dt}dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} > 0$$

sans en exclure l'égalité.

Au reste, si la surface est donnée par son équation entre les coordonnées rectangles et le temps, la condition des déplacements possibles de m qui s'y rapportent se trouvera encore plus simplement ainsi qu'il suit. Désignons par $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées de m après le déplacement $\Delta\varepsilon$, nous aurons sur le champ

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+dt) > 0$$

sans en exclure l'égalité, car le point m peut ne pas se détacher de la surface, or en négligeant les infiniment petits du second ordre et à cause de $f=0$, vous avez

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+dt) = \frac{dt}{dx}\Delta x + \frac{dt}{dy}\Delta y + \frac{dt}{dz}\Delta z + \frac{df}{dt}dt$$

donc

$$\frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y + \frac{df}{dz}\Delta z + \frac{df}{dt}dt > 0$$

ou bien, en divisant par le radical

$$\sqrt{\frac{df^2}{dx^2}+\frac{df^2}{dy^2}+\frac{df^2}{dz^2}}$$

pris positivement,

$$\Delta\varepsilon\cos\theta+\frac{\frac{df}{dt}\,dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2}+\frac{df^2}{dy^2}+\frac{df^2}{dz^2}}}>0$$

3. Ayant trouvé les accroissements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... rappelez vous les propriétés des quantités L, L_1, L_2, L_3,.... par lesquelles les déplacements possibles du système sont définis; vous égalerez à zéro les accroissements de celles des quantités dont il s'agit qui ne peuvent point varier, vous ferez plus grands que zéro les changements des quantités qui ne peuvent pas diminuer, mais vous n'en excluerez pas et l'égalité à zéro, car les quantités auxquelles ces changements répondent, ne variant point dans cette hypothèse, sans doute ne diminueront pas. Enfin, vous ferez plus petits que zéro les accroissements des quantités qui ne sauraient augmenter, sans en exclure aussi l'égalité à zéro.

C'est de cette manière que vous aurez les conditions des déplacements possibles; supposons, par exemple, qu'elles soient

$$\Delta L>0,\ \ \Delta L_1,>0,\ \ \Delta L_2<0,\ \ \Delta L_3=0.....$$

Remarquez d'abord que les déplacements $\Delta\varepsilon, \Delta\varepsilon', \Delta\varepsilon'', \Delta\varepsilon'''$,..., qui entrent dans $\Delta L, \Delta L_1, \Delta L_2$....., ne satisfont point aux conditions ci-dessus, ils sont arbitraires, comme il a été dit; mais si vous leur attribuez certaines valeurs particulières, vous saurez si ces valeurs sont possibles ou non pour le système, selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas aux conditions dont il s'agit.

Remarquez ensuite que la condition telle que

$$\Delta L_2<0,$$

sans en exclure l'égalité, est complètement remplacée par celle-ci

$$-\Delta L_2>0.$$

Eu égard à cette remarque, nous pouvons supposer, et nous le supposerons pour plus d'uniformité, que dans les inégalités qui définissent les déplacements possibles, et qui n'excluent jamais les égalités, le sommet du signe $>$ sera toujours tourné vers zéro.

Mais la remarque la plus importante se rapporte au mode de composition des accroissements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3..., qui contiendront sans doute les infiniment petits des différents ordres. En désignant par n l'ordre d'une des quantités L, L_1, L_2, L_3,.... le changement correspondant renfermera les termes des ordres $n+1$, $n+2$, $n+3$,...., que nous désignerons respectivement par $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$,... en sorte que la valeur du changement en question sera

$$(n+1)+(n+2)+(n+3)+.....$$

Or cette valeur devant être zéro ou positive, il est nécessaire que son premier terme $(n+1)$ soit zéro ou positif en même temps que toute la série; car s'il ne l'était pas, les autres termes, infiniment plus petits que lui, ne pourraient ni annuller la série, ni la faire changer de signe, qui sera toujours celui de son premier terme. Il en résulte que dans le calcul des accroissements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... on peut n'avoir égard qu'à la première puissance des déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$ $\Delta\varepsilon'''$,.... et qu'il est permis de rejeter tous les termes où ces déplacements auraient deux, ou un plus grand nombre de dimensions, ce qui fera devenir les accroissements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,...... fonctions linéaires de $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$...; on les trouvera donc par les procédés ordinaires du calcul des variations, et ils auront la forme

$$a\Delta\varepsilon \cos\psi + a'\Delta\varepsilon' \cos\psi' + a''\Delta\varepsilon'' \cos\psi'' + a'''\Delta\varepsilon''' \cos\psi''' +..... + T\,dt,$$

ou seront susceptibles de la recevoir. Les lettres a, a', a'' a''',...., T désignent des quantités données, ou dépendantes d'une manière donnée de la position du système, c'est-à-dire des coordonnées des masses m, m', m'', m''',... et du temps t. Les lettres ψ, ψ', ψ'', ψ''',..... représentent les angles que les déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,..... font avec certaines directions, qu'il est impossible de nommer quand on parle généralement, mais dans les cas particuliers, elles peuvent être celles des droites qui réunissent les points du système, ou celles des normales aux surfaces impénétrables auxquelles se trouveraient contigus quelques uns de ces mêmes points, ou celles des droites fixes comme les axes coordonnés, ou enfin d'autres directions que l'on connaîtra dans chaque cas particulier, et que généralement nous désignerons par D, D', D'', D''',....; en sorte que ψ'', par exemple, sera l'angle compris entre $\Delta\varepsilon''$ et une direction D'', dont nous ne pouvons pas définir la nature.

Les variations ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,... ayant la forme qu'on vient de citer, nous supposerons que les déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... seront possibles quand ils satisferont aux inégalités

$$(1) \qquad \Delta L > 0,\ \Delta L_1 > 0,\ \Delta L_2 > 0,\ \Delta L_3 > 0,......$$

dont quelques unes, ou même toutes, peuvent être des équations, et dont aucune n'exclut l'égalité; et si les conditions dont il s'agit ne sont pas remplies, le système ne pourra point recevoir le déplacement correspondant $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,....

4. A partir de chaque position de m, depuis le commencement du mouvement, imaginons $\Delta\varepsilon$ correspondant, arbitraire sans doute, mais cependant satisfaisant à la condition de la continuité, sans laquelle les considérations semblables à celle que nous exposons seraient impossibles. Les extrémités de tous les $\Delta\varepsilon$ formeront une courbe infiniment proche de la trajectoire de m, et du reste arbitraire. Imaginez un point μ, purement fictif, qui parcoure cette courbe, quand m se meut dans sa trajectoire, et qui se trouve à la fin du temps $t+dt$ à l'extrémité de celui des déplacements $\Delta\varepsilon$ dont l'origine est au point m à la fin de t. De cette manière, $\Delta\varepsilon$ sera la ligne $m\mu$ qui réunit la position du point m à l'instant t avec la position de μ à l'instant $t+dt$. Remarquez qu'une quantité quelconque Q, l'espace parcouru, la vitesse, les coordonnées etc., re-

latives au point m, deviendra $Q+\Delta Q$ à l'extrémité de $\Delta\varepsilon$ ou au point μ, ΔQ représente une variation où l'on doit faire varier, non seulement la manière dont Q dépend du temps, mais aussi le temps lui même. Il convient d'introduire au lieu de $\Delta\varepsilon$ la distance entre les positions des points m et μ considérés tous les deux à la fin du temps t, distance que nous désignerons par $\delta\varepsilon$. L'origine de cette ligne infiniment petite est censée le point m, comme celle de $\Delta\varepsilon$. Une quantité quelconque, désignée tout-à-l'heure par Q, deviendra $Q+\delta Q$ à l'extrémité de $\delta\varepsilon$, δQ désignant une variation, où l'on ne fera changer que la dépendance entre Q et t, sans faire varier t le moins du monde.

Il est clair que $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ est la distance qui sépare les points m et μ à la fin du temps $t+dt$. Si donc on désigne par s l'arc de la trajectoire de m, décrit dans le temps t, afin que ds soit l'espace effectivement parcouru par ce point pendant l'instant dt qui suit le temps t, on verra immédiatement que $\Delta\varepsilon$ est le troisième côté du triangle dont les deux autres côtés sont ds et $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$. Ainsi, en désignant par ψ, α et θ les angles que font $\Delta\varepsilon$, ds et $\delta\varepsilon$ avec une même direction D, nous aurons

$$\Delta\varepsilon \cos\psi = ds \cos\alpha + (\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon) \cos(\theta + d_1\theta).$$

Nous mettons $\theta + d_1\theta$, et non $\theta + d\theta$, parce que la direction D, sur laquelle nous projetons les droites $\Delta\varepsilon$, ds et $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$, peut être variable: pour lors $\theta+d\theta$ représenterait l'angle compris entre $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ et la direction D à la fin du temps $t+dt$, or nous devons employer l'angle que $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ fait avec D à la fin du temps t. En d'autres termes, l'angle θ varie parce que les directions de $\delta\varepsilon$ et D varient toutes les deux, mais dans la comparaison des projections que nous faisons, nous devons avoir égard seulement au changement de la première des deux directions, en sorte que $\theta+d_1\theta$ désigne l'angle entre $\delta\varepsilon$ à la fin du temps $t+dt$ et D à la fin du temps t. Or

$$(\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon)\cos(\theta+d_1\theta) = \delta\varepsilon\cos\theta + d_1(\delta\varepsilon\cos\theta),$$

nous mettons $d_1(\delta\varepsilon\cos\theta)$ pour désigner une différentielle incomplète de $\delta\varepsilon\cos\theta$, il est facile de voir, d'après ce qu'on vient de dire, ce qui lui manque pour être complète, mais il n'est pas nécessaire qu'elle le soit, pour que $d_1(\delta\varepsilon\cos\theta)$ représente une quantité infiniment petite du second ordre, donc en rejetant les quantités de cet ordre, nous aurons

$$\Delta\varepsilon\cos\psi = ds\cos\alpha + \delta\varepsilon\cos\theta.$$

Il est visible que ce qui a été dit sur les déplacements de m s'appliquera mot-à-mot aux déplacements de tous les autres points du système, ainsi les extrémités des $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... formeront des courbes respectivement très proches aux trajectoires de m', m'', m''',.... Si donc nous désignons par s', $\delta\varepsilon'$, s'', $\delta\varepsilon''$, s''', $\delta\varepsilon'''$,.... pour m', m'', m''',.... les quantités respectivement analogues à celles qui ont été désignées par s et δs pour m, nous aurons

$$\Delta\varepsilon' \cos\psi' = ds' \cos\alpha' + \delta\varepsilon' \cos\theta'$$
$$\Delta\varepsilon'' \cos\psi'' = ds'' \cos\alpha'' + \delta\varepsilon'' \cos\theta''$$
$$\Delta\varepsilon''' \cos\psi''' = ds''' \cos\alpha''' + \delta\varepsilon''' \cos\theta'''$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

les lettres ψ', α', θ'; ψ'', α'', θ''; ψ''', α''' θ''',..... représentent respectivement les angles que $\Delta\varepsilon'$, ds', $\delta\varepsilon'$ font avec une direction D'; $\Delta\varepsilon''$, ds'', $\delta\varepsilon''$ font avec une direction D''; $\Delta\varepsilon'''$, ds'', $\delta s'''$ font avec une direction D''', ainsi de suite.

Substituons les valeurs précédentes de $\Delta\varepsilon \cos\psi$, $\Delta\varepsilon' \cos\psi'$, $\Delta\varepsilon'' \cos\psi''$, $\Delta\varepsilon''' \cos\psi'''$ dans les variations ΔL, ΔL_1, ΔL_2,... ou bien dans

$$a\Delta\varepsilon \cos\psi + a'\Delta\varepsilon' \cos\psi' + a''\Delta\varepsilon'' \cos\psi'' + a'''\Delta\varepsilon''' \cos\psi''' + \ldots. + T\,dt$$

qui est une de ces variations, supposons par exemple la première, nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta\alpha = \; & ads \cos\alpha + a'ds' \cos\alpha' + a''ds'' \cos\alpha'' + a'''ds''' \cos\alpha''' + \ldots. + T\,dt \\ & + a\delta\varepsilon \cos\theta + a'\delta\varepsilon' \cos\theta' + a''\delta\varepsilon'' \cos\theta'' + a'''\delta\varepsilon''' \cos\theta''' + \ldots.\end{aligned}$$

ou bien, en faisant pour abréger, ce qui du reste est convenable

$$\begin{aligned} ads \cos\alpha + a'ds' \cos\alpha' + a''ds'' \cos\alpha'' + a'''ds''' \cos\alpha''' + \ldots. + Tdt &= dL \\ a\delta\varepsilon \cos\theta + a'\delta\varepsilon' \cos\theta' + a''\delta\varepsilon'' \cos\theta'' + a'''\delta\varepsilon''' \cos\theta''' + \ldots. &= \delta L\end{aligned}$$

il viendra

$$\Delta L = dL + \delta L.$$

On aura semblablement:

$$\Delta L_1 = dL_1 + \delta L$$
$$\Delta L^2 = dL_2 + \delta L_2$$
$$\Delta L_3 = dL_3 + \delta L_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Il est facile de savoir ce que sont les quantités dL_1, δL_1, dL_2, δL_2, dL_3, δL_3... car les accroissements ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... ayant une composition entièrement analogue à celle de ΔL, savoir:

$$\Delta L_1 = a_1\Delta\varepsilon \cos\psi_1 + a_1'\Delta\varepsilon' \cos\psi_1' + a_1''\,\Delta\varepsilon'' \cos\psi_1'' + a_1'''\,\Delta\varepsilon''' \cos\psi_1''' + \ldots. + T_1dt$$
$$\Delta L_2 = a_2\Delta\varepsilon \cos\psi_2 + a_2'\Delta\varepsilon' \cos\psi_2' + a_2''\,\Delta\varepsilon'' \cos\psi_2'' + a_2'''\,\Delta\varepsilon''' \cos\psi_2''' + \ldots. + T_1dt$$
$$\Delta L_3 = a_3\Delta\varepsilon \cos\psi_3 + a_3'\Delta\varepsilon' \cos\psi_3' + a_3''\,\Delta\varepsilon'' \cos\psi_3'' + a_3'''\,\Delta\varepsilon''' \cos\psi_3''' + \ldots.. \quad T_3dt$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

où a_1, a_1', a_1'', a_1''', ... T_1, a_2, a_2', a_2'', a_2''', ... T_2, a_3, a_3', a_3'', a_3''', ... T_3 etc. sont fonctions des coordonnées de m, m', m'', m''', ... données dans chaque cas particulier, et ψ_1, ψ_1', ψ_1'', ψ_1''',..... ψ_2, ψ_2', ψ_2'', ψ_2''',.... ψ_3, ψ_3', ψ_3'', ψ_3''',.... etc., sont les angles que les déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... font avec certaines directions qu'il est impossible de pré-

ciser, et que nous désignerons par $D_1, D_1', D_1'', D_1''', \ldots\ D_2, D_2', D_2'', D_2''', \ldots\ D_3, D_3', D_3'', D_3''', \ldots$ en sorte que ψ_2''', par exemple, représentera l'angle compris entre $\Delta s'''$ et la direction D_2'''. Cela posé, nous aurons

$$dL_1 = a_1\, ds \cos\alpha_1 + a_1'\, ds' \cos\alpha_1' + a_1''\, ds'' \cos\alpha_1'' + \alpha_1'''\, ds''' \cos\alpha_1''' + \ldots + T_1 dt$$
$$dL_2 = a_2\, ds \cos\alpha_2 + a_2'\, ds' \cos\alpha_2' + a_2''\, ds'' \cos\alpha_2'' + \alpha_2'''\, ds''' \cos\alpha_2''' + \ldots + T_2 dt$$
$$dL_3 = a_3\, ds \cos\alpha_3 + a_3'\, ds' \cos\alpha_3' + a_3''\, ds'' \cos\alpha_3'' + \alpha_3'''\, ds''' \cos\alpha_3''' + \ldots + T_3 dt$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta L_1 = a_1\, \delta\varepsilon \cos\theta_1 + a_1'\, \delta\varepsilon' \cos\theta_1' + a_1''\, \delta\varepsilon'' \cos\theta_1'' + a_1'''\, \delta\varepsilon''' \cos\theta_1''' + \ldots$$
$$\delta L_2 = a_2\, \delta\varepsilon \cos\theta_2 + a_2'\, \delta\varepsilon' \cos\theta_2' + a_2''\, \delta\varepsilon'' \cos\theta_2'' + a_2'''\, \delta\varepsilon''' \cos\theta_2''' + \ldots$$
$$\delta L_3 = a_3\, \delta\varepsilon \cos\theta_3 + a_3'\, \delta\varepsilon' \cos\theta_3' + a_3''\, \delta\varepsilon'' \cos\theta_3'' + a_3'''\, \delta\varepsilon''' \cos\theta_3''' + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est facile de voir quels sont les angles que représentent les lettres α et θ, accentuées et numérotées.

5. Considérons une des différentielles dL, dL_1, dL_2, dL_3, ... par exemple, la première; ce que nous en dirons s'appliquera aux autres. Il est clair que la différentielle dL est une valeur particulière de la variation ΔL, savoir celle que la dernière reçoit pour le déplacement effectif du système qui, sans doute, est un des déplacements possibles. Or dans le cas où la possibilité des déplacements exigerait que la quantité L ne variât point, savoir qu'on eût $\Delta L = 0$ pour les déplacements possibles, on aura nécessairement $dL = 0$. Et quand l'exigence des déplacements possibles consisterait seulement en ce que L ne puisse diminuer, ou que L ait une valeur minimum, on aurait encore $dL = 0$ comme condition du minimum, ou plutôt comme condition que L ne varie pas actuellement, car si cette quantité variait, et sans doute en augmentant puisque dL ne saurait devenir negative, elle cesserait d'être minimum.

Nous croyons devoir cependant entrer dans quelques détails relativement à ce dernier cas.

La quantite L étant un minimum, ou plutôt ne pouvant diminuer, il est nécessaire, pour que cette circonstance fasse une liaison ou un obstacle, que le système soit sollicité au déplacement pour lequel L diminuerait, sans quoi la propriété du système par laquelle L ne saurait diminuer, n'en gènerait point le mouvement, et l'on pourrait se dispenser d'y avoir égard. Ainsi les efforts extérieurs empêcheront la différentielle dL d'acquérir une valeur positive, et comme elle ne peut être négative par la nature du système, il s'en suit qu'elle se réduira à zéro; et il en sera de même pour les autres différentielles dL_1, dL_2, dL_3,.... Ainsi nous aurons

$$(2) \qquad dL = 0,\ dL_1 = 0,\ dL_2 = 0,\ dL_3 = 0,\ \ldots\ldots$$

Il se pourrait cependant que dL eut une valeur positive, ce qui arriverait si les efforts extérieurs cherchaient à augmenter la quantité L, mais dans ce cas on rejettera la propriété du système exprimée par

$$L = \text{minimum},$$

comme si elle n'avait pas lieu, et par suite on n'aura point égard à la condition $dL > 0$, tant qu'elle sera remplie sans doute; ainsi les équations (2), qu'on vient d'écrire, auront lieu en rejetant tout ce qui est superflu.

Eu égard aux équations (2) les variations ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... se réduiront respectivement à δL, δL_1, δL_2, δL_3,.... et par suite les conditions (1) des déplacements possibles deviendront

$$(3) \qquad \delta L > 0,\ \delta L_1 > 0,\ \delta L_2 > 0,\ \delta L_3 > 0,......$$

quelques unes de ces inégalités, ou même toutes, peuvent être des équations et aucune n'exclut l'égalité. Les déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,.... qui entrent dans leurs premiers membres sont arbitraires; ils ne sont donc pas assujettis à satisfaire aux inégalités dont il s'agit; celles-ci ne servent qu'à distinguer les déplacements possibles de ceux qui ne le sont pas.

On peut trouver les variations δL, δL_1, δL_2, δL_3,... directement, c'est-à-dire sans passer par ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... Pour cela il n'y aura qu'à considérer le système dans deux positions : dans celle qu'il a en effet à la fin du temps t, et dans la position qu'il aurait après que ses points eussent parcouru, respectivement, les espaces $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,... Les deux positions répondent à un même instant, la fin de t, ensorte que, dans le passage de la première à l'autre, le temps ne varie point. Cherchez les valeurs L', L_1', L_2', L_3',.... de L, L_1, L_2, L_3,... relatives à la seconde position, en ne tenant compte que des premières puissances des déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,..., et vous aurez

$$\delta L = L' - L,\ \delta L_1 = L_1' - L_1,\ \delta L_2 = L_2' - L_2,\ \delta L_3 = L_3' - L_3, \text{ etc.}$$

La détermination des variations δL, δL_1, δL_2, $\delta_3 L$,.... peut être souvent simplifiée par la décomposition des déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,... auxquels ces variations répondent. En effet, décomposons les déplacements dont il s'agit, chacun en un nombre quelconque k d'autres déplacements, satisfaisant aux conditions ordinaires dans cette sorte de décompositions : savoir que $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... soient, chacun, le dernier côté du polygone dont les déplacements composants, qui lui correspondent forment, les autres côtés. Désignons ces derniers déplacements par

$$\begin{array}{ll} \delta\varepsilon_1,\ \delta\varepsilon_2,\ \delta\varepsilon_3,\ ....\ \delta\varepsilon_k & \text{pour la masse } m \\ \delta\varepsilon_1',\ \delta\varepsilon_2',\ \delta\varepsilon_3',\ ....\ \delta\varepsilon_k' & \text{pour la masse } m' \\ \delta\varepsilon_1'',\ \delta\varepsilon_2'',\ \delta\varepsilon_3'',\ ....\ \delta\varepsilon_k'' & \text{pour la masse } m'' \\ \delta\varepsilon_1''',\ \delta\varepsilon_2'''\ \delta\varepsilon_3''',\ ....\ \delta\varepsilon_k''' & \text{pour la masse } m''' \\ & \text{etc.} \end{array}$$

En ne tenant compte que des premières puissances de ces déplacements, cherchez les changements $\delta_1 L$, $\delta_1 L_1$, $\delta_1 L_2$, $\delta_1 L_3$... de L, L_1, L_2, L_3,.... correspondants aux déplacements $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_1'$, $\delta\varepsilon_1''$, $\delta\varepsilon_1'''$... puis cherchez les changements $\delta_2 L$, $\delta_2 L_1$, $\delta_2 L_2$, $\delta_2 L_3$,... des mêmes quantités L, L_1, L_2, L_3.... correspondants aux déplacements $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_2'$, $\delta\varepsilon_2''$, $\delta\varepsilon_2''$,.... cherchez ensuite les changements $\delta_3 L$, $\delta_3 L_1$, $\delta_3 L_2$, $\delta_3 L_3$,.... relatifs aux déplacements $\delta\varepsilon_3$, $\delta\varepsilon_3'$, $\delta\varepsilon_3''$, $\delta\varepsilon_3'''$,.... et con-



tinuez de la même manière jusqu'à ce que vous ayez trouvé les variations $\delta_k L, \delta_k L_1, \delta_k L_2, \delta_k L_3, \ldots$ qui répondent aux déplacements $\delta\varepsilon_k$, $\delta\varepsilon_k'$, $\delta\varepsilon_k''$, $\delta\varepsilon_k'''$,.... Vous aurez ensuite

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta_1 L + \delta_2 L + \delta_3 L + \ldots + \delta_k L \\ \delta L_1 &= \delta_1 L_1 + \delta_2 L_1 + \delta_3 L_1 + \ldots + \delta_k L_1 \\ \delta L_2 &= \delta_1 L_2 + \delta_2 L_2 + \delta_3 L_2 + \ldots + \delta_k L_2 \end{aligned}$$
etc.

C'est le dernier degré de simplicité dans ce qu'on peut dire en général de la recherche des conditions des déplacements possibles.

6. Supposons, par exemple, qu'il s'agit de trouver la variation que souffre un élément du volume d'un corps, par le déplacement infiniment petit de ce corps; problème que Lagrange avait à résoudre en traitant de l'équilibre des fluides incompressibles *). Ce qui nous paraît le plus simple pour cet objet, serait l'emploi de la transformation des coordonnées dans les intégrales triples qui se rapportent à la question, mais nous voulons suivre le procédé de Lagrange.

Rapportons les corps aux axes rectangles des coordonnées x, y, z, qui par leur variabilité apartiendront à tous les points du corps; en désignant par $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coordonnées d'un point infiniment proche du point (x, y, z), nous pouvons prendre $dxdydz$ pour un élément du volume dont il s'agit de trouver la variation. Supposons que le déplacement du corps consiste en ce que les points qui répondaient aux coordonnées x, y, z, se trouvent avoir acquis les coordonnées $x+\delta x, y, z$. Ces dernières seront celles d'un angle de quadrilatère qui, avant le déplacement, était rectangle $dxdy$ et qui répondait à l'ordonnée z. Les trois autres angles du quadrilatère, après le déplacement, auront pour coordonnées

$$x + \delta x + dx + \frac{d\delta x}{dx} dx, y, z;$$

$$x + \delta x + \frac{d\delta x}{dy} dy, y + dy, z;$$

$$x + \delta x + dx + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy, y + dy, z;$$

d'où l'on voit que les quatre angles de la figure sont compris dans un plan parallèle à celui des xy, et comme de plus les côtés opposés ne se rencontrent pas et sont égaux entre eux, savoir deux égaux à dy, et deux autres à $\delta x + \frac{d\delta x}{dx} dx$, on en conclura que le quadrilatère est un parallélogramme. On s'assurera de même que les autres rectangles, faces du parallélépipède $dxdydz$, resteront des parallélogrammes après le déplacement; donc le parallélépipède $dxdydz$ lui-même restera parallélépipède; et comme les coordonnées des extrémités des arêtes de ce dernier, arêtes ayant le point $(x+\delta x, y, z)$ pour origine commune, répondent aux coordonnées $x+\delta x+dx+\frac{d\delta x}{dx}, y, z$; $x+\delta x+\frac{d\delta x}{dy} dy, y+dy, z$; $x+\delta x+\frac{d\delta x}{dz} dz, y, z+dz$,

*) Mécanique Analytique, tome I, page 189 et les suivantes.

on trouvera sur le champ que $\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)dxdydz$ est le volume du nouveau parallélépipède; en retranchant celui du premier, savoir $dxdy\delta z$, on aura

$$\frac{d\delta x}{dx}\,dxdydz$$

pour changement du volume de $dxdydz$ dû au déplacement supposé.

Sans faire de nouveaux calculs, on conclura par l'analogie que si les coordonnées x, y, z devenaient par le déplacement x, $y+\delta y$, z, ou x, y, $z+\delta z$, les changements correspondants du volume seraient $\frac{d\delta y}{dy}\,dxdydz$ et $\frac{d\delta z}{dz}\,dxdydz$. En réunissant les trois variations partielles $\frac{d\delta x}{dx}\,dxdydz$, $\frac{d\delta y}{dy}\,dxdydz$, $\frac{d\delta z}{dz}\,dxdydz$, on aura la variation totale

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)dxdydz$$

qui répondra au déplacement arbitraire du corps, par lequel les coordonnées x, y, z deviendraient simultanément $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$.

7. Si l'on pouvait trouver les différentielles dL, dL_1, dL_2, dL_3, etc. la considération des variations désignées par Δ serait superflue; or pour avoir les différentielles dont il s'agit, il n'y a qu'à calculer ce que deviennent les quantités L, L_1, L_2, L_3, ... censées se rapporter au temps t, à la fin du temps $t+dt$; on ne retiendra dans ce calcul que la première puissance de l'élément dt, on en négligera les carrés et les puissances supérieures. Les différences entre les valeurs de L, L_1, L_2, L_3, ... calculées, comme on vient de le dire, pour l'instant $t+dt$, et leurs valeurs pour l'instant t donneront les valeurs respectives des différentielles dL, dL_1, dL_2, dL_3, ...

Ainsi les variations δ, comme les différentielles d, résultent de la comparaison respective et mutuelle des quantités $L, L_1, L_2, L_3,...$, calculées pour deux positions du système: l'une de ces positions est celle du système à la fin du temps t, elle est commune aux deux caractéristiques; l'autre position, pour les variations, répond au même temps t, mais en admettant que les points du système se trouvent sur les courbes différentes de celles qu'ils décrivent en effet; tandis que la seconde position, pour les différentielles, est celle que le système aura en effet à la fin du temps $t+dt$. Le temps varie donc de la première à la seconde position dont la différence fournit les différentielles, et il ne change point pour les variations δ. Quant aux changements Δ, on doit y faire varier et le temps et les courbes décrites, or il arrive que les Δ sont représentés par la somme des d et des δ, ce qui est entièrement conforme à la nature du calcul des variations, par laquelle les accroissements dus aux changements simultanés des variables et de leur dépendance, sont représentés par la somme des accroissements partiels, savoir de ceux qui viennent uniquement du changement des variables et de ceux qui résultent uniquement du changement de la dépendance entre ces mêmes variables.

Comme vous pouvez sans doute attribuer aux variations $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,... les valeurs et les directions particulières à volonté, supposez les respectivement égalées aux différentielles ds, ds', ds'', ds''',.... cette hypothèse vous fournira, par exemple,

$$\delta L = dL - Tdt$$

Or comme dL est zéro, vous aurez, en faisant coïncider, en grandeur et direction, $\delta\varepsilon, \delta\varepsilon', \delta\varepsilon'', \delta\varepsilon'''$... respectivement avec ds, ds', ds'', ds''',....

$$(4) \qquad \delta L = -Tdt,\ \delta L_1 = -T_1dt,\ \delta L_2 = -T_2dt,\ \delta L_3 = -T_3dt, \ldots\ldots$$

résultat qu'il convient de retenir.

Nous terminerons cet article en reproduisant une remarque que nous avons faite depuis longtemps *), elle se rapporte à une méprise échappée à l'auteur de la Mécanique Analytique.

Supposez que par la nature du système, ou des obstacles extérieurs, une quantité L doit demeurer invariable, vous aurez

$$\delta L = 0$$

pour les déplacements possibles; supposez qu'une seconde quantité L_1 fournissant aussi une liaison pour les points du système, renferme la quantité L, avec d'autres variables. Vous aurez

$$\delta L_1 = \delta K + \lambda\delta L$$

δK représente la partie de δL_1 où l'on n'a pas fait varier L, et $\lambda\delta L$ représente l'autre partie due au changement de L. Lagrange supprime cette derniere $\lambda\delta L$, par la raison que δL est zéro. Le grand géomètre perd de vue que, l'équation générale de la mécanique contient les variations δL et δL_1, dans l'hypothèse que les déplacements $\delta\varepsilon, \delta\varepsilon', \delta\varepsilon'', \delta\varepsilon'''$,... qui y entrent sont tout-à-fait arbitraires et non pas seulement possibles, donc δL n'y est pas zéro, et par suite on doit nécessairement conserver le terme $\lambda\delta L$. Vouloir le supprimer, autant ne pas faire usage de la condition $\delta L = 0$ des déplacements possibles.

Ajoutons qu'en faisant disparaître sous le signe intégral la combinaison caractéristique $d\delta$, à l'aide de l'intégration par parties, Lagrange supprime les termes que cette opération fait sortir hors de l'intégrale, quand ces termes se réduiraient à zéro pour les déplacements possibles; méprise tout-à-fait du même genre que celle qu'on vient d'indiquer. Les termes dont il s'agit ne sont pas nuls, puisque ils se rapportent aux déplacements tout-à-fait arbitraires qu'il n'est pas permis de confondre avec les déplacements possibles. En les supprimant, on se prive du moyen de déterminer les efforts que supportent les obstacles dont la présence fournit les conditions par lesquelles les termes en question disparaîtraient, si l'on ne considérait que les déplacements possibles, et par suite, la solution du problème serait incomplète.

8. Nous empruntons l'équation générale du mouvement à notre mémoire sur les déplacements instantanés cité au commencement de celui-ci **).

En désignant par v, v', v'', v''',....... et par $P, P' P'' P'''$,.... les vitesses respectives des masses m, m', m'', m''',.... à la fin du temps t, et les forces motrices qui animent ces mêmes

*) Mémoires de l'Académie Impériale, tome II, Bulletin Scientifique, page 1ère. Note sur l'équilibre d'un fil élastique. Lue le 16 mai 1832.

**) Mémoires de l'Académie Impériale, tome III, page 591, l'équation (18). Il y faut rétablir les facteurs $\delta s, \delta s', \delta s'', \delta s'''$,... que l'imprimeur supprima par erreur, et qui représentent ce que nous désignons, dans le mémoire actuel, par $\delta\varepsilon, \delta\varepsilon', \delta\varepsilon'', \delta\varepsilon'''$,....



masses à la même époque; et en supposant que les déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,.... font respectivement avec les vitesses les angles $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$,... et avec les forces les angles $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$,... l'équation dont il s'agit sera

$$(5) \quad 0 = \Sigma\left(P\cos\varphi\,\delta\varepsilon - m\frac{d_1 v\cos\omega}{dt}\delta\varepsilon\right) + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots.$$

La caractéristique d_1 marque une différentiation incomplète, par laquelle en différentiant relativement au temps l'angle ω, pour avoir $d_1\omega$, il ne faut point y faire varier la direction de $\delta\varepsilon$, mais seulement celle de v; le signe Σ s'étend à toutes les masses du système, pour indiquer la somme de toutes les quantités analogues à celles qui se trouvent sous ce même signe, cette somme est le moment des forces perdues. Les facteurs λ, λ_1, λ_2, λ_3,.... sont des inconnues qu'on pourra toujours regarder comme ayant des valeurs positives.

Les $\delta\varepsilon$ de l'équation précédente sont tout-à-fait arbitraires, en sorte que cette équation ne peut avoir lieu à moins que les coefficients des $\delta\varepsilon$, chacun en particulier, ne soit zéro.

L'équation (5) sert de base et à la théorie générale du mouvement, et à celle de la percussion; nous allons lui donner une autre forme, dans laquelle, ne perdant rien en facilité pour en déduire la dernière, on trouvera plus de commodité dans les applications de la première. Nous regardons la transformation que nous voulons exposer comme un supplément au mémoire sur les déplacements instantanés.

Remplaçons le terme $\frac{d_1 v\cos\omega}{dt}\delta\varepsilon$ de l'équation (5) par la différence

$$\frac{d_1(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\cos\omega\frac{d\delta\varepsilon}{dt}.$$

Nous savons que pour avoir $d_1\omega$, on ne doit faire varier dans ω que la direction de v, nullement celle de $\delta\varepsilon$; désignons par $d_2\omega$ la différentielle de ω uniquement relative à la variation de cette dernière direction, point de celle de v, nous aurons évidemment $d\omega = d_1\omega + d_2\omega$, d'où $d_1\omega = d\omega - d_2\omega$ ce qui, nous donnera

$$\frac{d_1(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} = \frac{d(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\delta\varepsilon\frac{d_2\cos\omega}{dt}$$

et par suite

$$\frac{d_1(v\cos\omega)}{dt}\delta\varepsilon = \frac{d(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\left(\cos\omega\frac{d\delta\varepsilon}{dt} + \delta\varepsilon\frac{d_2\cos\omega}{dt}\right)$$

ou bien

$$\frac{d_1(v\cos\omega)}{dt}\delta\varepsilon = \frac{d(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\frac{d_2\,\delta\varepsilon\cos\omega}{dt}.$$

La différentielle d_2 est incomplète, en ce que dans $d_2\omega$ on ne doit faire varier que la direction de $\delta\varepsilon$, point celle de v.

Revenons aux considérations exposées au commencement de l'art. 4. La vitesse de m, c'est-à-dire du point où commence $\delta\varepsilon$, étant v, $v+\delta v$ sera la vitesse du point final de $\delta\varepsilon$, donc ce point, pendant que m parcourra l'espace ds ou vdt, décrira la droite $(v+\delta v)\,dt$, et comme à la fin du temps $t+dt$ il se trouvera à la distance $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$ de m, il s'en suivra que

quatre droites infiniment petites vdt, $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon$ et $(v + \delta v)\,dt$ formeront quatre côtés d'un quadrilatère; et par conséquent, la somme des projections, sur une direction quelconque, des deux premiers côtés sera égale à la somme des projections sur la même direction, des deux autres côtés. En prenant pour ligne des projections la direction de v et en désignant par ϖ l'angle entre v et $v + \delta v$, nous aurons

$$vdt + (\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\omega + d_2\omega) = \delta\varepsilon\cos\omega + (v + \delta v)\cos\varpi\,dt$$

d'où, à cause de

$$(\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\omega + d_2\omega) = \delta\varepsilon\cos\omega + d_2(\delta\varepsilon\cos\omega),$$
$$d_2(\delta\varepsilon\cos\omega) = (v + \delta v)\cos\varpi\,dt - vdt.$$

Cette formule nous montre que l'angle ϖ doit être infiniment petit *); au reste, il est facile de s'en assurer, donc en remplaçant cos ω par l'unité, on trouvera

$$d_2(\delta\varepsilon\cos\omega) = \delta v dt$$

ou bien

$$\frac{d_2(\delta\varepsilon\cos\omega)}{dt} = \delta v.$$

Mais peut-être l'idée, que l'angle ϖ est infiniment petit, ne se laisse pas saisir immédiatement: nous allons l'éclaircir. Par l'extrémité de $\delta\varepsilon$ menez une droite de même direction que v et égale à vdt; puis, achevez le quadrilatère. Cette figure ayant deux côtés parallèles, égaux chacun à vdt et se trouvant d'un même côté de $\delta\varepsilon$, sera parallélogramme; partant le quatrième côté, que vous venez de mener pour achever la figure, sera parallèle et égal à $\delta\varepsilon$. Or ce quatrième côté et $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$, si vous réunissez leurs extrémités, formeront un triangle dont le troisième côté, celui par lequel vous avez réuni les extrémités des deux autres, sera infiniment petit du second ordre, parce que $\delta\varepsilon$ variant d'une manière continue en grandeur et en direction, l'angle compris entre cette ligne et $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$ sera infiniment petit. Mais ce troisième côté infiniment petit du second ordre est en même temps le troisième côté d'un autre triangle, ayant $(v + \delta v)\,dt$ et vdt pour ses deux autres côtés; le dernier étant celui que vous avez mené par l'extrémité de $\delta\varepsilon$ dans la direction de la vitesse v. L'angle ϖ étant compris entre ces deux côtés, qui sont infiniment petits du premier ordre, et étant opposé au côté infiniment petit du second ordre, sera nécessairemeint infiniment petit.

Remplaçant $\frac{d_2\,\delta\varepsilon\cos\omega}{dt}$ par δv, nous aurons

$$\frac{d_1.(v,\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} = \frac{d\,(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dz} - v\delta v,$$

par suite l'équation (5) deviendra

---

*) Parce que le terme multiplié par dt doit s'en aller, comme incomparable avec la combinaison caractéristique $d\delta$.

$$(6) \quad \frac{d\,\Sigma mv \cos\omega\,\delta\varepsilon}{dt} = \delta\,\frac{\Sigma mv^2}{2} + \Sigma P \cos\varphi\,\delta\varepsilon + \lambda\,\delta L + \lambda_1\,\delta L_1 + \lambda_2\,\delta L + \lambda_3\,\delta L_1 + \ldots$$

Cette équation est susceptible d'un énoncé fort simple, mais il faut d'abord examiner la signification de l'expression

$$\lambda\,dL + \lambda_1\,\delta L_1 + \lambda_2\,\delta L_2 + \lambda_3\,\delta L_3 + \ldots,$$

qui s'y trouve contenue.

En mettant pour les δL leurs valeurs $a \cos\theta\,\delta\varepsilon + a' \cos\theta'\delta\varepsilon' + \ldots$ etc. et nous servant du signe sommatoire Σ, l'expression dont il s'agit deviendra

$$\Sigma\,(\lambda a \cos\theta\,\delta\varepsilon + \lambda_1 a_1 \cos\theta_1\,\delta\varepsilon + \lambda_2 a_2 \cos\theta_2\,\delta\varepsilon + \lambda_3 a_3 \cos\theta_3\,\delta\varepsilon + \ldots\ldots)$$

elle est donc de même forme que le terme $\Sigma P \cos\varphi\,\delta\varepsilon$ de l'équation (6) dû aux puissances motrices, et par conséquent, elle peut être attribuée aux forces, fictives sans doute, mais dont les valeurs et les directions s'aperçoivent facilement. Celles qu'on doit supposer pour cet objet comme agissant au point m, ont

$$\lambda a,\ \lambda_1 a_1,\ \lambda_2 a_2,\ \lambda_3 a_3, \ldots$$

pour valeurs et coïncident respectivement avec D, D_1, D_2, D_3,... en directions. Des forces semblables doivent être censées appliquées aux autres points du système, et leur ensemble fournirait dans l'équation du mouvement le même terme que celui qui se trouve introduit dans l'équation (6) par la présence réelle des liaisons et des obstacles qui gènent le déplacement du système. Ainsi le mouvement des masses m, m', m'', m''',... que nous considérons est donné par la même équation que si ces masses étaient absolument libres, c'est-à-dire sans aucune liaison mutuelle, ou obstacle extérieur qui en gènât le déplacement, pourvu qu'outre les forces respectives P, P', P'', P''',.... elles soient encore sollicitées par les puissances que nous venons d'indiquer. Par cette raison, ces dernières s'appellent forces qui remplacent les liaisons du système, ou simplément, forces de liaison ; la somme

$$\Sigma\,(\lambda a \cos\theta\,\delta\varepsilon + \lambda_1 a_1 \cos\theta_1\,\delta\varepsilon + \lambda_2 a_2 \cos\theta_2\,\delta\varepsilon + \ldots),$$

ou celle-ci

$$\lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots\ldots$$

en représente le moment.

Cela posé, l'équation (6) s'énoncera comme il suit :

La variation de la force vive, plus le moment des forces motrices, plus celui des forces de liaison font une dérivée, relative au temps, du moment de la quantité du mouvement du système.

On peut abréger cet énoncé : il suffit de dire :

La variation de la force vive, plus le moment des forces motrices, plus celui des forces de liaison font une dérivée exacte relative au temps.

Il est superflu d'ajouter à quelle quantité se rapporte cette dérivée ; car dès qu'on regarde la somme qu'on vient de nommer comme une dérivée exacte, cette dernière, c'est-à-dire

la dérivée, se rapportera nécessairement au moment de la quantité du mouvement du système. Nous supprimons la démonstration de cette proposition; on y suppléera facilement, car elle n'est que la reproduction, en sens inverse, de la transformation qui nous a conduit de l'équation (5) à l'équation (6).

Avant d'aborder la question principale de notre mémoire, nous indiquerons encore, comment l'énoncé qui précède conduira, dans chaque cas, aux équations du mouvement, je ne dirai pas les plus simples, mais à celles qu'on voudra employer. La simplicité et la commodité des équations dépendent d'un choix convenable des coordonnées, qu'on prendra pour fixer la position du système à chaque instant; il est impossible de dire rien de général sur cet objet, car à chaque cas particulier répondront les coordonnées qui lui seront les plus propres, mais qui généralement ne se prêteront pas commodément à d'autres cas. La question inverse, c'est-à-dire : après avoir choisi les coordonnées, rechercher les cas qu'elles résolvent avec facilité, présente bien moins de difficultés. Nous aurons en vue cet objet pour le traiter dans l'occasion.

Désignons par ξ, η, ζ,.... les coordonnées que nous voudrons employer, les jugeant les plus propres au système que nous considérons. Introduisons ces coordonnées et dans la somme des moments

$$\Sigma P \cos\varphi\, \delta s + \lambda \delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2\, \delta L_2 + \ldots$$

et dans la force vive $\frac{\Sigma\, mv^2}{2}$, que, pour abréger, nous désignerons par T. Par cette introduction, la somme des moments prendra la forme

$$X\, \delta\xi + Y\, \delta\eta + Z\, \delta\zeta + \ldots\ldots$$

X, Y, Z,.... étant fonctions du temps, des coordonnées ξ, η, ζ,... et renfermant, sous une forme linéaire, les inconnues λ, λ_1, λ_2, λ_3..... en sorte que la formule qui doit être une dérivée exacte, sera

$$\delta T + X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta + \ldots..$$

Or, en désignant pour plus de commodité, par ξ', η', ζ'... les dérivées $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$,... nous aurons

$$\delta T = \frac{dT}{d\xi}\delta\xi + \frac{dT}{d\eta}\delta\eta + \frac{dT}{d\zeta}\delta\zeta + \ldots + \frac{dT}{d\xi'}\delta\xi' + \frac{dT}{d\eta'}\delta\eta' + \frac{dT}{d\zeta'}\delta\zeta' + \ldots$$

ou bien, en faisant pour abréger

$$\frac{dT}{d\xi'} = p,\ \frac{dT}{d\eta'} = q,\ \frac{dT}{d\zeta'} = r,\ldots..,$$

$$\delta T = \frac{dT}{d\xi}\delta\xi + \frac{dT}{\delta\eta}\delta\eta + \frac{dT}{d\zeta}\delta\zeta + \ldots + p\delta\xi' + q\delta\eta' + r\delta\zeta' + \ldots.$$

ou bien encore

$$\delta T = \frac{d}{dt}(p\delta\xi + q\delta\eta + r\delta\zeta + \ldots.) + \left(\frac{dT}{d\xi} - \frac{dp}{dt}\right)\delta\xi + \left(\frac{dT}{d\eta} - \frac{dq}{dt}\right)\delta\eta + \left(\frac{dT}{d\zeta} - \frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta + \ldots.$$



Substituant cette valeur dans l'expression qui doit se réduire à une dérivée exacte par rapport au temps, cette expression deviendra

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\zeta+....)+\left(X+\frac{dT}{d\xi}-\frac{dp}{dt}\right)\delta\xi+\left(Y+\frac{dT}{d\eta}-\frac{dq}{dt}\right)\delta\eta+\left(Z+\frac{dT}{d\zeta}-\frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta+.....$$

et pour qu'elle soit une dérivée exacte, il est nécessaire que l'on ait

$$0=\left(X+\frac{dT}{d\xi}-\frac{dp}{dt}\right)\delta\xi+\left(Y+\frac{dT}{d\eta}-\frac{dq}{dt}\right)\delta\eta+\left(Z+\frac{dT}{d\zeta}-\frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta+.... \quad (A)$$

car alors, et seulement alors, l'expression dont il s'agit se réduisant à

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\zeta+...)$$

sera visiblement la dérivée exacte. Nous aurons donc

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\zeta+...)=\delta T+X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta+.....$$

L'égalité (A) pourrait fournir les équations du mouvement, mais comme elles ne seront pas les plus simples, nous ne nous y arrêterons pas, malgré que cette égalité donne lieu à quelques remarques curieuses.

Remplaçons, dans la dernière équation, la dérivée $\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\zeta+...)$ par l'expression équivalente

$$\delta(p\xi'+q\eta'+r\zeta'+....)+\frac{dp}{dt}\delta\xi+\frac{dq}{dt}\delta\eta+\frac{dr}{dt}\delta\zeta+...-\xi'\delta p-\eta'\delta q-\zeta'\delta r-....,$$

et faisons pour abréger

$$T-p\xi'-q\eta'-r\zeta'-....=\Theta$$

nous aurons

$$\begin{array}{l}\frac{dp}{dt}\delta\xi+\frac{dq}{dt}\delta\eta+\frac{dr}{dt}\delta\zeta+... \\ -\xi'\delta p-\eta'\delta q-\xi'\delta r-...\end{array}=\delta\Theta+X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta+....$$

Chassez de Θ les dérivées ξ', η', ζ',.... à l'aide des équations

$$\frac{dT}{d\xi'}=p,\quad \frac{dT}{d\eta'}=q,\quad \frac{dT}{\delta\zeta'}=r,\ ......$$

et la dernière formule sera l'équation du mouvement sous la forme la plus simple, mais naturellement la plus simple pour les coordonnées que vous avez choisies; elle se décomposera et donnera les équations

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d\Theta}{d\xi}+X$$
$$\frac{dq}{dt}=\frac{d\Theta}{d\eta}+Y$$
$$\frac{dr}{dt}=\frac{d\Theta}{d\zeta}+Z$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{d\Theta}{dp}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{d\Theta}{dq}$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{d\Theta}{dr}$$
. . . .

Remarquez bien que le plus souvent Θ sera égal à la force vive T prise négativement.

La solution de la question relative au mouvement du système reviendra à la résolution des dernières équations et de celles-ci

(2) $$0 = dL,\ \ 0 = dL_1,\ \ 0 = dL_2,\ \ 0 = dL_3, \ldots\ldots$$

9. Supposons qu'à la fin du temps t, des forces motrices, d'une très grande intensité, s'appliquent tout-à-coup au système, mais qu'elles n'agissent que pendant un temps τ extrêmement court; et qu'il arrive, à la même époque, des changements brusques dans les liaisons du système, par la suppression de quelques unes de ces liaisons et par l'établissement d'autres.

Une force motrice d'une très grande intensité et d'une très petite durée porte souvent le nom de force impassive. L'idée d'un pareil effort ne peut présenter rien d'obscur, la dénomination ne change pas la nature de l'objet, et la force impassive est toujours une force motrice ordinaire, c'est-à-dire de ces forces que la mécanique considère, indépendamment de leurs intensités et de la durée de leur action.

Mais nous croyons devoir entrer dans quelques explications sur le changement dans les liaisons du système. Nous présenterons d'abord quelques considérations sur les liaisons d'une nature particulière.

Supposons que parmi les quantités L, L_1, L_2, L_3,... qu'on suppose ne pouvoir pas diminuer, il s'en trouve, et par exemple la première, qui par un effort convenable diminuerait; comme le ferait le volume d'un fluide élastique par la pression. Mais la diminution de L exige nécessairement un effort extérieur, ou pour mieux dire, la quantité L, par sa nature, oppose une résistance à sa diminution, mais une résistance qu'on peut vaincre.

On doit avoir égard à une semblabe circonstance, quoique Lagrange ne l'ait point considérée dans sa Mécanique; elle présente un obstacle au déplacement, non invincible à la vérité, mais toujours un obstacle qu'on ne peut pas négliger. La résistance de la quantité L à la diminition fournira un moment $\lambda\delta L$, à ajouter aux moments d'autres forces, de même que si cette quantité ne pouvait pas du tout diminuer. Mais ce dernier cas, c'est-à-dire l'impossibilité que L diminuât, exige encore, comme nous l'avons vu, l'équation $dL = 0$, laquelle actuellement, que L pourrait diminuer, n'aura pas lieu; elle sera remplacée par l'inégalité

$$dL < 0.$$

Vous aurez de même le moment $\lambda\delta L$ à ajouter aux moments d'autres forces du système, dans le cas où la quantité L ne saurait varier sans effort extérieur, c'est-à-dire ni augmenter ni

diminuer, mais pouvant céder à un effort suffisant. Dans ce cas l'équation $dL = 0$ n'aura pas lieu non plus.

Cela étant, revenons à notre objet. On sait, par la théorie des forces motrices, que la vitesse ne peut jamais éprouver un changement tout-à-fait brusque, c'est-à-dire ne peut jamais passer tout d'un coup, d'une valeur à une autre sensiblement différente de la première. Ce qu'on appelle ordinairement un changement brusque de vitesse, n'est qu'un changement très rapide, ou très considérable, dans un temps extrêmement court, mais jamais la vitesse ne varie sans le temps. Cela tient à ce que les vitesses ne changent que par des forces motrices; or les effets de ces dernières, quelle que soit leur nature, satisfont toujours à la loi de la continuité, quoique elles puissent bien elles mêmes s'affranchir de cette loi.

Cela posé, admettez qu'à la fin du temps t, il s'introduit dans le système une liaison consistant, par exemple, dans l'impossibilité de la diminution d'une quantité L. Au même instant, les forces motrices changeront brusquement, et leur moment recevra l'accroissement instantané $\lambda\delta L$. Mais si les vitesses du système, à la fin de t, ne sont pas précisément de celles qui satisfont à l'équation $dL = 0$, cette équation n'aura pas lieu; vous aurez $dL < 0$. L'hypothèse contraire mènerait à un changement tout-à-fait brusque des vitesses, changement qui est reconnu impossible. Nous devons en conclure, que les liens physiques par lesquels on chercherait à établir tout d'un coup un obstacle absolu à la diminution d'une quantité L, sont impossibles. Cette quantité diminuera donc jusqu'à ce que les vitesses, variant très rapidement, satisfassent à l'équation $dL = 0$. Ce qui se fera au bout d'un temps extrêmement petit, mais dans cet intervalle de temps, quelque petit qu'il soit, les changements de vitesse, très rapides en général, satisferont nécessairement à la loi de la continuité.

Dès que s'établira l'équation $dL = 0$, la quantité L aura atteint sa valeur minimum, et l'effet de la percussion, dû à l'introduction de la liaison $L =$ minimum, aura cessé.

La suppression d'une liaison dans le système peut aussi donner lieu à une percussion quand il y avait de très grands efforts pour violer la liaison dont il s'agit, ce qui arrivera surtout dans le cas des forces impulsives.

Remarquez en passant, que si vous considérez le mouvemement du système à partir des données initiales, il faut que ces données satisfassent aux liaisons du système, autrement, vous aurez une percussion à l'origine du mouvement.

L'équation

$$(6)\ \frac{d\Sigma}{dt}\, mv \cos\omega\delta\varepsilon = \delta\frac{\Sigma mv^2}{2} + \Sigma P \cos\varphi\delta s + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots.$$

s'appliquera à chaque instant du temps τ, supposé très petit, qui suit les changements opérés dans le système, pourvu que, parmi les forces du système, on compte celles qui viennent de s'y appliquer, et parmi les liaisons, celles qui viennent de s'y introduire, et qu'on rejette les liaisons qui ont cessé de gêner le système.

A cause que la valeur du temps τ est extrêmement petite, on peut supposer que les masses $m, m', m'', m''', \ldots$ ne se déplacent qu'insensiblement pendant la durée de ce temps; et

par suite, tout ce qui dépendra de la position du système peut être regardé comme n'ayant pas varié, dans ce même intervalle de temps. Ainsi les déplacements $\delta\epsilon$, $\delta\epsilon'$, $\delta\epsilon''$, $\delta\epsilon'''$,..., les angles qu'ils font avec les directions représentées par les D, munis d'accents et de numéros, les coefficients a contenus dans les différentielles δL, δL_1, δL_2, δL_3,..., ces différentielles elles mêmes peuvent être traités comme invariables de t à $t + \tau$.

Cela posé, considérons la variation

$$\frac{\delta\, \Sigma m v^2}{2} = \Sigma m v \delta v$$

de la force vive. Nous avons vu que

$$\delta v = \frac{d_2\,(\delta\epsilon \cos\omega)}{dt}:$$

où d_2, comme on s'en souvient sans doute, indique une différentielle par laquelle on ne doit faire varier l'angle ω, qu'en tant que varie la direction de $\delta\epsilon$; ainsi, la différentielle $d_2\,(\delta\epsilon \cos\omega)$ ne se rapporte point à la variabilité de v, mais uniquement à celle de $\delta\epsilon$, or le déplacement $\delta\epsilon$ étant sensiblement invariable, nous aurons $d_2\,(\delta\epsilon\,\cos\omega) = 0$, c'est-à-dire $\delta v = 0$, ce qui réduit l'équation (7) à celle-ci

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma m v \cos\omega\delta\epsilon = \Sigma P \cos\varphi\delta\epsilon + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots..$$

Remarquez bien que cette dernière serait entièrement exacte, si les $\delta\epsilon$ ne variaient point avec le temps ni en grandeur ni en direction.

Examinons maintenant ce qui arriverait au système, si à la fin du temps t, ou au commencement de τ, toutes les liaisons et obstacles fussent supprimés, mais que les mêmes forces motrices, précisément les mêmes, continuassent d'agir pendant la durée de τ. Il est clair que la dernière équation s'appliquerait à cette hypothèse pourvu qu'on y supprime le terme

$$\lambda\delta L + \lambda_1\,\delta L_1 + \lambda_2\,\delta L_2 + \lambda_3\,\delta L_3 + \ldots,$$

dépendant de liaisons et d'obstacles qu'on suppose n'avoir plus lieu, et qu'on y représente les vitesses par des lettres différentes de v; mais, pour ce qui régarde la somme $\Sigma P \cos\varphi\,\delta\epsilon$, elle sera commune au système réel et à l'hypothèse que nous examinons.

Ainsi, en désignant par u, u', u'', u''',..... et par σ, σ', σ'', σ''',.... les vitesses qu'auraient respectivement les masses m, m', m'', m''',...., en les supposant absolument libres de toute liaison ou obstacle, mais sollicitées par les forces P, et les angles que ces vitesses feraient respectivement avec les $\delta\epsilon$, nous aurons

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma m u \cos\sigma\,\delta\epsilon = \Sigma P \cos\varphi\,\delta\epsilon.$$

Remplaçant dans l'équation relative au système réel, le terme $\Sigma P \cos\varphi\,\delta\epsilon$ par sa valeur précédente, il viendra

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma m v \cos\omega\,\delta\epsilon = \frac{d}{dt}\,\Sigma m u \cos\sigma + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots..$$

Multipliant par dt, intégrant par rapport au temps depuis sa valeur t jusqu'à $t+\xi$, ξ étant un temps plus petit ou égal à τ, et faisant attention à ce que, à l'origine de ce temps, les vitesses v coïncident respectivement, en grandeur et direction, avec les vitesses u, nous aurons

$$\Sigma mv \cos\omega\,\delta\varepsilon = \Sigma mu \cos\sigma\,\delta\varepsilon + \delta L\int_t^{t+\xi}\lambda dt + \delta L_1\int_t^{t+\xi}\lambda_1 dt + \delta L_2\int_t^{t+\xi}\lambda_2 dt + \ldots.$$

ou bien, en faisant pour abréger

$$\int_t^{t+\xi}\lambda dt = \nu,\ \int_t^{t+\xi}\lambda dt = \nu_1,\ \int_t^{t+\xi}\lambda_2 dt + \nu_2,\ \int_t^{t+\xi}\lambda_3 dt = \nu_3,\ldots\ldots$$

$$(7)\qquad \Sigma mv \cos\omega\,\delta\varepsilon = \Sigma mu \cos\sigma\,\delta\varepsilon + \nu\delta L + \nu_1\delta L_1 + \nu_2\delta L_2 + \nu_3\delta L_3 + \ldots..$$

C'est l'équation générale relative à la théorie de la percussion.

10. Dans la théorie des forces motrices, on suppose connue l'action la plus simple de ces forces, celle qu'elles produiraient, si elles ne variaient point, sur des masses isolées, et l'on en déduit leurs effets dans le cas le plus compliqué, quelle que soit leur nature et celle du système contre lequel elles s'exercent. De même, dans la théorie de la percussion, on doit regarder comme connus et donnés les effets les plus simples des forces impulsives, et chercher à y ramener tous les autres effets, quelles que soient les impulsions et le système qui les reçoit. Or, comme pour les forces motrices ordinaires, rien n'est plus simple pour les impulsions que leurs effets sur des points isolés, c'est donc cet effet que nous supposerons connu dans la théorie de la percussion. Il y a même à remarquer une plus grande simplicité dans cette théorie, relativement à celle des forces motrices; c'est que l'effet des forces motrices qu'on regarde comme le plus simple, est non seulement celui qui en résulterait sur une masse isolée, mais il faut encore admettre que la force même que l'on considère, ne varie point. Or une semblable hypothèse est superflue pour la percussion, n'importe que la force impulsive varie ou non, il suffit que l'on connaisse son effet total sur un point isolé, c'est-à-dire celui qu'elle produirait pendant toute la durée, supposée extrêmement petite, de son action.

Cet effet, appelé percussion, ne consiste qu'en un changement brusque, ou plutôt très rapide de la vitesse; il faut que ce changement, ou bien la vitesse totale, composée de celle qui avait lieu au commencement de l'impulsion et de celle que l'impulsion a fait acquérir, soit connue pour chaque masse du système.

Ainsi dans l'équation (7) nous pouvons considérer comme données les vitesses $u, u', u'', u''', \ldots$; elles sont les résultantes respectives des vitesses initiales qui animent le système immédiatement avant l'impulsion, et des vitesses que les forces impulsives auraient fait acquérir aux masses $m, m', m'', m''', \ldots.$ dans l'hypothèse que celles-ci soient isolées, c'est-à-dire sans liaisons mutuelles ni obstacles. Il s'agit de trouver ce que deviendront les vitesses initiales, par l'effet des mêmes impulsions agissant sur les mêmes masses $m, m', m'', m''', \ldots$, mais en supposant que ces dernières forment un système assujetti à des liaisons quelconques et géné par des obstacles extérieurs. Les vitesses dont il s'agit sont celles que les masses du système auront après la percussion; elles sont représentées par $v, v', v'', v''', \ldots$ dans les équations (2) et (7).

Nous avons déjà vu que parmi les équations (7) il peut y avoir qui ne s'établissent qu'à la fin de la percussion, ou à la fin du temps τ; par cette raison, malgré que l'équation (7) subsiste à chaque instant de τ, il serait impossible de déterminer les vitesses qu'auraient les masses $m, m', m'', m''', \ldots$ avant la fin de la percussion, car quelques unes des équations (2) faisant défaut, nous n'aurons pas assez de données pour fixer les valeurs des vitesses dont il s'agit. Nous ne nous occuperons que des vitesses à la fin de la percussion, c'est-à-dire au moment où seront établies toutes les équations (2), alors en réunissant ces équations à la formule (7), où l'on fera $\xi = \tau$, on aura tout ce qui est nécessaire pour la solution complète de la question.

Si l'on voulait avoir, non les vitesses totales $v, v', v'', v''', \ldots$ composées des vitesses initiales et de celles que la percussion produit, mais seulement ces dernières vitesses, les équations (2) et (7) sont également propres à les fournir. En effet, désignons par β, V et U les vitesses pour la masse m : initiale, qui précède immédiatement la percussion, celle qui est due à la seule percussion, laquelle composée avec β donnerait v et qui est l'objet de la question, et enfin celle qui serait produite par la force impulsive, agissant sur la masse m, en supposant cette dernière libre et isolée; composée avec β elle donnerait la vitesse u.

Les mêmes lettres β, V et U, convenablement accentuées, représenteront les vitesses analogues pour les autres masses $m', m'', m''', \ldots$ du système.

Nous avons, par la composition des vitesses,

$$v \cos\omega = \beta \cos\gamma + V \cos\eta$$
$$u \cos\sigma = \beta \cos\gamma + U \cos\zeta;$$

les lettres γ, η et ζ désignent les angles que les vitesses β, V et U font avec $\delta\varepsilon$; des accents convenablement appliqués rapporteront les mêmes lettres aux vitesses des masses $m', m'', m''', \ldots$ et aux directions de $\delta\varepsilon', \delta\varepsilon'', \delta\varepsilon''', \ldots$

En substituant dans la formule (7) les valeurs précédentes de $v \cos\omega$ et de $u \cos\sigma$, et supprimant les termes qui s'entredétruisent, nous trouverons

$$(8) \qquad \Sigma m V \cos\eta\delta\varepsilon = \Sigma m U \cos\zeta\delta\varepsilon + \nu\delta L + \nu_1\delta L_1 + \nu_2\delta L_2 + \nu_3\delta L_3 + \ldots$$

Il faut aussi remplacer dans les équations (2) les vitesses v par leurs valeurs en β et V. Prenons une de ces équations, la première par exemple, $dL = 0$ ou

$$\Sigma a v \cos\alpha + T = 0$$

la lettre α y désigne l'angle que v fait avec une direction D, et comme

$$v \cos\alpha = V \cos\widehat{DV} + \beta \cos\widehat{D\beta},$$

il en viendra en substituant,

$$0 = \Sigma a V \cos\widehat{DV} + \Sigma a\beta \cos\widehat{D\beta} + T$$

ou bien, en faisant pour abréger

$$\Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T = \Pi,$$
$$0 = \Sigma a V \cos \widetilde{DV} + \Pi$$

Nous nous servons de la notation généralement reçue, par laquelle l'angle que font entre elles deux directions quelconques a et b, est désigné par $\widetilde{ab}$.

Toutes les équations (2), de même que la première, fournissant par les substitutions analogues, des résultats semblables, nous aurons

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma a V \cos \widetilde{DV} + \Pi = 0 \\ \Sigma a_1 V \cos \widetilde{D_1 V} + \Pi_1 = 0 \\ \Sigma a_2 V \cos \widetilde{D_2 V} + \Pi_2 = 0 \\ \Sigma a_3 V \cos \widetilde{D_3 V} + \Pi_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Pour abréger, on a supposé

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T = \Pi \\ \Sigma a_1\beta \cos \widetilde{D_1\beta} + T_1 = \Pi_1 \\ \Sigma a_2\beta \cos \widetilde{D_2\beta} + T_2 = \Pi_2 \\ \Sigma a_3\beta \cos \widetilde{D_3\beta} + T_3 = \Pi_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Il convient maintenant de distinguer deux espèces de liaisons : celles qui avaient lieu avant l'introduction des forces impulsives, ou avant la percussion, et qui subsistent pendant leur action, et celles qui s'établissent à la fin du temps t, c'est-à-dire au moment même où la percussion commence, et qui en sont une des causes. Si par exemple $dL = 0$, ou

$$0 = \Sigma av \cos \alpha + T = \Sigma a V \cos \widetilde{DV} + \Pi$$

se rapportait à une liaison de la première espèce, la quantité Π, savoir

$$\Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T$$

serait zéro ; car les β, étant les vitesses effectives à la fin du temps t, satisferont nécessairement à l'équation

$$0 = \Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T = \Pi,$$

qui est une de celles qui déterminent ces mêmes vitesses. Mais si $dL = 0$ ou

$$0 = \Sigma av \cos \alpha + T = \Sigma a V \cos \widetilde{DV} + \Pi$$

se rapportait à une liaison établie au moment même quand la percussion commence, la quantité Π, ou

$$\Sigma a\beta \cos \widehat{D\beta} + T,$$

ne serait pas zéro.

Ainsi l'on supprimera les quantités Π, comme égales à zéro, dans celles des équations (9) qui se rapportent aux liaisons établies avant la fin du temps t, mais on conservera ces quantités dans les équations qui répondent aux liaisons introduites au commencement, ou pendant la percussion. Nous l'avons déjà dit et nous le répéterons, que ces dernières équations ne s'établissent que vers la fin de la percussion, quand auront cessé les changements brusques des vitesses, changements produits par les liaisons qui donnent naissance à ces mêmes équations.

Les équations (8) et (9) serviront à déterminer les vitesses V dues uniquement à la percussion, c'est-à-dire qu'elles fourniront les variations brusques des vitesses, produites par les forces impulsives et le changement dans les liaisons, sans y comprendre les vitesses β antérieures à la percussion. Ces équations sont tout-à-fait semblables aux formules (7) et (2) qui renferment les vitesses totales v composées de β et de V. Nous ne nous occuperons que de ces dernières formules, et quand on en aura tiré les inconnues v, on en déduira les vitesses V par le simple changement respectif de u et T en U et Π.

11. Chaque vitesse v, pour être déterminée en grandeur et direction, demande qu'on en sache trois projections sur trois directions connues, non parallèles à un même plan; ainsi, il se représente trois inconnues par vitesse; de cette manière, n désignant le nombre des masses $m, m', m'', m''',\ldots$ donc aussi celui des vitesses $v, v', v'', v''',\ldots$, nous avons $3n$ inconnues à trouver. Mais en outre, l'équation (7) renferme d'autres inconnues, savoir les quantités ν; il y en a autant que d'équations (2). Désignant par f le nombre de ces dernières, il se présentera en tout $3n+f$ inconnues. Pour les équations qui les déterminent, nous venons d'en compter f formules (2), puis l'équation (7), renfermant les quantités arbitraires $\delta\varepsilon$, se décomposera en plusieurs équations; il s'agit d'en connaître le nombre.

En égalant entre eux les coefficients des $\delta\varepsilon$ dans les deux membres de l'équation (7), on aura n formules, puisque il y en a autant de $\delta\varepsilon$; or chacune de ces formules se rapportant à une direction absolument arbitraire, à celle de $\delta\varepsilon$ correspondant, fournira une infinité d'équations, quand on prendra successivement différentes directions à volonté pour celles de $\delta\varepsilon$. Mais il est facile de s'assurer, et on le sait d'ailleurs, que si l'on fait coïncider la direction d'un $\delta\varepsilon$, successivement avec trois directions, non parallèles à un même plan, les trois équations qui en résulteront renfermeront toutes celles qu'on obtiendra par toutes les autres hypothèses sur la direction de ce même $\delta\varepsilon$. Ainsi chacune des n formules qu'on obtiendra en égalant entre eux les coefficients des $\delta\varepsilon$ dans l'équation (7), ne fournissant que trois équations distinctes, nous pouvons, au lieu de (7), compter $3n$ équations; en y ajoutant f formules (2), il y aura en tout $3n+f$ équations, c'est-à-dire autant que d'inconnues.

La détermination de ces inconnues est singulièrement facilitée par la forme des équations qui les déterminent. En effet, en égalant entre eux les coefficients des $\delta\varepsilon$, dans les deux mem-



bres de l'équation (7), vous exprimerez immédiatement les projections des vitesses v, sur les directions à volonté par les inconnues ν, chassez ensuite des formules (2) les projections des vitesses, en les y remplaçant par leurs valeurs en ν; et vous obtiendrez f équations qui ne renfermeront que f inconnues ν; la résolution de ces équations vous fournira les ν, puis ayant ces inconnues, vous aurez les projections des vitesses v sur les directions à volonté, donc aussi les vitesses elles mêmes, par la simple substitution des valeurs des ν dans les expressions des projections dont il s'agit. Ainsi, à proprement parler, au lieu des $3n + f$ équations qui renferment $3n + f$ inconnues, nous n'aurons que f équations à f inconnues ν à résoudre.

On obtiendra ces dernières équations encore plus facilement que nous ne venons de le dire, en s'y prenant ainsi qu'il suit.

Ecrivez les équations (2) sous cette forme très commode pour notre objet :

$$(2)\qquad \begin{cases} \Sigma a v \cos \widetilde{Dv} + T = 0 \\ \Sigma a_1 v \cos \widetilde{D_1 v} + T_1 = 0 \\ \Sigma a_2 v \cos \widetilde{D_2 v} + T_2 = 0 \\ \Sigma a_3 v \cos \widetilde{D_3 v} + T_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Puis, attribuez aux $\delta\varepsilon$ des valeurs, successives et simultanées, par lesquelles le premier membre $\Sigma mv \cos \omega\delta\varepsilon$ de la formule (7) coïncidera successivement avec chacune des f sommes Σ contenues dans les équations qu'on vient d'écrire; si, enfin, vous remplacez les Σ ainsi introduits dans la formule (7) par les T pris négativement, vous aurez f équations qui ne renfermeront que les inconnues ν et qu'il s'agissait d'obtenir.

Remarquez bien que dans la formule (7) vous pouvez attribuer aux variations $\delta\varepsilon$ des valeurs finies, car un facteur commun qui les rendrait infiniment petites, s'en irait de lui même de cette formule.

Pour faire coïncider $\Sigma mv \cos \omega\delta\varepsilon$ avec la somme $\Sigma a_k v \cos \widetilde{D_k v}$, où sont comprises toutes celles qu'on a écrites tout-à-l'heure, il n'y a qu'à attribuer aux déplacements $\delta\varepsilon, \delta\varepsilon', \delta\varepsilon'', \delta\varepsilon''',\ldots$ les directions respectives $D_k, D_k', D_k'', D_k''',\ldots$ et supposer que ces déplacements mêmes soient respectivement proportionnels ou même égaux, d'après la remarque qu'on vient de faire, aux quantités

$$\frac{a_k}{m}, \frac{a_k'}{m'}, \frac{a_k''}{m''}, \frac{a_k'''}{m'''}, \ldots$$

Cette hypothèse donne

$$\Sigma mv \cos \omega\delta\varepsilon = \Sigma a_k v \cos \widetilde{D_k v} = - T_k$$

$$\Sigma mu \cos \sigma\delta\varepsilon = \Sigma a_k u \cos \widetilde{D_k u}$$

$$\delta L_i = \frac{a_i a_k}{m} \cos \widetilde{D_i D_k} + \frac{a_i' a_k'}{m'} \cos \widetilde{D_i' D_k'} + \frac{a_i'' a_k''}{m''} \cos \widetilde{D_i'' D_k''} + \frac{a_i''' a_k'''}{m'''} \cos \widetilde{D_i''' D_k'''} + \ldots$$



dans le cas de $i = k$

$$\delta L_k = \frac{a_k^2}{m} + \frac{a_k'^2}{m'} + \frac{a_k''^2}{m''} + \frac{a_k'''^2}{m'''} + \ldots..$$

et l'équation (7), en faisant

$$(11)\quad A_{i,k} = \frac{a_i a_k}{m}\cos \widehat{D_i D_k} + \frac{a_i' a_k'}{m'}\cos \widehat{D_i' D_k'} + \frac{a_i'' a_k''}{m''}\cos \widehat{D_i'' D_k''} + \frac{a_i''' a_k'''}{m'''}\cos \widehat{D_i''' D_k'''} + \ldots.$$

ou pour abréger

$$(11)\qquad A_{i,k} = \Sigma \frac{a_i a_k}{m}\cos \widehat{D_i D_k},$$

$$(12)\qquad A_{k,k} = \Sigma \frac{a_k^2}{m},$$

deviendra

$$0 = T_k + \Sigma a_k u \cos \widehat{D_k u} + A_{0,k}\nu + A_{1,k}\nu_1 + A_{2,k}\nu_2 + A_{3,k}\nu_3 + \ldots$$

ou bien, en supposant

$$(13)\qquad \Sigma a_k u \cos \widehat{D_k u} + T_k = -X_k,$$

$$(14)\quad A_{0,k}\nu + A_{1,k}\nu_1 + A_{2,k}\nu_2 + A_{3,k}\nu_3 + \ldots A_{f-1,k}\nu_{f-1} = X_k.$$

Le n° k est susceptible de toutes les valeurs 0, 1, 2, 3,.... $f - 1$, la lettre f désignant toujours le nombre des liaisons du système ou celui des quantités ν.

12. En différentiant la valeur précédente de X_k relativement à ν_i, nous aurons

$$\frac{dX_k}{d\nu_i} = A_{i,k}$$

et si nous eussions différentié, par rapport à ν_k, la valeur de X_i, valeur qu'on trouverait en remplaçant k par i dans l'équation (14), nous aurions eu

$$\frac{dX_i}{d\nu_k} = A_{k,i}$$

or d'après la formule (11) on a visiblement

$$A_{i,k} = A_{k,i},$$

donc

$$\frac{dX_k}{d\nu_i} = \frac{dX_i}{d\nu_k};$$

il en résulte que la formule

$$Xd\nu + X_1 d\nu_1 + X_2 d\nu_2 + \ldots.\ X_{f-1}\, d\nu_{f-1},$$

est une différentielle exacte, et comme les coefficients X font fonctions homogènes des variables ν, d'une seule dimension, une intégrale de cette différentielle sera

$$\frac{X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1}}{2}.$$

En désignant par Θ l'intégrale dont il s'agit, vous aurez l'équation

$$(14) \qquad \frac{d\Theta}{d\nu_k} = X_k$$

que nous marquons du n° (14) car elle revient à celle qui porte déjà ce n°. Bien entendu que les X dans Θ doivent être remplacés par leurs valeurs en $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{f-1}$.

En différentiant l'équation

$$(15) \qquad X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1} = 2\Theta$$

vous avez

$$Xd\nu + X_1d\nu_1 + X_2d\nu_2 + \ldots. + \nu dX + \nu_1dX_1 + \nu_2dX_2 + \ldots. = 2d\Theta$$

mais

$$Xd\nu + X_1d\nu_1 + X_2d\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\,d\nu_{f-1} = d\Theta$$

donc aussi

$$\nu dX + \nu_1dX_1 + \nu_2dX_2 + \ldots. + \nu_{f-1}\,dX_{f-1} = d\Theta$$

et par suite, en considérant Θ comme fonction des seules quantités X, vous aurez

$$\nu_k = \frac{d\Theta}{dX_k}.$$

De cette manière, on trouverait de suite les inconnues ν, si l'on connaissait Θ en fonction des X. Mais comme la détermination dont il s'agit de Θ ne présente pas plus de facilité que la résolution des équations (14) qui déterminent les ν, nous allons procéder à cette dernière.

Désignons par Δ les déterminants des f^2 quantités

$$\begin{array}{llllll}
A_{0,0}, & A_{1,0}, & A_{2,0}, & A_{3,0}, & \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,0} \\
A_{0,1}, & A_{1,1}, & A_{2,1}, & A_{3,1}, & \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,1} \\
A_{0,2}, & A_{1,2}, & A_{2,2}, & A_{3,2}, & \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,2} \\
A_{0,3}, & A_{1,3}, & A_{2,3}, & A_{3,3}, & \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,3} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{0,f-1}, & A_{1,f-1}, & A_{2,f-1}, & A_{3,f-1}, & \ldots\ldots & A_{f-1,f-1};
\end{array}$$

en changeant dans ce déterminant les coefficients

$$A_{k,0}, \quad A_{k,1}, \quad A_{k,2}, \quad A_{k,3}, \ldots\ldots\ldots \; A_{k,f-1}$$

de l'inconnue ν, dans les équations (14), respectivement en

$$X, X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; X_{f-1},$$

on aura la valeur du produit $\Delta\nu_k$. Or Δ étant fonction homogène d'une seule dimension des coefficients dont il s'agit, nous aurons par la propriété de cette espèce de fonctions

$$\Delta = \frac{d\Delta}{dA_{k,0}} A_{k,0} + \frac{d\Delta}{dA_{k,1}} A_{k,1} + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}} A_{k,2} + \ldots\ldots \frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}} A_{k,f-1}$$

et comme de plus Δ est fonction entière des coefficients

$$A_{k,0},\ A_{k,1},\ A_{k,2},\ A_{k,3},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ A_{k,f-1}$$

les dérivées partielles de Δ, relatives à ces mêmes coefficients, n'en dépendront point, on aura donc

$$\Delta\nu_k = \frac{d\Delta}{dA_{k,0}} X + \frac{d\Delta}{dA_{k,1}} X_1 + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}} X_2 + \ldots\ldots \frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}} X_{f-1}.$$

La déduction qui précède serait exacte si les quantités A étaient indépendantes entre elles, mais comme elles sont liées par la condition

$$A_{i,k} = A_{k,i},$$

à laquelle, afin de simplifier, on aura égard en formant le déterminant Δ, il s'en suit qu'en différentiant ce déterminant par rapport à une quantité $A_{i,k}$, on fera varier en même temps $A_{k,i}$, ce qu'on ne suppose point dans l'expression du produit $\Delta\nu_k$. Il faut donc pouvoir exprimer les dérivées de Δ, prises dans l'hypothèse de l'indépendance entre les coefficients A, par celles où l'on présuppose la relation

$$A_{i,k} = A_{k,i}.$$

Nous entourerons de parenthèses les dérivées relatives à la première hypothèse, afin que la notation ordinaire se rapporte à ce qui a lieu réellement; en conséquence, nous écrirons

$$\Delta\nu_k = \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,0}}\right) X + \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,1}}\right) X_1 + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}} X_2 + \ldots\ldots \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}} X_{f-1}\right)$$

Nous avons d'abord évidemment

$$\frac{d\Delta}{dA_{k,i}} = \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) + \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right),$$

or on sait par le mode de composition du déterminant Δ, que les coefficients de $A_{k,i}$ et de $A_{i,k}$ dans sa valeur, ou les dérivées partielles

$$\frac{d\Delta}{dA_{k,i}} \text{ et } \frac{d\Delta}{dA_{i,k}}$$

sont les déterminants, la première des $(f-1)^2$ quantités

$$\begin{array}{llllll}
A_{0,0}, & A_{1,0}, & A_{2,0}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,0}, & A_{k+1,0}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,0} \\
A_{0,1}, & A_{1,1}, & A_{2,1}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,1}, & A_{k+1,1}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,1} \\
A_{0,2}, & A_{1,2}, & A_{2,2}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,2}, & A_{k+1,2}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,2} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
A_{0,i-1}, & A_{1,i-1}, & A_{2,i-1}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,i-1}, & A_{k+1,i-1}, \ldots\ldots & A_{f-1,i-1} \\
A_{0,i+1}, & A_{1,i+1}, & A_{2,i+1}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,i+1}, & A_{k+1,i+1}, \ldots\ldots & A_{f-1,i+1} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
A_{0,f-1}, & A_{1,f-1}, & A_{2,f-1}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,f-1}, & A_{k+1,f-1}, \ldots\ldots & A_{f-1,f-1}
\end{array}$$

et la seconde, des $(f-1)^2$ quantités

$$\begin{array}{llllllll}
A_{0,0}, & A_{1,0}, & A_{2,0}, \ldots\ldots\ldots, & A_{i-1,0}, & A_{i+1,0}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,0} \\
A_{0,1}, & A_{1,1}, & A_{2,1}, \ldots\ldots\ldots & A_{i-1,1}, & A_{i+1,1}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,1} \\
A_{0,2}, & A_{1,2}, & A_{2,2}, \ldots\ldots\ldots & A_{i-1,2}, & A_{i+1,2}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{0,k-1}, & A_{1,k-1}, & A_{2,k-1}, \ldots\ldots & A_{i-1,k-1}, & A_{i+1,k-1} \ldots\ldots & A_{f-1,k-1} \\
A_{0,k+1}, & A_{1,k+1}, & A_{2,k+1}, \ldots\ldots & A_{i-1,k+1}, & A_{i+1,k+1} \ldots\ldots & A_{f-1,k+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{0,f-1}, & A_{1,f-1}, & A_{2,f-1}, \ldots\ldots & A_{i-1,f-1}, & A_{i+1,f-1} \ldots\ldots & A_{f-1,f-1},
\end{array}$$

mais eu égard à la relation

$$A_{k,i} = A_{i,k},$$

les deux systèmes des quantités qui précèdent, et dont sont formés les deux déterminants dont il s'agit, se trouvent être identiques; chaque série horizontale de la première étant remplacée par la colonne verticale correspondante de la seconde. Ainsi par exemple la troisième série

$$A_{0,2}, A_{1,2}, A_{2,2}, \ldots\ldots A_{k-1,2}, A_{k+1,2}, \ldots\ldots A_{f-1,2}$$

du premier système, et la troisième colonne verticale

$$A_{2,0}, A_{2,1}, A_{2,2}, \ldots\ldots A_{2,k-1}, A_{2,k+1}, \ldots\ldots A_{2,f-1}$$

du second, en transportant les indices d'après l'équation

$$A_{k,i} = A_{i,k},$$

deviendront identiques; et comme il est facile de s'assurer de plus, que les termes égaux de deux déterminants sont affectés des mêmes signes dans la valeur de Δ, il s'ensuivra visiblement que les déterminants en question, ou les dérivées partielles

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) \text{ et } \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right),$$

sont égales entre elles, et par suite

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) = \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}.$$

Mais il faut en excepter le cas de l'égalité des indices i et k, pour lequel on aura

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k.k}}\right) = \frac{d\Delta}{dA_{k.k}},$$

car dans ce cas, l'équation

$$A_{k,i} = A_{i.k},$$

par sa nature, ne fournira aucune relation, et par suite elle sera sans influence sur la dérivée de Δ par rapport à $A_{k.k}$. Ainsi nous aurons, Δ étant simplifié par la relation

$$A_{k,i} = A_{i.k},$$

$$(16)\ 2\Delta\nu_k = \frac{d\Delta}{dA_{k,0}}X + \frac{d\Delta}{dA_{k,1}}X_1 + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}}X_2 + \ldots.\ 2\,\frac{d\Delta}{dA_{k,k}}X_k + \ldots\ldots + \frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}}X_{f-1}$$

En donnant à k les valeurs successives 0, 1, 2, 3, ... $f-1$, vous aurez tous les ν, et par suite vous trouverez

$$X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1}$$

ou 2Θ, vous aurez

$$(17) \qquad \Theta = \frac{1}{2\Delta}\left\{\begin{array}{l} \frac{d\Delta}{dA_{0,0}}X^2 + \frac{d\Delta}{dA_{1,1}}X_1^2 + \frac{d\Delta}{dA_{2,2}}X_2^2 + \ldots + \frac{d\Delta}{dA_{f-1,f-1}}X^2_{f-1} \\ + \frac{d\Delta}{dA_{0,1}}XX_1 + \frac{d\Delta}{dA_{0,2}}X_{0,2} + \frac{d\Delta}{dA_{1,2}}X_1X_2 + \ldots + \frac{d\Delta}{dA_{i,k}}X_iX_k \end{array}\right\}$$

cela étant, l'équation (7) deviendra

$$(18) \quad \Sigma mv \cos\omega\,\delta\varepsilon = \Sigma mu \cos\sigma\,\delta\varepsilon + \frac{d\Theta}{dX}\delta L + \frac{d\Theta}{dX_1}\delta L_1 + \frac{d\Theta}{dX_2}\delta L_2 + \ldots + \frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\delta L_{f-1}$$

Sous cette forme elle ne renferme d'inconnues que les v, dont elle fournira de suite les valeurs. En effet, en égalant entre eux les coefficients des $\delta\varepsilon$ dans les deux membres de l'équation, on trouvera les formules

$$(19)\left\{\begin{array}{l} mv\cos\omega = mu\cos\sigma + a\frac{d\Theta}{dX}\cos\theta + a_1\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\theta_1 + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\theta_2 + \ldots \\ \qquad + a_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\theta_{f-1} \\ m'v'\cos\omega' = m'u'\cos\sigma' + a'\frac{d\Theta}{dX}\cos\theta' + a_1'\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\theta_1' + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\theta_2' + \ldots \\ \qquad + a'_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\theta'_{f-1} \\ m''v''\cos\omega = m''u''\cos\sigma'' + a''\frac{d\Theta}{dX}\cos\theta'' + a_1''\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\theta_1'' + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\theta_2'' + \ldots \\ \qquad + a''_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\theta''_{f-1} \\ m'''v'''\cos\omega''' = m'''u'''\cos\sigma''' + a'''\frac{d\Theta}{dX}\cos\theta''' + a_1'''\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\theta_1''' + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\theta_2''' + \ldots \\ \qquad + a'''_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\theta'''_{f-1}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

qui fourniront non seulement les quantités du mouvement cherchées mv, $m'v'$, $m''v''$, $m'''v'''$,.... mais aussi leurs projections sur des directions quelconques, ce qui présente une solution complète de la question.

Il est à remarquer dans les valeurs précédentes des projections

$$mv\cos\omega,\ m'v'\cos\omega',\ m''v''\cos\omega'',\ m'''v'''\cos\omega''',\ldots\ldots$$

que les forces impulsives, ainsi que les liaisons du système, y fournissent les termes de même forme, que si chacune de ces causes agissait seule indépendamment des autres; mais nous ne parlons que de la forme, et non de la valeur des termes dont il s'agit, ces dernières dépendent de l'action simultanée de toutes les causes.

Nous allons terminer le mémoire par quelques remarques relatives à la force vive après la percussion, et par quelques relations entre les quantités qui intéressent la question.

13. Supposons que les directions arbitraires, auxquelles se rapportent tous les angles dans les équations (19), coïncident respectivement avec celles des vitesses v, v', v'', v''',... nous aurons pour les quantités du mouvement mv, $m'v'$, $m''v''$, $m'''v'''$,.... les valeurs suivantes

$$mv = mu \cos\widehat{uv} + a\frac{d\Theta}{dX}\cos\widehat{Dv} + a_1\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\widehat{D_1v} + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\widehat{D_2v} + \ldots + a_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\widehat{D_{f-1}v}$$

$$m'v' = m'u'\cos\widehat{u'v'} + a'\frac{d\Theta}{dX}\cos\widehat{D'v'} + a'_1\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\widehat{D'_1v'} + a'_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\widehat{D'_2v'} + \ldots + a'_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\widehat{D'_{f-1}v'}$$

$$m''v'' = m''u''\cos\widehat{u''v''} + a''\frac{d\Theta}{dX}\cos\widehat{D''v''} + a''_1\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\widehat{D''_1v''} + a''_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\widehat{D''_2v''} + \ldots + a''_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\widehat{D''_{f-1}v''}$$

$$m'''v''' = m'''u'''\cos\widehat{u'''v'''} + a'''\frac{d\Theta}{dX}\cos\widehat{D'''v'''} + a'''_1\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\widehat{D'''_1v'''} + a'''_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\widehat{D'''_2v'''} + \ldots + a'''_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\widehat{D'''_{f-1}v'''}$$

....

En multipliant les équations respectivement par v, v', v'', v''',... et ajoutant ensemble, il viendra

$$\Sigma mv^2 = \Sigma muv\cos\widehat{uv} + \frac{d\Theta}{dX}\Sigma av\cos\widehat{Dv} + \frac{d\Theta}{dX_1}\Sigma a_1v\cos\widehat{D_1v} + \frac{d\Theta}{dX_2}\Sigma a_2v\cos\widehat{D_2v} + \ldots\ldots\ldots + \frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\Sigma a_{f-1}v\cos\widehat{D_{f-1}v}$$

ou bien, en remplaçant les sommes

$$\Sigma av\cos\widehat{Dv},\quad \Sigma a_1v\cos\widehat{D_1v},\quad \Sigma a_2v\cos\widehat{D_2v},\ldots.\quad \Sigma a_{f-1}v\cos\widehat{D_{f-1}v}$$

par leurs valeurs fournies par les équations (2), et faisant pour abréger

$$(20)\qquad \Phi = T\frac{d\Theta}{dX} + T_1\frac{d\Theta}{dX_1} + T_2\frac{d\Theta}{dX_2} + \ldots. + T_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}},$$

$$(21)\qquad \Sigma mv^2 = \Sigma muv\cos\widehat{uv} - \Phi$$

Cette dernière équation résulterait sur le champ de la formule (18) en y faisant coïncider, en grandeurs et en directions, les $\delta\varepsilon$ respectivement avec vdt. La même formule (18), en y faisant coïncider les $\delta\varepsilon$ en grandeurs et directions respectivement avec udt, nous donnera

$$\Sigma muv\cos\widehat{uv} = \Sigma mu^2 + \frac{d\Theta}{dX}\Sigma au\cos\widehat{Du} + \frac{d\Theta}{dX_1}\Sigma a_1u\cos\widehat{D_1u} + \frac{d\Theta}{dX}\Sigma a_2u\cos\widehat{D_2u} + \ldots\ldots + \frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\Sigma a_{f-1}u\cos\widehat{D_{f-1}u}$$

ou bien, remplaçant les sommes

$$\Sigma au \cos \widehat{Du}, \quad \Sigma a_1 u \cos \widehat{D_1 u}, \quad \Sigma a_2 u \cos \widehat{D_2 u}, \ \ldots . \quad \Sigma a_{f-1} u \cos \widehat{D_{f-1} u}$$

par leurs valeurs que fournissent les équations (13),

$$\Sigma muv \cos \widehat{uv} = \Sigma mu^2 - 2\Theta - \Phi.$$

Les équations (21) et (22) donnent

$$\Phi = \Sigma mv \, (u \cos \widehat{uv} - v)$$
$$2\Theta + \Phi = \Sigma mu \, (u - v \cos \widehat{uv})$$
$$\Theta + \Phi = \tfrac{1}{2} \Sigma mu^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma mv^2$$
$$\Theta = \tfrac{1}{2} \Sigma m \, (u^2 + v^2 - 2uv \cos \widehat{uv})$$

Décomposons la vitesse u en deux vitesses, dont l'une soit v, et l'autre nous la désignerons par w, nous aurons par la composition des vitesses.

$$u \cos \widehat{uv} - v = w \cos \widehat{vw}$$
$$u - v \cos \widehat{uv} = w \cos \widehat{uw}$$
$$u^2 + v^2 - 2uv \cos \widehat{uv} = w^2$$

et par suite

$$(23) \quad \begin{cases} \Phi = \Sigma mvw \cos \widehat{vw} \\ 2\Theta + \Phi = \Sigma muw \cos \widehat{uw} \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} \Theta + \Phi = \tfrac{1}{2} \Sigma mu^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma mv^2 \\ \Theta = \tfrac{1}{2} \Sigma mw^2 \end{cases}$$

Remarquez bien que s'il n'y avait pas de liaisons entre les points du système, la vitesse de la masse m à la fin de la percussion serait u, ou ce qui revient au même, le point m aurait deux vitesses simultanées v et w, or réellement il n'en reste que la première, donc par les liaisons du système m, perd la vitesse w, par cette raison cette vitesse porte le nom de *vitesse perdue*. Or la dernière des équations (24) nous montre que la quantité Θ, qui joue un si grand rôle dans la théorie de la percussion, n'est autre chose que la force vive du système, due aux vitesses perdues. Et nous voyons, par la première de ces mêmes équations, que $\Theta + \Phi$ représente la force vive perdue par le système à cause des liaisons, car sans les liaisons le système aurait pour force vive $\frac{1}{2} \Sigma mu^2$, et comme il ne lui en reste que $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$ la différence

$$\tfrac{1}{2} \Sigma mu^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma mv^2,$$

ou la quantité $\Theta + \Phi$ qui lui est égale, représentera visiblement la force vive perdue. Ainsi cette force et la force vive due aux vitesses perdues, exprimée comme on vient de le voir par la seule quantité Θ, diffèrent entre elles par la quantite Φ. Elles seraient donc égales entre elles

dans le cas particulier où Φ disparaîtrait; ce qui arriverait si les conditions des déplacements possibles ne renfermaient pas les termes Tdt, proportionnels à l'élément du temps; car tous les T étant zéro, il est visible par l'équation

$$(21) \qquad \Phi = T\frac{d\Theta}{dX} + T_1\frac{d\Theta}{dX_1} + T_2\frac{d\Theta}{dX_2} + \dots + T_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}$$

que Φ le sera aussi. Dans ce cas particulier la force vive perdue et la force vive due aux vitesses perdues, auront une valeur commune Θ.

Dans le cas de $\Phi = 0$ l'équation (22), en y remplaçant Θ par $\frac{1}{2}\Sigma mw^2$, deviendra

$$(25) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma mw^2.$$

L'égalité précédente entre les deux espèces des forces vives renferme, comme un cas particulier, le célèbre théorème de Carnot sur la perte des forces vives dans le choc des corps durs. En effet, vous comprendrez le cas du choc de ces corps, en admettant qu'il n'y ait point de forces impulsives, et que la percussion vient uniquement du changement dans les liaisons du système; car le choc dont il s'agit n'arrive que par l'établissement subit des liaisons entre les corps au moment où ils commencent à se toucher. L'absence des forces impulsives réduira les vitesses u à celles qui avaient lieu avant la percussion ou le choc, et que nous avons désignées par les β. Cela étant, la dernière équation deviendra

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\beta^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma mw^2.$$

On en conclura que dans le choc des corps durs, il se fait une perte de force vive, égale à la force vive que l'ensemble de ces mêmes corps aurait, si chacun était animé de la vitesse qu'il a perdue par le choc : c'est en quoi consiste le théorème de Carnot.

14. Par une analyse tout-à-fait semblable à celle qui précède nous pouvons comparer la percussion que notre système éprouve à celle qu'il éprouverait s'il était délivré, non de toutes, mais d'une partie des liaisons qui le gênent. Nous allons dire quelques mots sur cet important objet.

Supposons que les liaisons dont les expressions algébriques dépendent des quantités $L_g, L_{g+1}, \dots L_{f-g}$ soient supprimées, mais que les autres liaisons, auxquelles répondent les quantités $L, L_1, L_2, \dots L_{g-1}$ demeurent, et désignons par V, Ω et μ, pour le système ainsi libéré, ce que v, ω et ν représentent respectivement pour le système chargé de la totalité des liaisons. La lettre g est un entier plus petit que f. Nous aurons

$$\Sigma mV\cos\Omega\delta\varepsilon = \Sigma mu\cos\sigma\delta\varepsilon + \mu\delta L + \mu_1\delta L_1 + \mu_2\delta L_2 + \dots \mu_{g-1}\delta L_{g-1},$$

retranchant cette équation de la formule (7) il vient

$$\Sigma mv\cos\omega\delta\varepsilon =$$

$$\Sigma mV\cos\Omega\delta\varepsilon + (\nu-\mu)\,\delta L + (\nu_1-\mu_1)\,\delta L_1 + (\nu_2-\mu_2)\,\delta L_2 + \dots\dots + (\nu_{g-1}-\mu_{g-1})\,\delta L_{g-1}$$
$$+ \nu_g\delta L_g + \nu_{g+1}\delta L_{g+1} + \nu_{g+2}\delta L_{g+2} + \dots\dots + \nu_{f-1}\,\delta L_{f-1}$$

Cette relation, tout à fait semblable à la formule (7), peut être traitée comme l'a été cette dernière; nous allons en tirer quelques conséquences.

Faisons coïncider les $\delta\varepsilon$, en grandeurs et directions, d'abord avec vdt, puis avec Vdt, nous aurons, en supposant pour abréger

$$\mu T + \mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + \ldots\ldots + \mu_{g-1} T_{g-1} = \Phi'$$

et en supprimant le facteur commun dt,

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m v V \cos \widehat{vV} - \Phi + \Phi'$$

$\Sigma m v V \cos \widehat{vV} =$

$$\Sigma m V^2 + (\nu - \mu) \Sigma a V \cos \widehat{DV} + (\nu_1 - g_1) \Sigma a_1 V \cos \widehat{D_1 V} + \ldots\ldots (\nu_{g-1} - \mu_{g-1}) \Sigma a_{g-1} V \cos \widehat{D_{g-1} V}$$
$$+ \nu_g \Sigma a_g V \cos \widehat{D_g V} + \nu_{g+1} \Sigma a_{g+1} V \cos \widehat{D_{g+1} V} + \ldots\ldots \nu_{f-1} \Sigma a_{f-1} V \cos \widehat{D_{f-1} V}.$$

Or les vitesses V satisfaisant aux g premières des équations (2), nous pouvons remplacer les sommes

$$\Sigma a V \cos \widehat{DV},\ \ \Sigma a_1 V \cos \widehat{D_1 V},\ \ \Sigma a_2 V \cos \widehat{D_2 V},\ \ldots.\ \ \Sigma a_{g-1} V \cos \widehat{D_{g-1} V}$$

respectivement par

$$-T,\quad -T_1,\quad -T_2,\ \ldots..\quad -T_{g-1}$$

et si, de plus, on suppose

$$\begin{aligned}
\Sigma a_g V \cos \widehat{D_g V} + T_g &= -Y_g \\
\Sigma a_{g+1} V \cos \widehat{D_{g+1} V} + T_{g+1} &= -Y_{g+1} \\
\Sigma a_{g+1} V \cos \widehat{D_{g+2} V} + T_{g+2} &= -Y_{g+2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\
\Sigma a_{f-1} V \cos \widehat{D_{f-1} V} + T_{f-1} &= -Y_{f-1}
\end{aligned}$$

et qu'on fasse pour abréger

$$\nu_g Y_g + \nu_{g+1} Y_{g+1} + \nu_{g+2} Y_{g+2} + \ldots\ldots + \nu_{f-1} Y_{f-1} = 2\Theta'$$

on réduira la dernière équation à celle-ci

$$\Sigma m v V \cos \widehat{vV} = \Sigma m V^2 - 2\Theta' - \Phi + \Phi'.$$

Les équations

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Sigma m v^2 &= \Sigma m v V \cos \widehat{vV} - \Phi + \Phi' \\
\Sigma m v V \cos \widehat{vV} &= \Sigma m V^2 - 2\Theta - \Phi + \Phi'
\end{aligned}\right.$$

ont la même forme que les équations (17) et (18) et l'on en déduira des conclusions semblables. En les ajoutant, on aura la différence des forces vives

$$\frac{1}{2}\Sigma m V^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \Theta' + \Phi - \Phi',$$

et en retranchant l'une de l'autre il vient

$$\frac{1}{2}\Sigma m\,(V^2 + v^2 - 2vV\cos\widehat{vV}) = \Theta'.$$

Or si l'on décompose la vitesse V en v et une autre composante w, on aura

$$w^2 = V^2 + v^2 - 2vV\cos\widehat{vV}$$

et par suite

$$(27) \qquad \frac{1}{2}\Sigma m w^2 = \Theta'$$

et

$$(28) \quad \frac{1}{2}\Sigma m V^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \frac{1}{2}\Sigma m w^2 + \Phi - \Phi'.$$

Les vitesses w sont visiblement celles que perdent les points du système aux vitesses v, relativement aux points du système aux vitesses V, à cause de ces obstacles qui gênent le premier des deux systèmes et qui laissent libre le second. Ainsi l'équation (27) donne la force vive due aux vitesses perdues, et l'équation (28) fournit la différence qu'il y a entre la force vive perdue, représentée par

$$\frac{1}{2}\Sigma m V^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v^2$$

et la force vive $\frac{1}{2}\Sigma m w^2$ due aux vitesses perdues. La différence dont il s'agit disparaîtrait dans le cas particulier, quand les conditions des déplacements possibles ne renfermeraient pas les termes Tdt proportionnels à l'élément dt du temps, car alors les quantités Φ et Θ seraient zéro toutes les deux, et par suite il viendrait

$$\frac{1}{2}\Sigma m V^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \frac{1}{2}\Sigma m w^2.$$

On en conclura, en se bornant sans doute au cas particulier dont il est question, celui où les T sont zéro, que l'addition des nouvelles liaisons diminue la force vive du système d'une quantité égale à la force vive que le système aurait, si chaque point était animé de la vitesse que ce même point perdrait par l'addition des nouvelles liaisons dont il s'agit. On voit aussi réciproquement que le système par la suppression de quelques liaisons recevrait une augmentation de force vive, égale à la force vive qu'il aurait, si chaque point était animé de la vitesse qu'il gagnerait par la suppression des liaisons en question.

On pourrait généraliser les considérations précédentes, en comparant l'effet des forces impulsives, sur un système de points assujettis à des liaisons quelconques, avec l'effet des mêmes forces sur les mêmes points, mais gênés par d'autres liaisons également arbitraires. Cependant nous ne nous occuperons point de cette comparaison car, d'après ce qui précède, elle ne présentera aucune difficulté.



SUR

LES DIVISEURS NUMÉRIQES INVARIABLES

DES

FONCTIONS RATIONNELLES ENTIÈRES,

PAR

V. BOUNIAKOWSKY.

(Lu le 4 août 1854.)

La théorie des fonctions rationnelles entières, intimement liée à celle des équations algébriques, a beaucoup occupé les géomètres, surtout de notre temps. Tous savent combien cette doctrine est redevable aux travaux de Lagrange, Legendre, Fourier, Gauss, Abel et d'autres. Mais ce sujet est tellement fécond en lui même, qu'il est encore loin d'être épuisé. Dans cet écrit je donnerai la solution complète d'une question qui n'est pas sans quelqu'intérêt. Elle consiste dans la détermination du *diviseur numérique invariable* qu'une fonction rationnelle entière peut admettre, quand tous ses coefficients sont entiers, et que la variable elle même est assujettie à n'obtenir que des valeurs entières, mais d'ailleurs tout-à-fait arbitraires.

1. Considérons une fonction entière

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

à coefficients entiers, positifs ou négatifs, délivrés de leur commun diviseur si tous en avaient un. Supposons, de plus, qu'on n'attribue à la variable x que des valeurs entières, zéro y compris. Cela posé, cette fonction ne pourra admettre que deux modes différents de divisibilité :

1°. La fonction $f(x)$ pourrait être divisible par une autre fonction entière, d'un degré inférieur à m; dans ce cas, x étant un entier quelconque, la fonction $f(x)$ serait constamment décomposable en facteurs qui varieraient avec la valeur particulière attribuée à x. Ainsi $f(x) = x^3 - 1$ est constamment divisible par $x - 1$ et $x^2 + x + 1$, quelque valeur que l'on prenne pour x. Au contraire, la fonction $x^2 + x + 2$, dans ce même sens, n'est pas décomposable en facteurs. Une fonction prise dans cette dernière acception, c'est-à-dire indécomposable en facteurs rationnels d'un degré inférieur, est, ce que les géomètres appellent, *irréductible*.

2°. Le second mode de divisibilité tient à la propriété des factorielles et de quelques polynômes d'une forme déterminée, d'être divisibles par certains nombres, indépendamment de la valeur entière attribuée à la variable. Ainsi, le trinôme

$$x^2 + x + 2 = 2\left[\frac{x(x+1)}{2} + 1\right]$$

quoiqu'*irréductible*, est néanmoins toujours divisible par 2; de même le polynôme *irréductible*

$$x^3 + 3x^2 + 8x + 18 = 6\left[\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} + x + 3\right]$$

est évidemment divisible par 6, parce que la factorielle $x(x+1)(x+2)$ l'est elle même. On a plusieurs formules de ce genre dans la théorie des nombres: l'une des plus simples et des plus utiles est, comme on sait, la suivante

$$x^p - x$$

qui est toujours divisible par p, quand p représente un nombre premier.

C'est ce second mode de divisibilité qui, à notre connaissance, n'a pas été examiné d'une manière générale. Nous tâcherons de combler cette lacune en présentant une méthode complète pour trouver, quand il existe, le *diviseur numérique invariable* de la fonction entière donnée. Nous prévenons que, pour éviter toute équivoque, nous appellerons *fonction indivisible* toute fonction entière qui n'offrira aucun des deux caractères de divisibilité dont il vient d'être question tout-à-l'heure.

2. Nous commencerons par indiquer quelques propositions connues de la théorie des nombres, dont nous aurons besoin pour l'exposition de notre méthode.

Proposition 1ère.

Soit p un nombre premier, inférieur à l'entier a; l'exposant ν de la plus haute puissance de p, qui divise la factorielle numérique

$$1.2.3\ldots a$$

sera déterminé par la formule

$$\nu = \frac{a - \Sigma(a)_p}{p-1},$$

la notation $\Sigma(a)_p$ désignant la somme des chiffres du nombre a, exprimé d'après le système de numération qui a pour base le nombre p.

La démonstration de cette formule est très simple. Supposons, en effet, que l'on effectue l'opération qui sert à transformer un nombre décimal en un nombre exprimé d'après le système qui aurait pour base l'entier p. Nous obiendrons successivement

$$\frac{a}{p} = q_1 + \frac{r_1}{p}, \quad \frac{q_1}{p} = q_2 + \frac{r_2}{p}, \quad \frac{q_2}{p} = q_3 + \frac{r_3}{p}, \ldots\ldots \frac{q_{n-1}}{p} = q_n + \frac{r_n}{p},$$

en nous arrêtant au quotient $q_n < p$. On aura donc

$$a = pq_1 + r_1, \quad q_1 = pq_2 + r_2, \quad q_2 = pq_3 + r_3, \ldots\ldots q_{n-1} = pq_n + r_n.$$

La somme de toutes ces équations donne

$$a + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} = p(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n) + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n,$$

et, en observant que

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n + q_n = \Sigma(a)_p,$$
$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n = \nu,$$

l'on aura

$$a+\nu-q_n = p\nu + \Sigma(a)_p - q_n,$$

d'où l'on tire de suite

$$\nu = \frac{a-\Sigma(a)_p}{p-1}.$$

Proposition 2de.

Si l'on représente par p un nombre premier, et par m un entier supérieur ou égal à p, la congruence

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \pmod{p}$$

aura les mêmes racines que la suivante

$$b_1 x^{p-1} + b_2 x^{p-2} + b_3 x^{p-3} + \ldots\ldots + b_{p-1} x + b_p \equiv 0 \pmod{p},$$

la fonction $b_1 x^{p-1} + b_2 x^{p-2} + \ldots\ldots + b_p$ *étant le reste provenant de la division de* $f(x)$ *par la différence*

$$x^p - x,$$

ou par la factorielle

$$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-p).$$

Cette propriété constitue une proposition fondamentale bien connue de la théorie des congruences. On en tire les deux corollaires suivants :

1er Corollaire.

Pour que la congruence

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \pmod{p}$$

ait toutes les p racines 1, 2, 3,....p, il faut que chacun des p coefficients $b_1, b_2, b_3 \ldots. b_{p-1}, b_p$ *du reste de la division de* $f(x)$ *par* $x^p - x$ *ou par* $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-p)$ *soit divisible par p.*

2d Corollaire.

Pour que la fonction

$$F(x) = b_1 x^{p-1} + b_2 x^{p-2} + b_3 x^{p-3} + \ldots\ldots + b_{p-1} x + b_p$$

soit divisible par la puissance p^λ *pour toute valeur entière de x, il faut que chacun des coefficients* $b_1, b_2, b_3 \ldots. b_{p-1}, b_p$ *soit séparément divisible par cette même puissance* p^λ.

En effet, $F(x)$ devant être divisible par p, et n'étant que du degré $p-1$, chacun de ses coefficients devra être divisible par p (*1er Corollaire*); divisant par p la congruence

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

et posant

$$\frac{b_1}{p} = b_1', \quad \frac{b_2}{p} = b_2' \ldots\ldots \frac{b_p}{p} = b'_p,$$

on aura

$$b_1' x^{p-1} + b_2' x^{p-2} + \ldots + b_p' \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p^{\lambda-1}).$$

Par la même raison que plus haut chacun des coefficients b_1', $b_2' \ldots b_p'$ devra, à son tour, être divisible par p, et il en sera ainsi jusqu'à ce que l'exposant de la puissance de p ne soit entièrement épuisé. De là on conclura immédiatement que chacun des coefficients b_1, b_2, $b_3 \ldots b_{p-1}$, b_p de la fonction $F(x)$ doit être divisible par p^λ.

3. Comme dans tout ce qui va suivre nous ferons un fréquent usage des factorielles, nous les désignerons, pour abréger, par une notation très simple; en même temps nous rapporterons quelques unes de leurs propriétés qui nous seront nécessaires.

Convenons donc de représenter la factorielle

$$(x - \overline{k-1}\,.p - 1)(x - \overline{k-1}\,.p - 2)(x - \overline{k-1}\,.p - 3) \ldots (x - kp)$$

par la notation

$$X_{(k-1)p+1,\ kp},$$

p étant un nombre premier; on observera d'abord que

$$X_{(k-1)p+1,\ kp} = 0$$

pour toutes les valeurs suivantes de x:

$$x = (k-1)p+1,\ (k-1)p+2,\ (k-1)p+3, \ldots\ldots kp.$$

De plus, il est évident que cette fonction $X_{(k-1)p+1,\ kp}$ sera *identiquement* congrue à zéro suivant la *première puissance du module* p. Pour des valeurs particulières de x elle pourrait être divisible par des puissances supérieures de p: ainsi, pour $x = p^2 + kp$, la fonction $X_{(k-1)p+1,\ kp}$ devient divisible par p^2, mais *non-identiquement*.

Actuellement il importe, pour notre but, de déterminer la puissance la plus élevée p^λ par laquelle la factorielle

$$X_{1,\ kp} = X_{1,p} \,.\, X_{p+1,\ 2p} \,.\, X_{2p+1,\ 3p} \ldots X_{(k-1)p+1,\ kp}$$

est divisible *identiquement*, c'est-à-dire quelle que soit la valeur entière de x. La *Proposition 1ère* nous en fournit de suite le moyen.

En effet, si l'on considère la factorielle

$$X_{1,\ kp} = (x-1)(x-2)(x-3) \ldots (x-kp)$$

pour différentes valeurs de x, à commencer par $x = kp + 1$, pour laquelle on a

$$X_{1,\ kp} = 1.2.3 \ldots kp,$$

on verra que la puissance de p qui divise cette dernière factorielle numérique, est précisément celle que l'on cherche, parce que pour toute autre valeur de x, supérieure à $kp+1$, l'exposant de p ne sera jamais inférieur à celui dont il est question, et ne pourrait que lui être supérieur. Si l'on désigne donc par λ cet exposant, on aura *identiquement*

$$X_{1,\,kp} = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-kp) \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^{\lambda}),$$

p^{λ} étant, nous le répétons, la plus haute puissance de p qui divise la factorielle numérique $1.2.3\ldots.kp$. Par conséquent

$$\lambda = \frac{kp-\Sigma(kp)_p}{p-1},$$

expression qui, en vertu de la propriété évidente $\Sigma(kp)_p = \Sigma(k)_p$, prend la forme

$$\lambda = k + \frac{k-\Sigma(k)_p}{p-1}.$$

La conclusion à laquelle nous sommes parvenu tient à ce que la factorielle numérique $1.2.3\ldots.kp$ a pour diviseur une puissance p^{λ} égale ou inférieure à la puissance qui diviserait la fonction

$$X_{1,\,kp} = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-kp)$$

pour une valeur quelconque de x, supérieure à $kp+1$. Pour justifier cette dernière assertion, posons $x=kp+1+h$, h étant un nombre entier positif, d'ailleurs entièrement arbitraire. Il s'agira de faire voir que si p^{λ} est la plus haute puissance de p qui divise le produit $1.2.3\ldots.kp$, la factorielle

$$(h+1)(h+2)(h+3)\ldots.(h+kp)$$

sera également divisible par p^{λ} ou par une puissance supérieure. Pour cela, soient $p^{\lambda'}$ et $p^{\lambda''}$ les puissances de p qui divisent respectivement les factorielles

$$1.2.3\ldots.h \quad \text{et} \quad 1.2.3\ldots.h(h+1)(h+2)\ldots.(h+kp);$$

on aura

$$\lambda' = \frac{h-\Sigma(h)_p}{p-1}, \quad \lambda'' = \frac{h+kp-\Sigma(h+kp)_p}{p-1}.$$

La différence $\lambda''-\lambda'$ représentera l'exposant de la puissance de p, qui divise la factorielle

$$(h+1)(h+2)(h+3)\ldots.(h+kp).$$

Or

$$\lambda''-\lambda' = \frac{h+kp-\Sigma(h+kp)_p}{p-1} - \frac{h-\Sigma(h)_p}{p-1}$$

$$= k + \frac{k+\Sigma(h)_p - \Sigma(h+kp)_p}{p-1}.$$

Maintenant, en désignant par λ l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise la factorielle

$$1.2.3\ldots.kp,$$

il faudra faire voîr que l'on a

$$\lambda \gtreqless \lambda''-\lambda',$$

ou bien

$$k+\frac{k-\Sigma(k)_p}{p-1} \gtreqless k+\frac{k+\Sigma(h)_p-\Sigma(h+kp)_p}{p-1},$$

ce qui entraîne la condition

$$\Sigma(h+kp)_p \gtreqless \Sigma(h)_p + \Sigma(k)_p,$$

qui se trouve remplie. En effet, si h est inférieur à p, la somme $\Sigma(h+kp)_p$ est visiblement égale à $h+\Sigma(k)_p$, et comme dans ce cas $\Sigma(h)_p$ ne diffère pas de h, on aura

$$\Sigma(h+kp)_p = \Sigma(h)_p + \Sigma(k)_p.$$

Quand le nombre h est supérieur à p, il se compose de deux ou d'un plus grand nombre de chiffres; il pourra arriver alors qu'en additionnant h et kp, exprimés d'après le système de numération qui a pour base le nombre premier p, il y ait une réduction dans la somme des chiffres; cette réduction, comme on le sait d'ailleurs, est toujours un multiple de $p-1$; donc, dans ce cas,

$$\Sigma(h+kp)_p < \Sigma(h)_p + \Sigma(k)_p.$$

Enfin, l'hypothèse de $h=p$ conduit successivement à

$$\begin{aligned}\Sigma(p+kp)_p = \Sigma(\overline{1+k}.p)_p = \Sigma(1+k)_p &\gtreqless \Sigma(1)_p + \Sigma(k)_p \\ &\gtreqless \Sigma(h)_p + \Sigma(k)_p,\end{aligned}$$

le signe de l'égalité correspondant au cas où l'addition de 1 à k ne produirait point de réduction dans la somme des chiffres, et le signe $<$ à celui où une telle réduction aurait lieu. Ainsi, on aura généralement

$$\Sigma(h+kp)_p \gtreqless \Sigma(h)_p + \Sigma(k)_p.$$

Enfin, la dernière propriété des factorielles dont nous ayons besoin, consiste dans la proposition suivante :

Proposition 3ème.

Soit p un nombre premier, et $\varphi(x)$ un polynôme d'un degré inférieur à p, dont tous les coefficients ne sont pas divisibles par p; dans cette hypothèse, le produit

$$X_{1,\,kp}\cdot\varphi(x),$$

$X_{1,\,kp}$ *désignant, comme plus haut, la factorielle* $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x-kp)$, *ne pourra pas être* identiquement *divisible par une puissance de p supérieure à celle qui divise la factorielle numérique* $1.2.3\ldots.kp$.

En d'autres termes : si l'on représente par λ l'exposant de la puissance de p qui divise *identiquement* le produit $X_{1,\,kp}\cdot\varphi(x)$, la congruence

$$X_{1,\,kp}\cdot\varphi(x)\equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\lambda}),$$

pour être *identique*, exige que λ soit déterminé par la condition

$$1.2.3\ldots.kp\equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\lambda}),$$

et que l'on ait par conséquent

$$\lambda = k + \frac{k-\Sigma(k)_p}{p-1}.$$

Pour se convaincre de la justesse de cette assertion, observons que puisque la fonction $\varphi(x)$ est d'un degré inférieur à p, il y aura au moins une valeur de x, supposons r, non-supérieure à p, qui ne rendra pas $\varphi(x)$ divisible par p ; il en sera évidemment de même de la valeur $x = kp+r$; ainsi $\varphi(kp+r)$ ne sera pas congrue à zéro suivant le module p. On aura donc dans ce cas

$$X_{1,\,kp} = r(r+1)(r+2)\ldots.(kp+r-1)\equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\lambda}).$$

Or, les deux factorielles

$$r(r+1)(r+2)\ldots.(kp+r-1) \quad \text{et} \quad 1.2.3\ldots.kp$$

sont divisibles chacune par la même puissance de p ; cela se voit de suite en faisant attention que dans le produit

$$\overline{1.2.3\ldots.(r-1)}\,.\,r(r+1)(r+2)\ldots.kp\,.\,\overline{(kp+1)(kp+2)\ldots.(kp+r-1)}$$

les termes barrés ne contiennent pas le facteur p. De là on conclut de suite la légitimité du théorême énoncé.

Comme dans ce qui va suivre nous aurons besoin de l'exposant λ de la plus haute puissance du nombre premier p qui divise la factorielle numérique $1.2.3\ldots.\,kp$, nous présentons ici une table qui donne ces exposants pour toutes les valeurs de k et p, dont le produit kp ne dépasse pas 100. Cette table peut être calculée très facilement, soit directement, soit au moyen de la formule rapportée plus haut

$$\lambda = k + \frac{k-\Sigma(k)_p}{p-1}.$$

Table des valeurs de la plus haute puissance p^λ qui divise la factorielle $1.2.3\ldots,kp$.

Valeurs de k pour $p=2$..............	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Valeurs correspondantes de λ............	1	3	4	7	8	10	11	15	16	18	19	22	23	25
Valeurs de k pour $p=2$..............	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Valeurs correspondantes de λ............	26	31	32	34	35	38	39	41	42	46	47	49	50	53
Valeurs de k pour $p=2$..............	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
Valeurs correspondantes de λ............	54	56	57	63	64	66	67	70	71	73	74	78	79	81
Valeurs de k pour $p=2$..............	43	44	45	46	47	48	49	50						
Valeurs correspondantes de λ............	82	85	86	88	89	94	95	97						
Valeurs de k pour $p=3$..............	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Valeurs correspondantes de λ............	1	2	4	5	6	8	9	10	13	14	15	17	18	19
Valeurs de k pour $p=3$..............	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Valeurs correspondantes de λ............	21	22	23	26	27	28	30	31	32	34	35	36	40	41
Valeurs de k pour $p=3$..............	29	30	31	32	33									
Valeurs correspondantes de λ............	42	44	45	46	48									
Valeurs de k pour $p=5$..............	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Valeurs correspondantes de λ............	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16
Valeurs de k pour $p=5$..............	15	16	17	18	19	20								
Valeurs correspondantes de λ............	18	19	20	21	22	24								
Valeurs de k pour $p=7$..............	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Valeurs correspondantes de λ............	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	16

Les valeurs de λ pour tous les nombres premiers suivants, nommément pour $p=11$, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97, inférieurs à 100, sont respectivement égales aux nombres k, en supposant que le produit que l'on considère kp ne surpasse pas 100.

4. Nous pouvons passer actuellement à la recherche du *facteur numérique invariable* de la fonction entière

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

réductible ou irréductible, mais délivrée du facteur commun qui pourrait exister entre les coefficients a_0, a_1, $a_2\ldots\ldots a_{m-1}$, a_m. Pour décider si ce polynôme est simplement divisible par le nombre premier p, m n'étant pas inférieur à p, on aura recours au 1er *Corollaire* (n° 2). Ainsi, par exemple, pour savoir si la fonction

$$2x^4+x^3+x^2-7x+3$$

est *identiquement* congrue à zéro suivant le module 3, on divisera cette fonction par x^3-x; on aura $2x+1$ pour quotient et $3x^2-6x+3$ pour reste. Par conséquent

$$2x^4+x^3+x^2-7x+3=(x^3-x)(2x+1)+3x^2-6x+3.$$

Or, puisque chacun des trois coefficients 3, —6, 3 du reste $3x^2-6x+3$ est divisible par 3, on en conclura que la congruence

$$2x^4+x^3+x^2-7x+3\equiv 0 \pmod{3}$$

a lieu *identiquement*.

Au lieu de diviser la fonction donnée par la différence x^3-x, on aurait pu prendre pour diviseur la factorielle $(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$, et l'on serait arrivé à la même conséquence.

Quand le degré m de la fonction $f(x)$ est inférieur à p, son identité exige, comme l'on sait, que chacun de ses coefficients soit divisible par p; par conséquent les coefficients de $f(x)$ auront alors p pour facteur commun. Or, comme ce cas a été exclu par ce qui précède, nous n'aurons à considérer que celui où le degré m de la fonction est égal ou supérieur au module p. Nous ferons observer en même temps que le *diviseur numérique invariable* que l'on cherche sera nécessairement diviseur du dernier terme a_m de la fonction $f(x)$. En effet, soit N un module quelconque; la congruence

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m\equiv 0 \pmod{N}$$

devant être *identique*, on aura, en y faisant $x=N$,

$$a_m\equiv 0 \pmod{N}.$$

Il suit de ce que nous venons de dire qu'une fonction de la forme

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+1$$

n'admettra jamais de *diviseur numérique invariable*, et qu'un diviseur de cette nature ne pourra évidemment, dans aucun cas, surpasser le dernier terme a_m de $f(x)$, en supposant toutefois que a_m n'est pas nul.

Après ces préliminaires considérons le cas général, c'est-à-dire celui où le diviseur invariable, que nous représenterons par N, sera un nombre composé, égal, par conséquent, à un produit de la forme $p^\alpha.q^\beta.r^\gamma\ldots.$, p, q, $r\ldots.$ désignant des nombres premiers, et α, β, $\gamma\ldots.$ des entiers positifs quelconques. Soit donc la fonction donnée

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$

dont on cherche *le diviseur numérique invariable* N. On commencera par décomposer le nombre a_m en facteurs premiers; supposons que l'on ait ainsi trouvé

$$a_m=2^a.3^b.5^c\ldots.$$

Le diviseur invariable N ne pourra être lui même que de la forme

$$N=2^\alpha.3^\beta.5^\gamma\ldots.$$

$\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ ne surpassant pas respectivement les exposants $a, b, c \ldots\ldots$ De plus, conformément à l'observation faite plus haut, on ne devra soumettre à l'examen que les nombres premiers $2, 3, 5 \ldots\ldots$ qui ne dépassent pas le degré m de la fonction $f(x)$.

Cela posé, pour résoudre complètement la question, il faudra assigner les caractères qui fixent en général la valeur de l'exposant μ de la plus haute puissance d'un nombre premier quelconque p, qui divise *identiquement* la fonction $f(x)$. En d'autres termes, il faudra trouver la plus haute puissance p^μ pour laquelle la congruence

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \, (\text{mod.}\, p^\mu)$$

est satisfaite *identiquement*, c'est-à-dire pour toutes les p^μ valeurs

$$x = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots p,\ p+1,\ p+2 \ldots\ldots\ldots p^\mu - 1,\ p^\mu.$$

Nous allons exposer une transformation particulière de la fonction donnée

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

au moyen de laquelle on arrive facilement au but que l'on se propose.

Divisons $f(x)$ par le produit

$$(x-1)(x-2)(x-3) \ldots\ldots (x-p) = X_{1,p};$$

soit $X^{(m-p)}$ le quotient de la division et R_{p-1} le reste. Le quotient $X^{(m-p)}$ sera un polynôme du degré $m-p$, et le reste R_{p-1} du degré $p-1$. On aura

$$f(x) = R_{p-1} + X_{1,p} \cdot X^{(m-p)}.$$

Or, puisque la fonction $X_{1,p}$ s'annule pour chacune des valeurs $x = 1, 2, 3 \ldots\ldots p$, il faudra nécessairement que l'on ait

$$R_{p-1} \equiv 0 \, (\text{mod.}\, p^\mu).$$

De là on conclura, en vertu du *2d Corollaire* (n° 2), que chacun des coefficients du polynôme

$$R_{p-1} = A x^{p-1} + B x^{p-2} + \ldots\ldots G x + H$$

doit être divisible par p^μ; ainsi, si nous admettons que p^{μ_1} soit la plus haute puissance qui divise $A, B \ldots\ldots G, H$, il s'en suivra que

$$\mu \overline{\overline{<}} \mu_1.$$

De cette manière la congruence identique

$$f(x) \equiv 0 \, (\text{mod.}\, p^\mu)$$

pourra être remplacée par la suivante

$$X_{1,p} \cdot X^{(m-p)} \equiv 0 \, (\text{mod.}\, p^\mu).$$

S'il arrivait que μ_1 fut égal à zéro, on aurait visiblement $\mu = 0$, et par conséquent dans ce cas $f(x)$ ne saurait être *identiquement* divisible par aucune puissance de p. Nous supposerons dans ce qui va suivre que μ_1 n'est pas zéro. Le calcul serait également terminé si l'on

avait $\mu_1 = 1$; en effet, puisque $X_{1,p}$ est identiquement divisible par p, on en conclura de suite que $\mu = 1$. Supposons donc $\mu_1 > 1$.

Divisons $X^{(m-p)}$ par

$$(x-p-1)(x-p-2)\ldots.(x-2p) = X_{p+1,2p} \;;$$

soit $X^{(m-2p)}$ le quotient de la division et R'_{p-1} le reste; on aura

$$X_{1,p}\,.\,X^{(m-p)} = X_{1,p}\,.\,R'_{p-1} + X_{1,p}\,.\,X_{p+1,2p}\,.\,X^{(m-2p)} \equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\mu}),$$

ou bien

$$X_{1,p}\,.\,R'_{p-1} + X_{1,2p}\,.\,X^{(m-2p)} \equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\mu}).$$

Or, comme la fonction $X_{1,2p}$ s'annulle pour les valeurs

$$x = p+1,\;\; p+2,\;\; p+3\;\ldots..\;2p$$

qui ne réduisent pas à zéro $X_{1,p}$, il faudra que l'on ait

$$X_{1,p}\,.\,R'_{p-1} \equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\mu}).$$

En représentant par μ_2 l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise chacun des coefficients A', B'.... G', H' de la fonction

$$R'_{p-1} = A'x^{p-1} + B'x^{p-2} + \ldots. + G'x + H',$$

on conclura, en vertu de la **Proposition 3ème** (n° 3), que le produit $X_{1,p}\,.\,R'_{p-1}$ sera identiquement congru à zéro suivant le module p^{μ_2+1}, c'est-à-dire qu'on aura

$$X_{1,p}\,.\,R'_{p-1} \equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\mu_2+1}),$$

et par suite

$$\mu \overline{\gtrless} \mu_2 + 1.$$

Si l'on avait $\mu_2 = 0$, il en résulterait que l'exposant cherché μ est égal à 1, car on aurait en même temps

$$\mu \overline{\gtrless} \mu_1 \quad , \quad \mu \overline{\gtrless} 1,$$

μ_1 n'étant pas nul. Admettons que μ_2 ne se réduise pas à zéro, et continuons le calcul dans cette hypothèse.

Divisons le polynôme $X^{(m-2p)}$ par

$$(x-2p-1)(x-2p-2)\ldots.(x-3p) = X_{2p+1,3p}\,;$$

soit $X^{(m-3p)}$ le quotient de la division et R''_{p-1} le reste; on aura

$$X_{1,2p}\,.\,X^{(m-2p)} = X_{1,2p}\,.\,R''_{p-1} + X_{1,2p}\,.\,X_{2p+1,3p}\,.\,X^{(m-3p)} \equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\mu}),$$

ou bien

$$X_{1,2p}\,.\,R''_{p-1} + X_{1,3p}\,.\,X^{(m-3p)} \equiv 0\,(\text{mod.}\,p^{\mu}).$$

Or, comme la fonction $X_{1,3p}$ s'annulle pour les valeurs

$$x = 2p+1,\;\; 2p+2,\;\; 2p+3\;\ldots.\;3p$$

qui ne réduisent pas à zéro $X_{1,2p}$, il faudra nécessairement que l'on ait

$$X_{1,2p}.\ R''_{p-1} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^{\mu}).$$

Soit p^{μ_3} la plus haute puissance de p qui divise chacun des coefficients de R''_{p-1}, et λ_2 la puissance supérieure de p qui divise identiquement la factorielle $X_{1,2p}$. On aura, conformément à la **Proposition 3ème**,

$$X_{1,2p}.R''_{p-1} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^{\mu_3+\lambda_2}),$$

et par conséquent

$$\mu \overline{\overline{<}} \mu_3+\lambda_2.$$

Le nombre λ_2 se détermine immédiatement au moyen de la formule

$$\lambda_2 = \frac{2p - \Sigma(2p)_p}{p-1} = 2 + \frac{2-\Sigma(2)_p}{p-1}.$$

Cette expression nous fait voir de suite que quand $p=2$, la factorielle $X_{1,2p}$ est divisible par $p^3 = 2^3$; l'exposant λ_2 sera donc égal à 3 dans ce cas. Pour toute autre valeur de p on aura $\lambda_2 = 2$.

La table que nous avons donnée à la fin du n° 3 nous dispensera du calcul de l'exposant de la plus haute puissance λ du nombre premier p par laquelle la factorielle $1.2.3\ldots kp$ est divisible. Ainsi, nous supposerons, dans ce qui va suivre, que l'exposant désigné par la lettre λ, avec des indices au-dessous, est connu.

Nous observerons ici, comme plus haut, que si l'on avait $\mu_3 = 0$, l'exposant μ serait déterminé par les conditions

$$\mu \overline{\overline{<}} \mu_1 \;,\; \mu \overline{\overline{<}} \mu_2+1 \;,\; \mu \overline{\overline{<}} \lambda_2,$$

et serait par conséquent égal au plus petit des trois nombres μ_1, μ_2+1, λ_2.

Supposons qu'en poursuivant la même opération, aucun des exposants, représentés par μ avec des indices, ne se soit réduit à zéro, et que l'on soit arrivé au quotient $X^{(m-kp)}$ et au reste $R^{(k-1)}_{p-1}$; on aura

$$X_{1,(k-1)p}.R^{(k-1)}_{p-1} + X_{1,kp}.X^{(m-kp)} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^{\mu});$$

comme la fonction $X_{1,kp}$ s'annule pour les valeurs

$$x = (k-1)p+1,\ (k-1)p+2, \ldots . kp$$

qui ne réduisent pas à zéro $X_{1,(k-1)p}$, il faudra que l'on ait

$$X_{1,(k-1)p}.R^{(k-1)}_{p-1} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^{\mu}).$$

Admettons que l'exposant μ_k de la puissance supérieure de p qui divise chacun des coefficients du reste

$$R_{p-1}^{(k-1)} = A^{(k-1)}x^{p-1} + B^{(k-1)}x^{p-2} + \ldots. + G^{(k-1)}x + H^{(k-1)}$$

n'est pas nul; de plus, soit $p^{\lambda_{k-1}}$ la plus haute puissance de p qui divise la factorielle $1.2.3\ldots.(k-1)p$; on aura identiquement (**Proposition 3ème**)

$$X_{1,\,(k-1)p} \,.\, R_{p-1}^{(k-1)} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^{\mu_k+\lambda_{k-1}}).$$

Donc

$$\mu \overline{\overline{<}}\, \mu_k + \lambda_{k-1}.$$

En définitive, si aucun des exposants μ_1, μ_2, $\mu_3\ldots.$ ne se réduit à zéro, on arrivera au dernier quotient $X^{(m-Kp)}$ et au dernier reste $R_{p-1}^{(K-1)}$, K étant le plus grand entier compris dans le quotient numérique $\frac{m}{p}$. La congruence identique

$$X_{1,(K-1)p} \,.\, R_{p-1}^{(K-1)} + X_{1,Kp} \,.\, X^{(m-Kp)} \equiv 0 \;(\text{mod.}\; p^{\mu})$$

entrainera la suivante

$$X_{1,(K-1)p} \,.\, R_{p-1}^{(K-1)} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^{\mu}),$$

en observant que le facteur $X_{1,Kp}$ s'annule pour chacune des valeurs

$$x = (K-1)p+1\;,\;\; (K-1)p+2\ldots\ldots Kp,$$

et que la factorielle $X_{1,(K-1)p}$, pour ces mêmes valeurs, ne se réduit pas à zéro.

Soit λ_{K-1} l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise la factorielle numérique $1.2.3\ldots.(K-1)p$, et μ_K, que nous ne supposons pas nul, celui de la plus haute puissance de p qui divise chacun des coefficients du reste

$$R_{p-1}^{(K-1)} = A^{(K-1)}\,x^{p-1} + B^{(K-1)}x^{p-2} + \ldots. + G^{(K-1)}x + H^{(K-1)}.$$

On aura

$$X_{1,(K-1)p} \,.\, R_{p-1}^{(K-1)} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^{\mu_K+\lambda_{K-1}}),$$

et par conséquent

$$\mu \overline{\overline{<}}\, \mu_K + \lambda_{K-1}.$$

Cela posé, il ne restera plus qu'à examiner la dernière condition

$$X_{1,Kp} \,.\, X^{(m-Kp)} \equiv 0 \;(\text{mod.}\; p^{\mu}).$$

Or puisque, par hypothèse, tous les restes R_{p-1}, R'_{p-1}, R''_{p-1} .... $R_{p-1}^{(K-1)}$ sont *identique-*

ment divisibles au moins par la première puissance de p, et que tous les coefficients de $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ ne le sont pas, il s'en suit que les coefficients du polynôme $X^{(m-Kp)}$, dont le degré est inférieur à p, ne pourront pas être tous divisibles par p. Si l'on représente donc par λ_K l'exposant de la plus haute puissance qni divise *identiquement* la fonction $X_{1,Kp}$, ou, ce qui revient au même, la factorielle numérique $1.2.3 \dots Kp$, on aura, en vertu de la **Proposition 3ème**,

$$X_{1,Kp} \,.\, X^{(m-Kp)} \equiv 0 \ (\text{mod. } p^{\lambda_K}),$$

et par suite

$$\mu \overline{\overline{<}} \lambda_K .$$

Ici le calcul est terminé. En effet, en remontant successivement aux conditions

$$\begin{array}{l} \mu \overline{\overline{<}} \mu_1 \\ \mu \overline{\overline{<}} \mu_2 + 1 \\ \mu \overline{\overline{<}} \mu_3 + \lambda_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu \overline{\overline{<}} \mu_k + \lambda_{k-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu \overline{\overline{<}} \mu_K + \lambda_{K-1} \\ \mu \overline{\overline{<}} \lambda_K , \end{array}$$

on en tire la conséquence que l'exposant cherché μ sera égal au plus petit des $K+1$ nombres:

$$\mu_1 \,,\, \mu_2 + 1 \,,\, \mu_3 + \lambda_2 \dots \mu_k + \lambda_{k-1} \dots\dots \mu_K + \lambda_{K-1} \,,\, \lambda_K .$$

et le problème se trouvera ainsi résolu. On fera exactement le même calcul pour chacun des facteurs premiers, inférieurs à m, du dernier terme a_m du polynôme

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m ;$$

le produit de tous les diviseurs, analogues à p^μ, représentera le *diviseur numérique invariable* N que nous avions en vue de déterminer.

5. Le calcul que nous venons d'exposer pour déterminer le nombre μ pourra souvent être considérablement simplifié eu égard aux propriétés les plus simples des congruences. Nous allons indiquer succinctement ces simplifications. Et d'abord, observons que dans la congruence qu'on suppose *identique*

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \ (\text{mod. } N),$$

on pourra réduire tous les coefficients $a_0, a_1 \ldots . a_{m-1}$ à des nombres inférieurs au dernier terme a_m et congrus à zéro suivant le module a_m, ce qui est évident puisque N doit diviser a_m. De plus, lorsque l'on traitera, après cette réduction, la congruence partielle

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots . + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^\mu),$$

on pourra encore abaisser les nouveaux coefficients de la même manière relativement au module p^α, p^α étant la plus haute puissance qui divise a_m. On emploiera cette même abréviation jusqu'à la fin du calcul, c'est-à-dire on réduira les coefficients, dans tous les quotients partiels, suivant le même module p^α.

Il peut aussi arriver que, parvenu, par exemple, à la congruence

$$X_{1,(k-1)p} \,.\, R_{p-1}^{(k-1)} + X_{1,kp} \,.\, X^{(m-kp)} \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^\mu),$$

l'exposant λ_k de la puissance p^{λ_k} qui divise la factorielle $1.2.3 \ldots . kp$ soit supérieur à chacun des nombres : μ_1, $\mu_2 + 1$, $\mu_3 + \lambda_2 \ldots . \mu_k + \lambda_{k-1}$, ou égal au plus grand d'entr'eux. L'opération sera terminée, et l'exposant cherché μ sera visiblement égal au plus petit nombre de la même série μ_1, $\mu_2 + 1$, $\mu_3 + \lambda_2 \ldots . \mu_k + \lambda_{k-1}$.

Enfin, conformément à la remarque qui a déjà été faite dans le n° précédent, le calcul se termine également quand on arrive à un reste

$$R_{p-1}^{(k)} = A^{(k)} x^{p-1} + B^{(k)} x^{p-2} + \ldots . + G^{(k)} x + H^{(k)},$$

dont les coefficients $A^{(k)}, B^{(k)} \ldots . G^{(k)}, H^{(k)}$ ne sont pas tous divisibles par p.

6. La transformation du polynôme $f(x)$ que nous avons donnée dans le n° 4 fournit un moyen très simple pour déterminer le *minimum* m du degré de $f(x)$ avec la condition que la congruence

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots . + a_{m-1} x + a_m \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p^\mu),$$

pour un exposant μ donné, soit *identique*. La transformation dont nous parlons réduit la fonction $f(x)$ à la somme

$$f(x) = R_{p-1} + X_{1,p} \,.\, R'_{p-1} + X_{1,2p} \,.\, R''_{p-1} + \ldots . + X_{1,kp} \,.\, R_{p-1}^{(k)} + \ldots$$
$$\ldots . + X_{1,Kp} \,.\, X^{(m-Kp)}.$$

Or, comme K représente le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{m}{p}$, le degré de la fonction $X^{(m-Kp)}$ sera inférieur à p, et ce polynôme ne pourra pas être *identiquement* congru à zéro suivant le module p. En effet, il faudrait pour cela que chacun des coefficients de $X^{(m-Kp)}$ fut divisible par p, ce qui ne peut avoir lieu, car tous les coefficients des restes suc-

cessifs R_{p-1}, R'_{p-1}, R''_{p-1} ..... $R^{(k)}_{p-1}$ .... $R^{(K-1)}_{p-1}$ sont divisibles par p, tandis que ceux de la fonction $f(x)$ ne le sont pas par hypothèse. Observons de plus que le dernier terme de la transformée, égal au produit

$$X_{1,Kp} . X^{(m-Kp)},$$

sera, d'après la **Proposition 3ème**, *identiquement* divisible par la même puissance de p que la factorielle numérique

$$1.2.3....Kp,$$

c'est-à-dire par p^{λ_K}, l'exposant λ_K étant déterminé par la formule

$$\lambda_K = \frac{Kp - \Sigma(Kp)_p}{p-1} = K + \frac{K - \Sigma(K)_p}{p-1}.$$

Cela posé, il est facile de conclure de ce qui vient d'être dit, que la plus haute puissance de p qui puisse diviser *identiquement* la fonction $f(x)$ est p^{λ_K}; il est visible qu'il faut pour cela qu'aucun des nombres de la série μ_1, μ_2+1, $\mu_3+\lambda_2$ ..... $\mu_k+\lambda_{k-1}$ ..... $\mu_K+\lambda_{K-1}$ ne soit inférieur à λ_K. Par conséquent, pour que l'exposant m soit *minimum*, il suffit de supposer que le degré de la fonction $X^{(m-Kp)}$ est zéro, c'est-à-dire que $X^{(m-Kp)}$ se réduit à une constante, non-divisible par p. Ainsi, s'il s'agissait de déterminer le degré *minimum* m d'une fonction $f(x)$, *identiquement* divisible par p^{μ}, nous chercherions dans la table du n° 3 la valeur de λ, égale ou immédiatement supérieure à μ; soit λ_K cette valeur. Le degré *minimum* cherché m sera égal au produit Kp.

Supposons, par exemple, qu'on veuille déterminer le degré *minimum* de la fonction qui serait *identiquement* divisible par 3^{12}. Nous cherchons dans la table la valeur de λ, égale ou immédiatement supérieure à 12, relative au nombre premier 3; nous trouvons $\lambda = 13$, valeur qui correspond à $K = 9$. Donc, la valeur *minimum* du degré m sera $9.3 = 27$. Il est d'ailleurs évident qu'on eut trouvé le même nombre 27 si, au lieu du diviseur 3^{12}, on eut considéré le diviseur 3^{13}.

Le degré *minimum* m de la fonction $f(x)$ pour un diviseur numérique invariable quelconque

$$N = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} ....$$

se trouve avec la même facilité au moyen de la table. En effet, soit λ_K la valeur de λ, égale ou immédiatement supérieure à α, pour le nombre premier p; désignons par $\lambda'_{K'}$, $\lambda''_{K''}$ ..... les nombres analogues relatifs aux exposants β, γ ..... des nombres premiers q, r ....., tirés de la même table. Le plus grand des produits

$$Kp, \quad K'q, \quad K''r .....$$

sera précisément la valeur *minimum* de m que l'on cherche. Ainsi, si l'on avait

$$N = 2^6 . 3^5 . 5^3,$$

et par conséquent $p=2$, $q=3$, $r=5$, $\alpha=6$, $\beta=5$, $\gamma=3$, on trouverait par la table

$$\lambda_4=7,\quad \lambda'_4=5,\quad \lambda''_3=3,\quad K=4,\quad K'=4,\quad K''=3,$$

ce qui donne

$$Kp=4.2=8,\quad K'q=4.3=12,\quad K''r=3.5=15.$$

Comme le nombre 15 est le plus grand des trois produits 8, 12, 15, il représentera la valeur *minimum* cherchée de m. Ainsi, la factorielle

$$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-14)(x-15),$$

dont le développement est un polynôme du 15ème degré, sera *identiquement* divisible par le nombre $2^6.3^5.5^3$.

7. Ce que nous avons dit dans le n° précédent donne naturellement lieu à la remarque suivante : on sait que la fonction x^p-x est la plus simple du nombre de celles qui sont *identiquement* congrues à zéro suivant le module premier p. De même, les expressions

$$(x^p-x)^n,\quad (x^{p^{n-1}(p-1)}-1)x^n$$

seront, toutes les deux, *identiquement* divisibles par la puissance p^n. Mais elles ne seront pas généralement les plus simples de celles qui jouissent de cette propriété : en effet, le degré np de la première d'entr'elles, et le degré $p^{n-1}(p-1)+n$ de la seconde, seront, en général, supérieurs à l'exposant Kp trouvé plus haut. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, nous avons $p=3$, $n=12$, et par conséquent $np=36$, $p^{n-1}(p-1)+n=3^{11}.2+12$, tandis que le produit Kp n'est égal qu'à 27. Quand il s'agira donc de modules composés, il faudra, pour arriver aux résultats les plus généraux et en même temps les plus simples, remplacer les formules

$$(x^p-x)^n\equiv 0\,(\text{mod.}\,p^n),\quad (x^{p^{n-1}(p-1)}-1)x^n\equiv 0\,(\text{mod.}\,p^n)$$

par la formule factorielle

$$X_{1,Kp}=(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-Kp)\equiv 0\ (\text{mod.}\,p^{\lambda K}).$$

8. Appliquons la méthode qui vient d'être exposée à un exemple numérique. Soit donnée la fonction irréductible du 9ème degré

$$f(x)=x^9-x^3+2520\,;$$

il s'agit de déterminer son *diviseur numérique invariable*. Ce diviseur, s'il existe, devra être facteur du dernier terme 2520 ; par conséquent, en observant que

$$2520=2^3.3^2.5.7,$$

les nombres premiers à essayer seront 2, 3, 5 et 7.



Commençons par le nombre premier 2. En divisant $x^9 - x^3 + 2520$ par

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2,$$

on trouve pour premier quotient

$$X^{(7)} = x^7 + 3x^6 + 7x^5 + 15x^4 + 31x^3 + 63x^2 + 126x + 252$$

et pour premier reste

$$R_1 = 2^3.63\,x + 2^5.63.$$

Ainsi, le nombre 2^3 pourrait être diviseur de la fonction que l'on considère; reste à savoir s'il l'est réellement. Pour cela on continue l'opération, et l'on trouve en divisant $X^{(7)}$ par $(x-3)(x-4) = x^2 - 7x + 12$ le second quotient

$$X^{(5)} = x^5 + 10x^4 + 65x^3 + 350x^2 + 1701x + 7770$$

et le second reste

$$R'_1 = 2^3.4263x - 2^2.23247.$$

Comme ce reste est identiquement divisible par 2^2, et que son premier facteur $(x-1)(x-2)$ l'est par la première puissance de 2, le second terme de la fonction $f(x)$, transformée, sera divisible, comme le premier, par 2^3.

Divisons actuellement $X^{(5)}$ par le produit $(x-5)(x-6) = x^2 - 11x + 30$; nous obtiendrons le troisième quotient

$$X^{(3)} = x^3 + 21x^2 + 266x + 2646$$

et le troisième reste

$$R''_1 = 22827x - 71610,$$

qui n'est plus identiquement divisible par 2, mais dont le facteur $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ est divisible par 2^3. De là nous pouvons déjà conclure que la fonction donnée $x^9 - x^3 + 2520$ est *identiquement* divisible par 2^3. En effet, considérons la transformée

$$x^9 - x^3 + 2520 = R_1 + (x-1)(x-2)R'_1$$
$$+ (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)R''_1 + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)X^{(3)};$$

comme chacun des trois premiers termes de son second membre est identiquement divisible par 2^3, et que de plus le facteur de $X^{(3)}$ dans le dernier terme, ainsi qu'on le voit de suite par la table, est divisible par 2^4, on en conclut de suite l'identité de la congruence

$$x^9 - x^3 + 2520 \equiv 0 \pmod{2^3}.$$

Passons maintenant au nombre premier 3. En divisant $x^9 - x^3 + 2520$ par

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$$

on trouve

$$X^{(6)} = x^6 + 6x^5 + 25x^4 + 90x^3 + 301x^2 + 966x + 3024$$

pour premier quotient, et

$$R_2 = 3^2.1036x^2 - 3^2.3052x + 3^2.2296$$

pour premier reste, d'où l'on conclut que $x^9 - x^3 + 2520$ pourrait être identiquement divisible par 3^2; on s'assure de cette divisibilité en continuant le calcul. Divisons donc $X^{(6)}$ par $(x-4)(x-5)(x-6) = x^3 - 15x^2 + 74x - 120$; on trouvera pour second quotient

$$X^{(3)} = x^3 + 21x^2 + 266x + 2646$$

et pour second reste

$$R'_2 = 3.7609x^2 - 3^2.1810x + 3.106846.$$

Ici le calcul est terminé, ce que l'on voit de suite par la transformée

$$x^9 - x^3 + 2520 =$$

$$R_2 + (x-1)(x-2)(x-3)R'_2 + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)X^{(3)};$$

en effet, son premier terme R_2 est identiquement divisible par 3^2; le second également, puisque chacun de ses facteurs $(x-1)(x-2)(x-3)$ et R'_2 est congru à zéro suivant la première puissance de 3; quant au troisième terme, son premier facteur, c'est-à-dire la factorielle

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)x-6),$$

est identiquement divisible par 3^2. Donc on aura la congruence *identique*

$$x^9 - x^3 + 2520 \equiv 0 \pmod{3^2}.$$

Il ne reste plus à essayer que les facteurs simples 5 et 7 du nombre 2520. Pour savoir si $x^9 - x^3 + 2520$ est identiquement divisible par 5, on devra diviser cette fonction soit par la factorielle $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$, soit par la différence $x^5 - x$ qui est plus simple. En divisant donc $x^9 - x^3 + 2520$ par $x^5 - x$, on obtient le quotient $x^4 + 1$ et le reste $-x^3 + x + 2520$. Or, comme ce reste n'est pas identiquement divisible par 5, il s'en suit que le polynôme $x^9 - x^3 + 2520$ n'est pas identiquement congru à zéro suivant le module 5. Donc, le nombre 5 n'entre pas, comme facteur, dans le diviseur invariable cherché.

Enfin, si l'on divise $x^9 - x^3 + 2520$ par $x^7 - x$, on reconnaitra que $x^9 - x^3 + 2520$ est identiquement divisible par 7. En effet, on aura x^2 pour quotient et le nombre 2520, multiple de 7, pour reste. Donc, définitivement, le *diviseur numérique invariable* du polynôme $x^9 - x^3 + 2520$ sera égal au produit $2^3.3^2.7 = 504$, et le quotient

$$\frac{x^9 - x^3 + 2520}{504} = E,$$

pour une valeur entière quelconque de x, se réduira toujours à un entier. Ainsi, pour $x=0$ et 1, ce quotient E obtient la valeur 5, pour $x=2$, $E=6$, pour $x=3$, $E=44$, pour $x=4$, $E=525$ etc. On voit que ces quatre valeurs de E n'ont pas de diviseurs communs, et que le nombre $E=5$ est *premier*.

L'exemple que nous venons de traiter, sans aucune abréviation de calcul, est très simple; c'est pourquoi on aurait pu parvenir à la valeur du diviseur invariable cherché d'une manière encore plus expéditive. En effet, si l'on observe que dans l'expression

$$f(x) = x^9 - x^3 + 2520 = x^3(x^2-1)(x^2+1) + 2520$$

le facteur x^2-1 est divisible par $8=2^3$ pour toutes les valeurs impaires de x, et x^3 pour toutes les valeurs paires, on en conclut que $x^3(x^2-1)$ est identiquement divisible par 2^3, et par suite la fonction $f(x)$ elle même, à cause du nombre 2520, multiple de 8. De même, puisqu'en vertu du *théorème d'Euler* la différence x^6-1 est congrue à zéro suivant le module 3^2 pour des valeurs de x non-divisibles par 3, on aura la congruence identique

$$x^2(x^6-1) \equiv 0 \pmod{3^2},$$

qui entraine la suivante :

$$x^9 - x^3 + 2520 = x.x^2(x^6-1) + 2520 \equiv 0 \pmod{3^2}.$$

Enfin, par le *théorème de Fermat*, x^6-1 est divisible par 7 quand x est premier à 7; par conséquent x^7-x, et par suite $x^9-x^3+2520 = x^2(x^7-x)+2520$, sera toujours divisible par 7. On obtiendra donc de cette manière le même *diviseur numérique invariable* $2^3.3^2.7 = 504$.

9. Après la méthode que nous avons exposée pour la détermination du *diviseur numérique invariable* d'une fonction entière à une seule indéterminée, on pourrait se proposer de généraliser le procédé en l'étendant à une fonction entière à plusieurs indéterminées indépendantes. La solution complète de cette question donnerait lieu, peut-être, à quelques difficultés. Mais, dans des cas particuliers, on trouve souvent le diviseur cherché d'une manière fort simple. Pour en présenter un exemple, rappelons nous d'une propriété bien connue des solutions de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

x, y et z étant des entiers. On sait que le produit xyz des trois nombres satisfaisant à cette équation est toujours divisible par 60. Or, comme sa solution générale est donnée par les formules

$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \; z = u^2 + v^2,$$

u et v étant des entiers arbitraires, il s'en suit que le produit

$$2uv(u^4 - v^4) = xyz$$

est toujours divisible par 60, ou bien que la fonction du 6ème degré à deux indéterminées indépendantes

$$uv(u^4-v^4)$$

est constamment divisible par $30 = 2.3.5$.

Pour le prouver, il suffira de prendre en considération que l'on a *identiquement*

$$vu^p - uv^p \equiv 0 \,(\text{mod. } p),$$

p étant un nombre premier quelconque, et u, v des entiers arbitraires. L'identité de cette congruence est manifeste : en effet, quand u et v sont premiers à p, le *théorême de Fermat* donne

$$u^{p-1} - 1 \equiv 0 \,(\text{mod.} p)\,, \quad v^{p-1} - 1 \equiv 0 \,(\text{mod.} p),$$

et par conséquent

$$u^{p-1} - v^{p-1} \equiv 0 \,(\text{mod.} p),$$

congruence qui a également lieu quand u et v sont tous deux multiples de p. Pour l'étendre au cas où l'un de ces deux nombres seulement serait multiple de p, il suffit de la multiplier par le produit uv, ce qui donnera de suite

$$vu^p - uv^p \equiv 0 \,(\text{mod.} p), \text{ ou bien } uv\,(u^{p-1} - v^{p-1}) \equiv 0 \,(\text{mod.} p).$$

Cela posé, en prenant successivement $p = 2$, 3 et 5, on obtient les formules

$$uv\,(u-v) \equiv 0 \,(\text{mod. } 2)\,, \quad uv\,(u^2-v^2) \equiv 0 \,(\text{mod. } 3)\,, \quad uv\,(u^4-v^4) \equiv 0 \,(\text{mod. } 5),$$

et comme la fonction que l'on considère

$$uv\,(u^4-v^4)$$

est divisible sans reste par chacune des trois expressions

$$uv\,(u-v)\,, \quad uv\,(u^2-v^2)\,, \quad uv\,(u^4-v^4)\,,$$

on en conclut immédiatement qu'elle est divisible par les trois facteurs premiers 2, 3, 5, et par conséquent par leur produit $2.3.5 = 30$. Donc, le quotient

$$\frac{uv\,(u^4-v^4)}{30},$$

pour des valeurs entières quelconques de u et v, sera toujours lui même un entier.

10. L'analyse exposée dans les nn^{os} précédents résout complètement la question de la détermination du *diviseur numérique invariable* d'une fonction entière, réductible ou irréductible, à une seule indéterminée. En se débarassant, par la division, de ce facteur invariable, on arrive, quand on opère sur une fonction irréductible, à un polynôme que nous avons appelé



indivisible (n° 1). Ainsi, dans l'exemple du n° 8, comme la fonction $x^9 - x^3 + 2520$ est irréductible, et qu'elle a pour *diviseur invariable* le nombre 504, le trinôme

$$\frac{x^9 - x^3 + 2520}{504} = \frac{x^9 - x^3}{504} + 5$$

sera *indivisible*, et représentera, comme il est impossible d'en douter, *une infinité de nombres premiers*, en attribuant successivement à x toutes les valeurs entières possibles. La propriété que nous venons de signaler, et qui se rapporte aux fonctions *indivisibles*, est l'extension du fameux théorème connu sur les *progressions arithmétiques*, en vertu duquel *toute progression de cette nature, dont la raison et la différence sont des nombres premiers entr'eux, comprend une infinité de nombres premiers.* Cette proposition, qu'on démontre rigoureusement, a lieu pour la fonction linéaire *indivisible*

$$a_0 x + a_1 ;$$

or, nous affirmons que la même propriété a également lieu pour le polynôme d'un degré quelconque m

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots . + a_{m-1} x + a_m ,$$

lorsque ce polynôme est *indivisible* dans le sens que nous avons attaché à ce dernier terme à la fin du n° 1. Il en est de même d'une fonction entière *indivisible* à plusieurs indéterminées. Ainsi, l'expression

$$\frac{uv(u^4 - v^4)}{30},$$

traitée dans le n° précédent, comprend une infinité de nombres premiers en attribuant successivement des valeurs entières, tout-à-fait arbitraires, aux deux indéterminées u et v.

Il est à présumer que la démonstration rigoureuse du théorème énoncé sur les *progressions arithmétiques des ordres supérieurs* conduirait, dans l'état actuel de la théorie des nombres, à des difficultés insurmontables ; néanmoins, sa réalité ne peut pas être révoquée en doute. On pourrait présenter quelques considérations qui serviraient à renforcer la probabilité de l'exactitude du théorème dont il s'agit. Ainsi, en partant de l'hypothèse que le polynôme $f(x)$ est *indivisible*, c'est-à-dire qu'il n'admet aucun des deux caractères de divisibilité, mentionnés dans le n° 1, l'on pourrait raisonner de la manière suivante : la fonction $f(x)$ n'admet aucun caractère de divisibilité, tant qu'on n'attribue pas de valeurs particulières à x ; si donc, pour une valeur déterminée de x, elle devient divisible par un nombre quelconque, il faut en conclure que ce cas est exceptionnel, et qu'il est dû à la nature de la valeur particulière de x qu'on a employée. Or, si en donnant successivement à x toutes les valeurs entières, depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \infty$, on obtenait constamment pour $f(x)$ des nombres composés, ne serait-il pas naturel de conclure que la divisibilité de $f(x)$ est une propriété inhérente à cette fonction ? Une telle assertion impliquerait contradiction, car nous avons supposé plus haut que le polynôme

$f(x)$, pour x indéterminé, ne présente aucun caractère de divisibilité. Si l'on admettait ce mode de raisonnement, on en conclurait de suite que la fonction *indivisible* $f(x)$ représente une infinité de nombres premiers. En effet si, passé une certaine limite, par exemple $x = h$, $f(x)$ devenait constamment décomposable en facteurs, tous les cas, correspondant aux hypothèses $x = h + 1$, $h + 2$, $h + 3 \ldots$ *à l'infini*, deviendraient exceptionnels, ce qui ne peut avoir lieu.

Nous ferons observer en terminant que le théorême, en vertu duquel un polynôme indivisible comprend une infinité de nombres premiers, peut être considéré comme un corollaire d'un principe très général qu'on pourrait énoncer en ces termes :

Soit $f(x, y, z \ldots)$ une expression quelconque qui, pour des valeurs indéterminées des variables $x, y, z \ldots$, ne satisfait à aucune des conditions, nécessaires et suffisantes, pour que cette expression jouisse d'une certaine propriété P. Dans cette hypothèse, il existera une infinité de systèmes

$$x_0, y_0, z_0 \ldots\ldots, x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots, x_2, y_2, z_2 \ldots\ldots$$

tels que la propriété P n'aura pas lieu pour les fonctions

$$f(x_0, y_0, z_0 \ldots), \qquad f(x_1, y_1, z_1 \ldots), \qquad f(x_2, y_2, z_2 \ldots) \ldots\ldots$$

Ce principe général, dont on pourrait tirer un grand nombre de propositions particulières très remarquables, ne peut pas être révoqué; mais sa démonstration rigoureuse nous parait entièrement inabordable.

POSITIONS GÉOGRAPHIQUES

DÉTERMINÉES EN 1848

PAR LE LIEUTENANT-COLONEL LEMM

DANS

LE GOUVERNEMENT DE NOVGOROD.

MÉMOIRE

DE

M. O. Struve.

Lu le 28 mars 1851.

Le succès des opérations astronomico-géographiques, exécutées en 1847 par le Lieutenant-Colonel Lemm dans le pays des Cosaques du Don, sur lesquelles j'ai eu l'honneur de rapporter dans un mémoire précédent, eut pour suite un travail analogue, à exécuter en 1848, dans la partie boréale du gouvernement de Novgorod, et qui fut confié au même officier distingué. Le gouvernement de Novgorod qui s'étend sur 10° de longitude, entre les limites de latitude 57° 5′ et 61° 21′, est couvert, dans sa partie méridionale jusqu'au parallèle de 58° 30′ à peu près, par un réseau trigonométrique qui fait partie des vastes opérations géodésiques exécutées depuis 35 ans par l'État-Major Impérial. Dans la partie boréale de ce gouvernement, le sol marécageux et des forêts épais empêchent la continuation de la triangulation géodésique; or, pour pouvoir construire des cartes exactes de ce terrain, il n'y avait pas d'autre moyen de réussir, que la détermination astronomique d'un nombre suffisant de points distribués, autant que possible également, sur le terrain en question, jointe aux levées topographiques locales. La distance réciproque de chaque couple de points à déterminer fut fixée, à l'analogie des opérations de l'année précédente, à 50 verstes en moyenne, ce qui éleva le nombre des points à environ 35.

Je puis me dispenser de donner ici une relation detaillée sur les méthodes d'observation et de calcul, en renvoyant dans ce but à mon mémoire sur les opérations de l'année 1847. Le travail dont il s'agit ici ne diffère du travail antérieur, que dans quelques particularités des méthodes de réduction et des combinaisons des résultats, particularités que j'indiquerai spécialement.

La triangulation géodésique achevée dans la partie méridionale du gouvernement de Novgorod devait fournir les longitudes fondamentales, nécessaires à l'interpolation chronométrique des longitudes des points à déterminer. Parmi les différents points donnés par cette triangulation, nous choisimes, comme points normaux, les deux villes Borovitchi et Oustiouchna, situées sur la frontière même du terrain en question et bien accessibles de l'intérieur de ce terrain. Dans ces villes les clochers ou coupôles des églises, avaient été joints avec les stations géodé-

siques. L'Observatoire de Poulkova lui-même pouvait servir, au commencement du travail, comme troisième point fondamental, d'où le premier lieu à déterminer, la ville Novaja-Ladoga, n'est éloigné que de 150 verstes. Mais, pour ne pas obliger notre voyageur de retourner trop souvent sur des points situés au-delà des limites du terrain, il fut jugé utile de créer encore deux points normaux supplémentaires, situés au milieu du terrain, par des voyages réitérés entre ces points et ceux que nous venons d'indiquer. Il fut convenu que ces deux points normaux supplémentaires devaient être les villes Tikhwin et Kirilov, situées symétriquement par rapport au terrain en question.

L'appareil astronomique de M. Lemm est resté le même que dans les opérations de 1847, à la seule différence que l'Observatoire central lui ajouta encore deux chronomètres de qualité distinguée au nombre de six qu'il avait employés pendant son travail dans le pays des Cosaques du Don. C'est ainsi que l'astronome voyageur était pourvu, 1) pour l'observation des distances au zenith: d'un théodolite astronomique appartenant à l'Observatoire central, le même qu'il avait employé l'année précédente, 2) pour le transport du temps, de 8 chronomètres de boîte, dont 5 appartenaient à l'État-Major Impérial, Dent № 1687, 1730, 1739, 1787 et 1808, les trois autres Hauth № 11, Dent № 1818 et 1828 ayant été ajoutés de la part de l'Observatoire central. De ces derniers Hauth 11 est réglé sur le temps sidéral et devait servir soit à l'exécution des observations astronomiques, soit à la comparaison exacte, à l'aide des coïncidences, des autres chronomètres réglés sur le temps solaire moyen.

M. Lemm quitta Poulkova le 7 Juin, après avoir comparé ses chronomètres avec les pendules de l'Observatoire et y retourna le 29 Septembre. Il s'en suit que tout le voyage a duré 114 jours. Dans cet intervalle il a déterminé les positions de 41 points, y ayant employé 62 nuits d'observation. Ces chiffres ne donnent plus un rapport aussi favorable entre le temps employé et le résultat de la récolte, que ceux que nous avons trouvés pour les opérations de M. Lemm dans le pays des Cosaques du Don où, dans le même espace de temps, il avait réussi à déterminer 71 points par 93 nuits d'observation. Vu que, dans les deux opérations, les distances moyennes entre les points à déterminer ont été sensiblement égales, cette différence doit être attribuée en premier lieu au climat moins favorable du gouvernement de Novgorod, mais aussi, à la plus grande difficulté des voyages sur le sol marécageux du gouvernement septentrional. Ces obstacles ayant été prévus, des limites plus étroites avaient été fixées d'avance aux opérations de 1848, et nous devons nous rejouir que le zèle infatigable de M. Lemm a réussi à couvrir, dans le courant d'un seul été, par un réseau de positions astronomiques, tout le terrain indiqué, sans augmenter les distances moyennes des points déterminés et sans y laisser une seule lacune de quelque conséquence. Au contraire, 5 points déterminés se trouvent déjà au-delà des limites assignées aux opérations de l'été 1848. Il n'y a pas de doute M. Lemm aurait pu augmenter encore le nombre des déterminations, s'il avait suivi uniquement les grandes routes et s'il n'avait pas eu égard à la disposition uniforme des points; mais c'est un mérite particulier de son travail que, malgré toutes les difficultés qui s'y opposaient, tout le terrain désigné a été symétriquement couvert de positions astronomiques.

Le voyage de M. Lemm se divise en quatorze parties séparées entre elles par les arrivées sur les points fondamentaux et par les départs. J'en ferai ici l'énumération, en indiquant les différentes durées des voyages et le nombre des positions déterminées pendant chaque voyage isolé.

I	Poulkova à Tikhvin	7 juin	— 12 juin,	5 jours	3 positions
II	Tikhvin à Borovitchi	12 »	— 17 »	5 »	2 »
III	Borovitchi à Oustiouchna .	17 »	— 24 »	7 »	3 »
IV	Oustiouchna à Tikhvin ...	24 »	— 27 »	3 »	0 »
V	Tikhvin à Tikhvin	27 »	— 1 juillet	4 »	2 »
VI	Tikhvin à Tikhvin	1 juillet	— 13 »	12 »	4 »
VII	Tikhvin à Kirilov	14 »	— 25 »	11 »	7 »
VIII	Kirilov à Oustiouchna ...	25 »	— 28 »	3 »	1 »
IX	Oustiouchna à Oustiouchna	30 »	— 17 août	18 »	6 »
X	Oustiouchna à Kirilov ...	17 août	— 24 »	7 »	2 »
XI	Kirilov à Oustiouchna ...	24 »	— 27 »	3 »	0 »
XII	Oustiouchna à Kirilov ...	27 »	— 1 sept.	5 »	1 »
XIII	Kirilov à Kirilov	1 sept.	— 17 »	16 »	8 »
XIV	Kirilov à Poulkova......	17 »	— 29 »	12 »	0 »

Le nombre des positions déterminées s'élève ici à 39, auxquelles s'ajoutent encore les positions des deux points fondamentaux Tikhvin et Kirilov, de sorte qu'il en résulte le nombre total de 41 positions, tel que nous l'avons indiqué plus haut. Le tableau précédent fait voir que, pour la longitude de Tikhvin, nous aurons trois déterminations, en combinant

1) les voyages I et II
2) » » II et IV
3) » » IV, VII et VIII.

Également la longitude de Kirilov pourra être déduite, en combinant

1) les voyages IV, VII et VIII
2) » » VIII et X
3) » » X et XI
4) » » XI et XII.
5) » » XII, XIII et XIV

A cause de la plus grande durée du transport du temps, la combinaison des voyages IV, VII et VIII ne pourra guères donner, dans les deux cas, des résultats aussi exacts que ceux qui nous seront fournis par les autres combinaisons. Par cette raison nous n'avons attribué aux résultats déduits de la dite combinaison que la moitié du poids des autres déterminations. Aussi le résultat à déduire pour Kirilov, par la combinaison des voyages XII, XIII et XIV, ne peut-il avoir qu'un poids comparativement très petit, à cause de la durée prolongée du transport du

temps. A cela s'ajoute encore que pendant le dernier voyage XIV, entre Kirilov et Poulkova, M. Lemm n'a plus noté les indications du thermomètre et que la température est tombée plusieurs fois au-dessous de zéro. Par ces raisons il m'a paru nécessaire de rejeter entièrement cette dernière combinaison.

Le calcul des observations astronomiques faites au théodolite a été exécuté, en premier lieu, par M. Lemm lui-même. Pour n'y pas laisser subsister la plus petite inexactitude, un second calcul indépendant, des déterminations du temps et de la latitude, a été fait par trois officiers du Dépôt Topographique et du Corps des pilotes, qui à l'époque actuelle font leur cours d'astronomie pratique à l'Observatoire central. Après cette vérification je confiais le reste du travail, qui consistait en général dans la combinaison la plus favorable des résultats et dans le calcul définitif des longitudes, à M. Wagner, astronome surnuméraire de l'Observatoire central, en me réservant seulement la dernière vérification de tous les calculs.

Il est intéressant de comparer, sous le rapport de l'exactitude, les observations faites par M. Lemm en 1848, avec celles de l'année précédente. Commençons par les latitudes. En désignant de nouveau par S les latitudes déduites des observations des étoiles méridionales, par N celles que nous ont fournies, sur les mêmes lieux, les observations de la Polaire, nous trouvons en moyenne de 51 déterminations : $S - N = + 3''{,}46$ avec l'erreur probable $= 0''{,}36$. L'origine de ces $S - N$ doit être attribué à une flexion du tube ou à quelque autre cause agissante comme la flexion c.-à-d. en proportion du sinus de la distance au zénith. En partant de cette supposition M. Wagner a déduit le coefficient de la flexion à l'horizon $a = 2''{,}90$ avec l'erreur probable $= 0''{,}27$; puis il a corrigé chaque latitude observée de $\pm a \sin z$. Enfin les moyennes arithmétiques entre les valeurs corrigées de S et N, que nous désignerons pas S' et N', ont donné les latitudes définitives des lieux d'observation. Les $S' - N'$ regardés comme produits uniquement par les erreurs accidentelles des observations, nous donnent un jugement sur l'exactitude des observations. La valeur la plus probable d'un seul $S' - N'$ se trouve $= 2''{,}21$; par conséquent l'erreur probable d'une latitude basée sur 8 observations de deux étoiles ne s'élève qu'à $1''{,}10$, quantité sensiblement égale à celle que nous avons déduite pour les déterminations de 1847, savoir $1''{,}09$. Je remarque ici que, pendant les voyages de 1848, les $S - N$ ne montrent pas de telles périodicités que dans les opérations de l'année précédente. La quantité trouvée $1''{,}10$ doit donc être regardée comme la valeur réelle de l'erreur probable d'une latitude déterminée par 8 observations de deux étoiles situées l'une vers le Nord, l'autre vers le Sud du zénith.

Parmi toutes les latitudes déterminées en 1848, il n'y a qu'une seule, celle de Novaja-Ladoga, qui soit basée sur 8 observations d'une seule étoile méridionale. Dans ce cas la latitude directement calculée a été corrigée de $- 2''{,}90 \sin z = - 1''{,}09$, et son erreur probable s'élève à $1''{,}65$. Dans cinq autres cas M. Lemm a répété en différents jours, la détermination de la latitude, ce qui fait que l'erreur probable à craindre dans les valeurs moyennes des latitudes doit être diminuée en proportion de la racine carrée du nombre correspondant de déterminations. C'est ainsi que nous trouvons l'erreur probable

de la latitude de Tikhvin				$= 0\overset{''}{,}64$
»	»	»	d'Oustiouchna	$= 0,55$
»	»	»	de Kirilov	$= 0,64$
»	»	»	» Tcherepovetz	$= 0,78$
»	»	»	» Vologda	$= 0,78.$

La comparaison des déterminations répétées de ces cinq endroits, avec les moyennes correspondantes, nous fournit une seconde valeur de l'erreur probable d'une détermination du poids 1, de $0\overset{''}{,}95$, valeur encore plus petite que celle qui a été déduite de la discussion des $S - N$. Nous y puisons la conclusion que toutes les erreurs probables indiquées précédemment, sont notées plutôt trop fortes que trop faibles.

Également, dans la combinaison des résultats obtenus par le calcul direct des corrections de l'horloge d'observation, M. Wagner a eu égard à l'effet de la flexion. En adoptant la valeur de la flexion à l'horizon a, telle qu'elle a été déduite des déterminations des latitudes, chaque angle horaire calculé t fut corrigé de la quantité $dt = \frac{a \sin^2 z}{15 \cos\varphi \cos\delta \sin t}$. Après l'application de ces corrections, la moyenne arithmétique entre les résultats obtenus par les observations des étoiles à l'Est et à l'Ouest, fut regardée comme résultat définitif pour la correction de l'horloge, correspondant à l'époque moyenne entre celles des deux observations. En comparant entre elles les deux corrections de l'horloge, déterminées les mêmes jours par l'observation des étoiles à l'Est et à l'Ouest, M. Wagner a déduit l'erreur probable à craindre dans le résultat définitif d'une correction de l'horloge, basée sur 8 pointages de chaque étoile, $= 0\overset{s}{,}228$. Dans mon rapport sur les opérations de 1847 je n'avais attribué, aux déterminations du temps, qu'une erreur probable de $0\overset{s}{,}12$. La différence entre ces deux chiffres ne peut point surprendre, si l'on considère que, dans la valeur de 1848, il y entre encore toute la marche de l'horloge dans l'intervalle entre les deux déterminations, intervalle qui tantôt s'élevait à plus de deux heures. La marche moyenne du chronomètre d'observation n'a été que très petite en général, mais elle variait de $0\overset{s}{,}27$ par jour pour chaque degré de température; ce qui le rendit absolument impossible de l'éliminer des différences dans les déterminations du temps, correspondantes à différentes époques, séparées entre elles par des intervalles pendant lesquels le chronomètre avait été exposé souvent à des changements très brusques de température, et quelquefois à des températures très basses où l'huile sur les pivots du chronomètre devait déjà changer son état de cohésion. Il est clair que ces circonstances, quoiqu'elles augmentent considérablement l'erreur probable déduite de l'accord des déterminations du temps faites à différentes époques, ne sont d'aucune influence sur les erreurs réelles, dès que nous pouvons supposer que la marche de l'horloge d'observation a été uniforme dans l'intervalle entre les observations. En outre, l'exactitude des corrections de l'horloge déterminées, sur différentes latitudes, par les observations des distances zénithales d'étoiles situées près du premier vertical, doit décroître en proportion de la sécante de la latitude. Or la latitude moyenne ayant été de $48° 30'$ pendant les opérations de 1847, et de $60° 0'$ pendant celles de 1848, par cette seule raison l'erreur probable des corrections

de l'horloge déterminées à la dernière occasion doit être trouvée plus grande en proportion de 4 à 3 à peu près, ou la quantité 0ˢ,12, trouvée pour le pays des Cosaques du Don, aurait dû être changée en 0ˢ,16 pour le gouvernement de Novgorod. Dans le calcul des erreurs probables des longitudes, nous avons supposé l'erreur probable des déterminations de temps = 0ˢ,20, pour rester fidèles au même principe d'exagérer plutôt les incertitudes des résultats que de les faire paraître trop petites.

Afin de parvenir à un second jugement sur l'exactitude des corrections de l'horloge, j'ai comparé, pour 82 observations, les résultats des pointages isolés avec les moyennes respectives. De cette manière l'erreur probable à craindre dans les corrections de l'horloge se trouve = 0ˢ,100; mais, d'après ce que j'ai déjà exposé dans mon rapport sur les opérations de 1847, la petitesse de cette quantité indique seulement l'exactitude extraordinaire des pointages et des lectures du cercle, de la part de M. Lemm, tandisque la discussion précédente nous fait voir que les erreurs probables à craindre dans les résultats définitifs sont considérablement plus grandes. Cette augmentation provient de l'incertitude de la flexion supposée constante pendant toute la durée de l'expédition, des erreurs de division du cercle, des petites variations dans le lieu du zénith et d'autres causes analogues que les petites dimensions du théodolite employé n'ont pas permis d'évaluer exactement. Ces considérations ont suggéré l'idée d'employer dorénavant, dans les travaux de ce genre, des cercles verticaux de plus grandes dimensions, et je me réjouis de pouvoir annoncer que, par ordre du Lieutenant-Général Toutchkoff, chef du Dépôt Topographique, un tel instrument a été commandé et se trouve déjà en oeuvre chez les frères Repsold de Hambourg et que ces artistes distingués ont voué un soin particulier à la confection de cet instrument qu'ils se sont proposés de construire d'après de nouveaux principes, pour le faire répondre le plus parfaitement possible au but proposé.

Avant le commencement des opérations de 1848 tous les 8 chronomètres qui y devaient servir, avaient été entre les mains de M. Pihl, horloger de l'Observatoire central, pour être repassés et nettoyés. En général, dès qu'un chronomètre a été décomposé en ses pièces, le coefficient de compensation sera un peu altéré; en outre M. Pihl avait des raisons particulières pour changer exprès, dans plusieurs chronomètres, l'état antérieur de compensation. Par ces raisons les coefficients déterminés par M. Döllen en 1847 ne valaient plus pour les opérations de 1848, et il fallait les déterminer par de nouvelles expériences. Le temps n'ayant pas suffi, avant le commencement de l'expédition, d'exécuter la série complète d'expériences, ce fut immédiatement après le retour de M. Lemm, qu'elles furent entreprises. M. Lindhagen, astronome de l'Observatoire central, eut la complaisance de se charger de ce travail. Ayant continué les expériences avec le plus grand soin pendant 11 semaines consécutives, M. Lindhagen parvint aux résultats suivants, en désignant par y le changement de la marche journalière des chronomètres, correspondant à un changement d'un degré (Réaumur) de la température

pour Hauth	11	y = − 0ˢ,274	avec l'erreur prob.	= 0ˢ,022
Dent	1687	= − 0,320	» » »	= 0,015



pour Dent 1730	$y = -$ 0",217	avec l'erreur prob.			= 0",013
» 1739	= — 0,040	»	»	»	= 0,012
» 1787	= — 0,071	»	»	»	= 0,006
» 1808	= — 0,292	»	»	»	= 0,012
» 1818	= + 0,082	»	»	»	= 0,008
» 1828	= — 0,151	»	»	»	= 0,014

On voit de cette liste que la méthode suivie par moi dans la combinaison des longitudes déterminées en 1847, n'était plus applicable à l'occasion actuelle. On se souvient que, dans l'occasion précédente, faute d'exactes déterminations de la température, j'avais donné de tels poids aux résultats obtenus par les différents chronomètres, qu'ayant égard à ces poids la moyenne des six résultats isolés fût de très près libre de tout effet thermométrique. Si nous avions suivi le même procédé dans le calcul des opérations de 1848, les résultats donnés par le chronomètre Dent 1818, le seul qui ait un petit coefficient positif de compensation, auraient eu une préponderance énorme sur tous les autres, ce qui était inadmissible. Mais il est évident qu'il était également inadmissible de négliger entièrement l'effet thermométrique, parce que la moyenne arithmétique des huit coefficients précédemment donnés s'élève à — 0",160. Supposons par exemple que, dans un voyage d'une durée de 12 jours, la température moyenne pendant tout le voyage ait différé d'un seul degré de la température moyenne des premiers six jours; la longitude déterminée au milieu de ce voyage, aurait été trouvée fautive de toute une seconde en temps. Il ne restait donc pas d'autre moyen de procéder que de corriger chaque longitude isolée d'après les indications du thermomètre. Il est bien à regretter que M. Lemm n'était point pourvu d'un chronomètre non-compensé, qui lui aurait indiqué exactement les températures moyennes de chaque jour, telles qu'elles avaient eu lieu effectivement dans l'intérieur des chronomètres. Notre chronomètre non-compensé Arnold et Dent 951 étant employé dans d'autres directions, l'évaluation des températures moyennes devait se faire d'après les indications du thermomètre appliqué au milieu de la boîte qui contenait les chronomètres. Au commencement de son voyage M. Lemm notait plusieurs fois par jour les indications de ce thermomètre. Plus tard, ayant remarqué que, pendant 24 heures, la température restait en général très constante à l'intérieur de la boîte qui, à ce qu'on se souvient de mon précédent rapport, était enfermée dans une seconde boîte couverte d'épaisses fourrures, notre voyageur ne fit la lecture du thermomètre qu'aux époques où il remontait les chronomètres et au commencement et après la fin des observations astronomiques, quand il comparait les autres chronomètres avec le chronomètre d'observation. Je suis convaincu qu'avec les précautions prises par M. Lemm pour abriter, autant que possible, les chronomètres contre les changements brusques de la température, les rares lectures du thermomètre ont suffi en général à donner la température moyenne de chaque jour, exacte à quelques dixièmes près du degré de Réaumur; néanmoins je ne puis pas m'abstenir de recommander à tous ceux qui, dans l'avenir, auront à exécuter des opérations analogues, de vouer un soin particulier à l'évaluation exacte des tem-

pératures moyennes, en répétant plusieurs fois par jour et à différentes heures, les lectures du thermomètre, si ce n'est qu'ils aient l'avantage d'avoir placé, dans la même boîte, un chronomètre non-composé. Ce dernier moyen est le plus sûr, il donne exactement la température moyenne dans chaque intervalle choisi et nommément la température qui a eu lieu réellement à l'intérieur des chronomètres.

La correction thermométrique s'applique très simplement aux longitudes λ calculées avec des marches moyennes des chronomètres, supposées uniformes pendant toute la durée du voyage. En désignant par τ la température moyenne pendant tout le voyage, par τ' la température moyenne dans la période entre le départ du point normal et l'arrivée au lieu à déterminer, et par m la durée de cette période, exprimée en heures, nous avons la dite correction $d\lambda = y\,\frac{m\,(\tau'-\tau)}{24}$, y étant comme ci-dessus le coefficient de compensation déduit des expériences directes.

Après l'application de ces corrections thermométriques nous avons donné, dans le calcul des moyennes, un poids égal aux résultats obtenus par les différents chronomètres, à la seule exception près qu'au chronomètre Hauth 11 qui avait servi à l'exécution des observations astronomiques, et qui, à ces occasions, avait été exposé souvent à des températures très basses et sujettes à des changements rapides, la moitié du poids des autres fut attribuée. Ces circonstances infavorables expliquent facilement pourquoi ce chronomètre qui d'ailleurs nous est connu, depuis longtemps, comme un chronomètre de qualité supérieure, a donné des résultats moins satisfaisants que tous les autres.

Pour abbrévier les calculs des corrections thermométriques on emploiera en général, dès qu'il ne s'agit pas de déduire le poids relatif à attribuer aux différents chronomètres, au lieu des y donnés pour chaque chronomètre à part, leur valeur moyenne Y, et on corrigera directement le résultat moyen, eu égard, comme il faut, aux poids des chronomètres. Dans notre cas par exemple nous avons $Y = -$ 0ˢ153 parce que nous avons donné le poids $= \frac{1}{2}$ au chronomètre Hauth 11. Si tous les chronomètres avaient eu le même poids, Y aurait été trouvé $= -$ 0ˢ160.

Avant de procéder au calcul des longitudes des points intermédiaires, il fallait en premier lieu fixer définitivement celles des deux points principaux Tikhvin et Kirilov. Dans ce but le chef de la section géodésique du Dépôt Topographique Lieutenant-Colonel Maximov, me communiqua les longitudes suivantes des deux points fondamentaux, Borovitchi et Oustiouchna, telles qu'elles ont été déterminées par les opérations géodésiques et que, par conséquent, nous devons regarder comme absolument exactes :

Borovitchi, église de la Glorification (Спасъ Преображенія) 14ᵐ 17ˢ87 à l'Est de Poulkova
Oustiouchna, église de l'Assomption (Успѣніе Богородицы) 24 24,53 » » » »

Avec ces données et eu égard aux réductions locales entre les lieux d'observation et les points fixes à déterminer, le calcul direct des longitudes nous a donné les résultats suivants par les combinaisons des différents voyages, citées pag. 335.

1. *Tikhvin*, clocher de la Cathédrale.

1)	par I et II	12ᵐ 45ˢ,49	à l'Est de Poulkova
2)	» II et IV	46,36	» » » »
3)	» IV, VII et VIII	45,61	» » » »

2. *Kirilov*, clocher de la Cathédrale.

1)	par IV, VII et VIII	32ᵐ 11ˢ,21	à l'Est de Poulkova.
2)	» VIII et X	10,88	» » » »
3)	» X et XI	10,56	» » » »
4)	» XI et XII	11,56	» » » »

En appliquant maintenant les corrections thermométriques d'après la formule pag. 340 et conformément aux lectures du thermomètre, données dans les journaux de M. Lemm, nous trouvons :

1)	*Tikhvin*, clocher de la Cathédrale	12ᵐ 44ˢ,36	à l'Est de Poulkova
2)	» » » » »	44,26	» » » »
3)	» » » » »	43,87	» » » »
1)	*Kirilov*, clocher de la Cathédrale	32 10,11	à l'Est de Poulkova
2)	» » » » »	9,72	» » » »
3)	» » » » »	11,00	» » » »
4)	» » » » »	12,04	» » » »

Les moyennes arithmétiques de ces dernières valeurs, prises en attribuant le poids $= \frac{1}{2}$ à la dernière détermination de Tikhvin et à la première de Kirilov, nous donnent les longitudes définitives des deux points, à l'Est de Poulkova

Tikhvin, clocher de la Cathédrale	12ᵐ 44ˢ,22	avec l'err. prob. = 0ˢ,09
Kirilov, » » » »	32 10,80	» » » = 0,36

Ici les erreurs probables sont déduites de l'accord du résultat de chaque combinaison isolée, avec la moyenne respective; mais en considérant les circonstances particulières des différentes combinaisons, les durées des voyages, les changements des températures etc., il est évident que, soit l'augmentation de l'accord pour Tikhvin, soit la diminution pour Kirilov doivent être attribuées à un jeu du hazard. Je crois que nous ne nous éloignerons pas trop de la vérité si nous supposons la même erreur probable = 0ˢ,25 pour les deux longitudes définitives. Plus tard cette supposition a gagné un appui dans la discussion de toutes les différentes sources d'erreurs, qui ont pu agir sur les longitudes et qui ont donné pour Tikhvin l'erreur probable = 0ˢ,11, pour Kirilov = 0ˢ,19. La valeur hypothétique 0ˢ,25 encore plutôt trop forte que trop faible est celle que nous avons introduite dans les recherches ultérieures sur l'exactitude des longitudes des points intermédiaires.

En comparant entre eux les différents résultats obtenus avant et après l'application des corrections thermométriques, nous voyons que, pour Tikhvin, l'accord des résultats isolés a

augmenté, tandis qu'il a diminué considérablement dans le cas de Kirilov. En revanche, la correction thermométrique moyenne de la longitude s'élève pour Tikhvin à $1^s,64$, tandisque la longitude moyenne de Kirilov n'a été changée que de $0^s,23$. Cette correction moyenne de la longitude de Tikhvin est un exemple des plus frappants de l'importance des corrections thermométriques.

Considérons maintenant ce que les différents chronomètres ont donné pour les longitudes de ces deux points principaux. Je donnerai ici la liste complète des résultats λ et λ' obtenus par chaque chronomètre à part, dans les différentes combinaisons des voyages, avant et après l'application des corrections thermométriques, sans y avoir ajouté les réductions locales des lieux d'observation sur les lieux fixes.

Tikhvin, à l'Est de Poulkova.

Chronomètre.	Combin. 1. λ	Combin. 1. λ′	Combin. 2. λ	Combin. 2. λ′	Combin. 3. λ	Combin. 3. λ′
Hauth 11	$12^m\ 44^s,34$	$12^m\ 42^s,36$	$12^m\ 46^s,51$	$12^m\ 42^s,79$	$12^m\ 44^s,78$	$12^m\ 41^s,66$
Dent 1687	45,59	43,28	46,34	41,98	45,77	42,13
» 1730	46,37	44,81	47,67	44,71	46,62	44,15
» 1739	44,10	43,82	45,19	44,65	44,18	43,72
» 1787	44,78	44,27	45,22	44,26	43,86	43,05
» 1808	45,38	43,27	47,80	43,82	48,05	44,73
» 1818	44,52	45,11	44,39	45,31	43,42	44,35
» 1828	45,30	44,21	44,96	42,91	44,85	43,13

Kirilov, à l'Est de Poulkova.

Chronomètre.	Combin. 1. λ	Combin. 1. λ′	Combin. 2. λ	Combin. 2. λ′	Combin. 3. λ	Combin. 3. λ′	Combin. 4. λ	Combin. 4. λ′
Hauth 11	$32^m\ 12^s,84$	$32^m\ 10^s,86$	$32^m\ 13^s,66$	$32^m\ 11^s,58$	$32^m\ 9^s,28$	$32^m\ 10^s,08$	$32^m\ 7^s,83$	$32^m\ 8^s,68$
Dent 1687	11,67	9,37	11,32	8,89	10,12	11,06	11,29	12,28
» 1730	11,70	10,14	11,08	9,43	10,40	11,04	12,21	12,88
» 1739	9,93	9,64	9,31	9,10	10,71	10,83	12,10	12,22
» 1787	10,01	9,50	9,51	8,97	10,85	11,06	12,36	12,58
» 1808	11,89	9,79	11,20	8,99	10,44	11,30	10,91	11,82
» 1818	10,78	11,37	10,46	11,06	10,85	10,61	11,42	11,17
» 1828	10,83	9,74	10,98	9,83	10,15	10,59	11,45	11,92

Les sommes des carrés des différences v et v', entre les déterminations isolées λ et λ' et les moyennes respectives, s'établissent maintenant :

		Σv^2	$\Sigma v'^2$
pour Tikhvin :	Combin. 1.	3,60	3,36
	» 2.	11,22	8,62
	» 3.	16,67	6,56
pour Kirilov :	Combin. 1.	5,56	3,14
	» 2.	8,20	5,70
	» 3.	1,28	0,75
	» 4.	9,41	7,40

Nous voyons ici que, sans aucune exception, les Σv^2 surpassent en grandeur les $\Sigma v'^2$, ce qui prouve que l'application des corrections thermométriques a produit un effet très sensible sur l'accord des longitudes données par les différents chronomètres, et par conséquent, qu'elle a augmenté considérablement la certitude des résultats.

Il est d'autant plus remarquable que ces corrections thermométriques, au lieu d'augmenter l'accord des résultats moyens obtenus pour Kirilov dans les différentes combinaisons, l'ont évidemment diminué. Les coefficients thermométriques étant déterminés par M. Lindhagen avec la plus grande exactitude, nous devons attribuer ce manque d'accord, en plus grande partie, à une accumulation d'erreurs accidentelles des déterminations du temps, mais en même temps nous y trouvons un indice qui nous fait soupçonner l'existence de petites erreurs dans les valeurs acceptées des températures moyennes, erreurs produites par ce que les lectures du thermomètre, de la part de notre voyageur, n'ont pas été assez fréquentes. En comparant par exemple, les coefficients de compensation de chaque chronomètre avec les λ et λ', obtenus dans la seconde combinaison pour Kirilov, il est évident, que la différence entre les températures moyennes, de tout le voyage et de sa première partie, a été supposée trop forte. Vu qu'il a été constaté par un grand nombre d'expériences, que presque tous les chronomètres changent peu à peu leur état de compensation, il y aurait lieu d'avancer l'hypothèse que les coefficients de compensation, étant déterminés par M. Lindhagen après la fin des opérations de M. Lemm, ne valassent plus exactement pour la période de ces opérations. Mais cette hypothèse tombe d'elle même parce que, dans ce cas, l'effet de l'inexactitude aurait dû être beaucoup plus sensible dans les longitudes de Tikhvin déterminées dans une période considérablement plus éloignée de celle des expériences de M. Lindhagen, que la période dans laquelle M. Lemm a fait les voyages pour la détermination de Kirilov. Mais d'un côté la petitesse des $\Sigma v'^2$ comparativement aux Σv^2, de l'autre l'augmentation de l'accord des résultats moyens dans les différentes combinaisons, nous prouvent que, pour Tikhvin, il n'y a pas lieu de supposer la plus petite inexactitude dans les valeurs acceptées des coefficients thermométriques.

L'influence des corrections thermométriques dans l'établissement de l'accord entre les longitudes données par les différents chronomètres, se voit encore plus favorablement dans l'exemple de la longitude de Belie-Kresti, interpolée entre les points fondamentaux Borovitchi et Oustiouchna. Ici nous avons :

	λ =	λ' =
par Hauth 11	19^m 35,75	19^m 38,93
Dent 1687	34,47	38,18
» 1730	34,37	36,88
» 1739	38,07	38,53
» 1787	38,21	39,03
» 1808	33,53	36,91
» 1818	39,75	38,82
» 1828	37,42	39,17

Σv^2 s'élève dans ce cas à 34,67 tandisque $\Sigma v'^2$ ne monte qu'à 5,83. Nous voyons aussi que la plus grande différence entre les différents λ est de 6,22, et ne s'élève qu'à 2,29 pour les λ'.

Il serait trop long de donner ici tous les détails qui se rapportent au calcul des corrections thermométriques des longitudes. Par cette raison je me borne à réunir, dans le tableau suivant, les résultats du calcul de M. Wagner, en y ajoutant les données nécessaires pour soumettre ce calcul à une vérification. Ce tableau contient :

dans la colonne I : l'indication des points fondamentaux, entre lesquels le voyage a été fait. Ici T', T'', T''' etc. indiquent les différents départs ou arrivées par rapport à Tikhvin; également Poulkova est indiqué par P, Borovitchi par B, Oustiouchna par O, Kirilov par K et Tcherepovetz par Tch *).

» » » II : la température moyenne d'après les lectures du thermomètre pendant le voyage entre les points principaux.

» » » III : la durée totale du voyage.

» » » IV : l'indication du point de sortie et du point déterminé. J'ai employé ici, pour simplifier la désignation des lieux déterminés, les numéros courants apposés, pour chaque point, dans le journal d'observations de M. Lemm.

» » » V : la température moyenne, d'après les lectures du thermomètre, dans l'intervalle entre les observations sur le point de sortie et sur le point à déterminer.

» » » VI : la durée du transport du temps. Le signe négatif que nous rencontrons, sous parenthèses, dans cette colonne, pour une détermination de Tikhvin et deux de Kirilov, indique que, dans ces cas, le point à déterminer a servi de point de sortie, ce qui fit que la correction thermométrique calculée d'après notre formule pour le point fixe, devait être appliquée avec le signe contraire aux longitudes du point à déterminer.

» » » VII : les corrections thermométriques moyennes des longitudes.

» » » VIII : les Σv^2 calculés pour chaque point.

» » » IX : les $\Sigma v'^2$ calculés pour chaque point.

---

*) Proprement dit Tcherepovetz n'appartient pas au nombre des points principaux. Mais, pendant le voyage IX, entre O^{III} et O^{IV}, M. Lemm a observé deux fois dans cet endroit, le 3 et le 11 Août, ce qui a donné le moyen d'éliminer la marche des chronomètres pendant l'intervalle entre les deux déterminations du temps faites sur le même endroit, et de raccourcir ainsi la durée du transport du temps. Ce procédé a eu aussi pour suite, que les longitudes des deux points Pretchistoje et Ilinskoje, déterminées dans cet intervalle du 3 au 11 Août, ont été rapportées en premier lieu à Tcherepovetz, comme nous le trouvons indiqué dans la colonne IV.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
$P - T^{I}$	+14°,46R.	119^{h}	P — 1	+12°,00 R.	26^{h}	−0°,41	1,04	0,54
»	14,46	119	P — 2	13,17	47	−0,57	3,62	1,69
»	14,46	119	P — 3	13,85	94	−0,35	0,34	1,04
P — B	15,95	239	$P - T^{I}(4^{I})$	14,46	119	−1,13	3,60	3,36
$T^{I} - B$	17,43	120	$T^{I} - 5$	18,77	51	+0,35	1,53	0,70
»	17,43	120	$T^{I} - 6$	17,99	96	+0,34	0,40	0,11
$B - O^{I}$	12,25	171	B — 8	16,25	51	+1,23	15,85	1,95
»	12,25	171	B — 9	15,12	97	+1,77	34,67	5,83
»	12,25	171	B — 10	13,07	143	+0,74	12,50	3,69
$T^{I}-B+O^{I}-T^{II}$	14,64	190	$T^{I} - B(4^{II})$	17,43	(−)120	−2,10	11,22	8,62
$T^{II} - T^{III}$	13,90	98	$T^{II} - 12$	14,02	50	+0,03	0,13	0,08
»	13,90	98	$T^{II} - 13$	13,68	76	−0,10	0,05	0,04
$T^{III} - T^{IV}$	14,88	284	$T^{III} - 14$	16,10	49	+0,37	2,94	1,40
»	14,88	284	$T^{III} - 15$	16,94	140	+1,89	6,85	7,90
»	14,88	284	$T^{III} - 16$	15,55	215	+0,92	1,36	3,06
»	14,88	284	$T^{III} - 17$	15,32	240	+0,66	1,43	2,56
$O^{I}-T^{II}+T^{IV}-O^{II}$	13,82	415	$O^{I} - T^{II}(4^{III})$	9,98	70	−1,74	16,67	6,56
$T^{IV} - K^{I}$	14,24	274	$T^{IV} - 18$	15,46	39	+0,26	1,87	1,51
»	14,24	274	$T^{IV} - 19$	14,92	59	+0,25	1,37	1,50
»	14,24	274	$T^{IV} - 20$	14,52	82	+0,15	0,86	1,20
»	14,24	274	$T^{IV} - 21$	14,65	153	+0,41	0,89	0,90
»	14,24	274	$T^{IV} - 22$	14,55	177	+0,35	1,11	1,43
»	14,24	274	$T^{IV} - 23$	14,49	208	+0,27	1,75	2,25
»	14,24	274	$T^{IV} - 24$	14,15	249	−0,14	0,61	0,49
$O^{I}-T^{II}+T^{IV}-O^{II}$	13,82	415	$O^{I}-T^{II}+T^{IV}-K^{I}(25^{I})$	13,36	343	−1,10	5,56	3,14
$K^{I}-O^{II}+O^{IV}-K^{II}$	13,52	232	$K^{I} - O^{II}(25^{II})$	16,05	(−) 72	−1,16	8,20	5,79
$K^{I} - O^{II}$	16,05	72	$K^{I} - 26$	16,17	48	+0,04	0,08	0,10
$O^{III}-Tch^{I}+Tch^{II}-O^{IV}$	13,40	253	$O^{III} - 27$	13,35	48	+0,02	1,42	1,42
»	13,40	253	$O^{III} - 28$	13,66	100	+0,15	2,35	2,61
$Tch^{I} - Tch^{II}$	14,70	188	$Tch^{I} - 29$	14,35	20	−0,04	0,16	0,18
»	14,70	188	$Tch^{I} - 30$	14,36	93	−0,13	0,66	0,57
$O^{III}-Tch^{I}+Tch^{II}-O^{IV}$	13,40	253	$O^{III}-Tch^{I}+Tch^{II}-31^{I}$	14,04	137	+0,49	3,93	4,12
»	13,40	253	$O^{III}-Tch^{I}+Tch^{II}-32$	14,02	160	+0,55	2,98	3,49
$O^{IV} - K^{II}$	12,43	161	$O^{IV} - 31^{II}$	11,80	48	−0,20	1,31	0,68
»	12,43	161	$O^{IV} - 33$	11,50	67	−0,40	3,02	0,70
»	12,43	161	$O^{IV} - 34$	11,71	87	−0,42	2,77	0,75
$O^{IV} - O^{V}$	12,05	234	$O^{IV} - K^{II}(25^{III})$	12,43	161	+0,44	1,28	0,75
$O^{V} - K^{III}$	12,71	120	$O^{V} - 35$	12,74	101	+0,02	0,75	0,75
$K^{II} - K^{III}$	12,00	192	$K^{II} - O^{V}(25^{IV})$	11,02	(−) 73	+0,48	9,41	7,40
$K^{III} - K^{IV}$	10,21	334	$K^{III} - 36$	11,07	73	+0,41	17,81	11,38
»	10,21	334	$K^{III} - 37$	10,51	99	+0,17	24,44	20,96
»	10,21	334	$K^{III} - 38$	10,60	140	+0,35	25,75	16,57
»	10,21	334	$K^{III} - 39$	10,92	193	+0,86	34,63	14,63
»	10,21	334	$K^{III} - 40$	11,20	214	+1,36	31,47	11,53
»	10,21	334	$K^{III} - 41$	11,35	240	+1,74	68,29	17,43
»	10,21	334	$K^{III} - 42$	11,19	263	+1,66	53,93	16,10
»	10,21	334	$K^{III} - 43$	10,91	292	+1,09	26,25	9,63

Ce tableau nous montre le mieux toute l'importance des corrections thermométriques. Il nous fait voir que ces corrections ont altéré de près de quatre secondes en temps, les longi-

tudes relatives de quelques points situés dans le même gouvernement et pas même en grande distance l'un de l'autre. En outre nous voyons que les $\Sigma v'^2$ (col. IX) sont beaucoup plus petits que les Σv^2 (col. VIII), dans tous les cas où ces derniers étaient considérables. La somme totale des Σv^2 s'élève à 449,21, celle des $\Sigma v'^2$ seulement à 208,09. Cela prouve donc qu'en général les corrections thermométriques ont très efficacement contribué à établir un accord plus parfait entre les résultats donnés par les différents chronomètres pour chaque point à part, et nous donne, par conséquent, la conviction que réellement les longitudes réclamaient les corrections que nous avons évaluées. Dans d'autres cas où les Σv^2 eux mêmes sont peu considérables, les $\Sigma v'^2$ sont tantôt un peu plus grands tantôt plus petits. Cela tient surtout à ce que, dans ces cas, les températures moyennes n'ont pas été reconnues assez exactement, de sorte que les erreurs produites par les inexactitudes des températures, sont du même ordre que les erreurs provenantes des variations accidentelles ou des sauts dans les marches des chronomètres. Le dernier voyage, XIII, K^{III} à K^{IV}, fournit un autre indice très prononcé pour nous faire supposer que les températures moyennes n'ont pas été reconnues toujours avec toute l'exactitude désirable. Il ne s'agit que d'examiner attentivement les résultats isolés trouvés par les différents chronomètres. Nous avons par exemple pour Poltchenski (41)

		λ =	λ' =
par Hauth	11	0ᵐ 30ˢ,64	0ᵐ 33ˢ,77
Dent	1687	29,58	33,23
»	1730	28,74	31,21
»	1739	34,67	35,13
»	1787	33,30	34,11
»	1808	28,73	32,06
»	1818	37,18	36,24
»	1828	31,65	33,37

Dans ce cas les λ se rangent presque strictement dans l'ordre de grandeur des coefficients de compensation. Dent 1818, le seul chronomètre qui avait le coefficient positif, a donné la plus grande longitude, suivent Dent 1739 et 1787 qui ont le coefficient presque zéro, et les plus petites longitudes sont données par les chronomètres qui ont le coefficient négatif le plus considérable. La même succession obtient encore, mais en plus faibles proportions, dans les λ'. Nous en concluons que les corrections thermométriques, évaluées d'après les lectures des thermomètres, n'ont pas encore été suffisantes, et il paraît que l'origine de l'inexactitude peut être indiquée avec beaucoup de probabilité. Dans le premier temps de ce voyage, M. Lemm a fait la lecture du thermomètre deux fois par jour, à midi lorsqu'il montait les chronomètres, et le soir avant et après les observations. Dès qu'il remarqua que la température, dans l'intérieur de la boîte, était tombée au dessous de + 6° R., M. Lemm mit fin à ses opérations et se dépêcha de retourner directement sur le point de sortie, Kirilov. Pendant ce voyage de retour il ne faisait, les derniers jours, la lecture du thermomètre qu'une seule fois par jour vers le midi où

la température est la plus élevée. Il s'en suit qu'il a dû trouver la température moyenne pendant tout le voyage trop haute et cette conclusion est confirmée par les résultats donnés par les différents chronomètres. Réellement nous voyons qu'en abaissant encore un peu cette température moyenne, nous aurions pu produire un accord presque parfait dans les λ'.

Nous passons maintenant aux résultats de nos calculs sur les opérations de M. Lemm. Je donnerai directement les positions réduites sur les lieux fixes. Quant aux erreurs probables des latitudes, voyez ce qui a été dit pag. 336 et 337 de ce rapport. Les erreurs probables des longitudes ont été calculées à part pour chaque point et se trouvent indiquées dans le tableau des résultats. Ce calcul des erreurs probables demande encore quelques explications. Pour les opérations de 1847 j'avais calculé les erreurs probables des longitudes des points intermédiaires par la formule approximative :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{f^2}{2} + \frac{f^2}{p^2} g^2 + g'^2 + h^2 + h'^2}.$$

Sur l'origine de cette formule voyez mon rapport sur les dites opérations pag. 251. Cette formule n'était plus applicable au cas actuel par les deux raisons suivantes 1) parce que nous avons ajouté à chaque longitude isolée, la correction thermométrique 2) parce que les longitudes des deux points principaux Kirilov et Tikhvin doivent être regardées comme déterminées indépendamment l'une de l'autre. Or en retenant autant que possible les désignations de la formule antérieure, une nouvelle formule s'établit :

$$\varepsilon = \sqrt{f^2 + h^2 + \frac{i'^2(\chi^2 + \gamma^2) + i^2(\chi'^2 + \gamma'^2)}{(i + i')^2}}.$$

Ici f désigne l'erreur probable de la longitude en tant qu'elle dépend du transport du temps et qui se prononce dans l'accord des résultats obtenus par les différents chronomètres, i l'intervalle entre les observations sur le premier point principal et sur le lieu à déterminer, i' l'intervalle écoulé entre les observations sur le lieu déterminé et sur le second point fondamental, de sorte que $i + i' = J$ donne la durée totale du voyage. Les erreurs probables des corrections de l'horloge sont désignées : pour le point intermédiaire par h, pour les deux points principaux par χ et χ' et celles des longitudes des points principaux par γ et γ'. Naturellement la formule précédente a éprouvé quelques legères modifications dans des cas particuliers. Si, par exemple, le point intermédiaire fut déterminé par le retour sur le même point principal d'où l'on était sorti, la formule prend la forme

$$\varepsilon = \sqrt{f^2 + h^2 + \gamma^2 + \frac{i'^2\chi^2 + i^2\chi'^2}{(i + i')^2}}.$$

Aussi dans tous les cas, où, pendant le même voyage, le retour sur le même point avait permis d'éliminer les marches des chronomètres dans l'intervalle correspondant, les erreurs probables des deux déterminations de temps à l'aide desquelles cette élimination pouvait être effectuée, devaient être introduites dans la formule. On pourrait croire que, par ce procédé d'élimination, nous avons sans besoin augmenté les erreurs probables des déterminations, mais



l'expérience prouve que les f ont diminué en plus forte proportion, de sorte que l'erreur probable définitive de la longitude est ressortie considérablement plus petite après cette élimination.

Il me reste d'indiquer les valeurs numériques des quantités qui composent le second membre de la formule précédente. Les f ont été déduits, dans tous les cas, de l'accord des longitudes données par les différents chronomètres, avec les moyennes respectives. Pour toutes les corrections de l'horloge h, χ et χ' nous avons supposé la même erreur probable $= 0^s,20$ (voyez pag. 338) etc. Les longitudes de Borovitchi et d'Oustiouchna fournies par les opérations géodésiques, furent regardées comme absolument exactes, de sorte que, par rapport à ces deux lieux, nous avons adopté $\gamma = \gamma' = 0$. Par rapport aux longitudes de Tikhvin et de Kirilov, les erreurs probables γ, γ' furent supposées $= 0^s,25$ (voyez pag. 341). Certainement il y a beaucoup de vague dans l'assignation des valeurs numériques des différentes erreurs probables qui constituent l'erreur probable de la longitude d'un point intermédiaire, mais il n'en est pas moins sûr que toutes les valeurs numériques ont été supposées plutôt trop fortes que trop faibles, pour ne pas nous faire reprocher d'avoir surestimé l'exactitude de ces déterminations.

Tableau des positions géographiques déterminées par les opérations de 1848.

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	ε	Longitude à l'Est de Greenwich
1. Novaja-Ladoga (Новая Ладога), église de St. Clément	60° 6′ 35″,2	$0^h\ 7^m\ 56^s,54$	$0^s,28$	$2^h\ 9^m\ 15^s,21$
2. Roshestvennoje (Рожественное), église	60 25 15,8	10 40,91	0,29	11 59,58
3. Voskresenskoje (Воскресенское), église	59 51 2,2	10 16,96	0,34	11 35,63
4. Tikhvin (Тихвинъ), clocher de la cathédrale	59 38 47,2	12 44,22	0,19	14 2,89
5. Tchernoj, (Черной), clocher de l'église	59 16 10,0	14 41,02	0,30	15 59,69
6. Beloj (Бѣлой), église	58 48 29,5	12 14,65	0,27	13 33,32
7. Borovitchi (Боровичи), église de la Glorification	58 23 3,2	(14 17,87)	—	15 36,54
8. Migolichtchi (Миголищи), église	58 49 49,7	15 40,14	0,28	16 58,81
9. Bélie-Kresti (Бѣлые Кресты), clocher de l'église	59 4 43,6	19 38,26	0,33	20 56,93
10. Kirvofskaja (Кирвовская), église construite en pierres	58 42 23,6	20 43,19	0,32	22 1,86
11. Oustiouchna (Устюжна), église de l'Ascension	58 50 48,1	24 24,53	—	25 43,20
12. Polevitchi (Полевичи), église	59 18 41,2	10 45,12	0,35	12 3,79
13. Oskouja (Оскуя), église	59 16 39,3	7 3,82	0,36	8 22,49
14. Ouchtovitchi (Уштовичи), église	60 7 11,8	14 12,78	0,38	15 31,45

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	ε	de Greenwich
15. **Pachosero** (Пашозеро), église construite en pierres	60° 1′ 46″,9	0ʰ 17ᵐ 11ˢ,21	0ˢ,44	2ʰ18ᵐ29ˢ,88
16. **Koïgouchi** (Койгуши), clocher de l'église	59 40 11,2	17 39,39	0,39	18 58,06
17. **Oserskaja** (Озерская), clocher de l'église	59 37 19,4	15 58,24	0,39	17 16,91
18. **Somino** (Сомино), clocher de l'église	59 20 37,9	18 10,26	0,36	19 28,93
19. **Korобichtche** (Коробище), clocher de l'église	59 41 18,6	20 37,10	0,35	21 55,77
20. **Kolochemskoje** (Колошемское), clocher de l'église	60 2 37,9	21 21,16	0,33	22 39,83
21. **Voskresenskoje** (Воскресенское), église	59 49 23,5	22 57,15	0,32	24 15,82
22. **Komonevskoje** (Комоневское), clocher de l'église	60 5 46,6	24 0,44	0,33	25 19,11
23. **Ouroserskoje** (Урозерское), clocher de l'église	59 52 8,7	28 12,97	0,35	29 31,64
24. **Biélosero** (Бѣлозеро), clocher de la cathédrale	60 1 55,6	29 49,09	0,36	31 7,76
25. **Kirilov** (Кириловъ), clocher de la cathédrale	59 51 30,1	32 10,80	0,16	33 29,47
26. **Grichkino** (Гришкино), clocher de l'église construite en pierres	58 57 38,4	27 11,27	0,28	28 29,94
27. **Jelesno-Doubrovskaja** (Желѣзно-Дубровская), clocher de l'église	59 12 27,9	23 36,82	0,28	24 55,49
28. **Tcherepovetz** (Череповецъ), clocher de la cathédrale	59 7 7,8	30 25,36	0,29	31 44,03
29. **Pretchistoje** (Пречистое), clocher de l'église	59 21 38,4	27 35,21	0,43	28 53,88
30. **Iljinskoje** (Ильинское), clocher de l'église	59 33 59,6	24 42,10	0,42	26 0,77
31. **Vologda** (Вологда), clocher de la cathédrale	59 13 26,9	38 14,27	0,21	39 32,94
32. **Blagovechtchenskoje** (Благовѣщенское), clocher de l'église	59 5 53,8	33 54,64	0,30	35 13,31
33. **Otvodnoje** (Отводное), clocher de l'église	59 29 58,4	36 54,41	0,28	38 13,08
34. **Dmitrievski** (Дмитріевскій), clocher de l'église	59 44 28,1	35 18,65	0,30	36 37,32

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	ε	de Greenwich
35. Ivanovskoje (Ивановское), clocher de l'église	59°29′47″,9	0h 30m 30s,28	0s,34	2h 31m 48,95
36. Vachki (Вашки), clocher de l'église	60 17 30,1	30 20,57	0,44	31 39,24
37. Iljinskoje (Ильинское), clocher de l'église	60 25 49,1	27 49,46	0,59	29 8,13
38. Indoma (Индома), clocher de l'église	60 31 47,6	29 43,79	0,54	31 2,46
39. Tchernoslobodskaja (Чернослободская), clocher de l'église	60 47 21,0	29 46,29	0,52	31 4,96
40. Bolchechalsk (Большешалскъ), clocher de l'église	60 56 39,1	32 45,90	0,49	34 4,57
41. Poltchenski (Польченскій), clocher de l'église	60 41 30,9	32 44,36	0,53	34 3,03
42. Pritchistenskoj (Пречистенской), clocher de l'église	60 25 8,2	33 31,16	0,52	34 49,83
43. Popovo (Попово), clocher de l'église	60 10 2,8	33 19,78	0,47	34 38,45

La valeur moyenne de toutes les erreurs probables des longitudes se trouve = 0s,35, ce qui correspond, sous la latitude moyenne de 60°, à une distance linéaire de 38 sajènes environ. Or, en comparant ces quantités avec les erreurs probables des longitudes déterminées dans le pays des Cosaques du Don, nous voyons que, sous le rapport de l'exactitude, les opérations de 1848 l'ont remporté sur celles de 1847. Cette augmentation d'exactitude doit être attribuée d'un côté au plus grand nombre de chronomètres, d'autre côté à l'introduction des coefficients thermométriques de compensation, dont l'effet sur les erreurs probables n'a été qu'estimé à l'occasion précédente et probablement en raison trop faible; c'est à dire probablement toutes les erreurs probables indiquées dans mon rapport sur l'expédition de 1847, sont données un peu trop fortes.

La remarque (pag. 346) que les longitudes données par les différents chronomètres dans le voyage XIII, $K^{III} - K^{IV}$, pouvaient être amenées à un accord beaucoup plus parfait si l'on changeait un peu les relations des températures moyennes pendant tout le voyage et pendant les intervalles écoulés entre le départ du point fixe et les arrivées sur les lieux à déterminer, fit naître l'idée d'évaluer exactement par quel changement relatif de ces températures moyennes le meilleur accord pouvait être produit. Ce changement des températures impliqua naturellement un changement correspondant des longitudes elles-mêmes. Le problème à résondre était une des plus simples applications de la méthode des moindres carrés. Il y avait pour chaque longitude 8 équations de condition à deux inconnues, dont la première avait toujours le même coefficient = 1, et la seconde un coefficient égal à celui du coefficient de compensation du chronomètre y, multiplié par l'intervalle en jours, entre le départ du point fixe et l'arrivée sur le point à déterminer ou par $\frac{m}{24}$ (pag. 340). M. Wagner après avoir essayé cette méthode sur le voyage XIII et ayant reconnu que les $\Sigma v'^2$ diminuaient très considérablement, étendit le

calcul sur tous les voyages et parvint aux résultats présentés dans le tableau suivant. Ici l'ordre des déterminations est le même que dans le tableau pag. 345; les points déterminés sont indiqués par le numéro courant du journal de M. Lemm. Les corrections des longitudes se trouvent dans la colonne $d\lambda'$ et le changement de la différence des températures moyennes ou de $(\tau' - \tau)$ dans la colonne $d(\tau' - \tau)$. Enfin $\Sigma v''^2$ indique la somme des carrés des erreurs restantes des équations après la substitution de $d\lambda'$ et de $d(\tau' - \tau)$.

Lieu déterminé	$d\lambda'$	$d(\tau' - \tau)$	$\Sigma v''^2$
1	+ 0ˢ,03	— 0°,20	0,54
2	+ 0,02	— 0,08	1,69
3	+ 0,34	— 0,56	0,33
4^I	+ 0,62	— 0,80	2,19
5	+ 0,03	+ 0,09	0,70
6	— 0,09	— 0,15	0,06
8	+ 0,37	+ 1,17	1,16
9	+ 0,54	+ 0,89	3,92
10	+ 0,57	+ 0,63	2,38
4^II	+ 0,90	+ 0,81	3,86
12	+ 0,05	+ 0,17	0,08
13	+ 0,02	— 0,06	0,02
14	+ 0,05	+ 0,22	1,40
15	— 0,91	— 1,02	2,23
16	— 0,60	— 0,45	0,85
17	— 0,50	— 0,34	1,25
4^III	+ 0,32	— 0,73	5,82
18	+ 0,06	+ 0,28	1,51
19	— 0,12	— 0,31	1,41
20	— 0,27	— 0,51	0,80
21	— 0,20	— 0,22	0,64
22	— 0,28	— 0,24	1,15
23	— 0,26	— 0,20	1,73
24	0,00	0,00	0,49
25^I	+ 0,36	— 0,16	2,43
25^II	+ 0,36	+ 0,81	5,01
26	— 0,06	— 0,20	0,08
27	— 0,03	+ 0,03	1,42
28	— 0,18	— 0,26	2,49
29	— 0,01	+ 0,10	0,18
30	— 0,04	+ 0,06	0,57

Lieu déterminé	$d\lambda'$	$d(\tau'-\tau)$	$\Sigma v''^2$
31^I	−0,32	−0,35	3,68
32	−0,38	−0,36	2,73
31^II	−0,17	−0,54	0,54
33	−0,26	+0,62	0,22
34	−0,23	+0,43	0,28
25^III	−0,12	−0,12	0,66
35	+0,21	+0,33	0,50
25^IV	0,00	0,00	7,40
36	+1,38	+3,00	2,66
37	+1,80	+2,61	5,89
38	+1,65	+1,85	3,65
39	+1,51	+1,25	1,85
40	+1,26	+0,92	2,58
41	+1,43	+0,94	6,15
42	+1,21	+0,72	7,49
43	+0,86	+0,46	4,29

On voit qu'à l'exception du dernier voyage, les $d\lambda'$ ne s'élèvent en général qu'à peu de dixièmes de seconde et sont considérablement plus petits que les corrections thermométriques données dans la colonne VII, du tableau pag. 345. Aussi les $d(\tau'-\tau)$ ne surpassent pas les limites des incertitudes qu'on doit admettre dans les évaluations des températures moyennes, par suite de la rareté des lectures du thermomètre. Mais dans le dernier voyage ce n'est plus le cas. Les énormes différences entre les températures moyennes observées et les températures indiquées par l'évaluation du meilleur accord entre les longitudes fournies par les différents chronomètres, prouvent l'existence de causes perturbatrices particulières dont je crois avoir trouvé l'explication dans les circonstances suivantes. Nos expériences ayant démontré que les marches des chronomètres deviennent irrégulières, par suite du changement de l'état de cohésion de l'huile qui se trouve sur les roues et les pivots des chronomètres, ce qui arrive dès que la température s'abaisse au dessous de + 5° R., M. Lemm a eu soin de ne pas laisser tomber la température dans l'intérieur de la boîte au dessous de cette température. Dans ce but, lorsqu'il remarqua que la température s'approchait de cette limite inférieure, il faisait transporter les chronomètres dans une chambre chauffée. Nous voyons, par exemple, qu'à l'époque des observations d'Ilinskoje, le 7 sept., la température de l'air était près de zéro, tandisque celle des chronomètres était au dessus de + 10° R., plus haute même qu'elle n'avait été à midi. Certainement cette précaution de la part de M. Lemm ne peut qu'être louée, mais il est à regretter qu'il n'a point pris aussi la précaution d'augmenter le nombre des lectures du thermomètre qui, par ce brusque changement des circonstances extérieures, ont dû subir des variations très rapides. Dans ces cas nous nous trouvons hors d'état d'évaluer même

approximativement les températures moyennes d'après les rares lectures du thermomètre, faites par notre voyageur; il faudra donc se tenir aux différences des températures, indiquées par les chronomètres eux-mêmes. C'est ici un exemple frappant de l'importance d'ajouter, dans des opérations analogues futures, aux chronomètres qui servent pour le transport du temps, toujours un chronomètre non-compensé, pour nous indiquer exactement les températures moyennes dans lesquelles les autres chronomètres se sont trouvés pendant les voyages. Une répétition plus fréquente des lectures du thermomètre ne pourrait guères donner qu'une première approximation à la température moyenne dont la valeur la plus probable devrait être déduite par une intégration ou quadrature mécanique, opération trop compliquée pour être exécutée à chaque occasion. Cette quadrature mécanique est, pour ainsi dire, exécutée par le chronomètre non-compensé dont la marche, évaluée à l'aide des comparaisons avec les autres chronomètres, nous donne les variations successives de la température multipliées par les intervalles correspondants.

La somme totale des $\Sigma v''^2$ se trouve $= 97,80$, ce qui donne une diminution de 110,29 par rapport à la somme des $\Sigma v'^2$. De ce nombre, 83,67 tombent sur le seul dernier voyage et le reste, de 26,62, se répartit sur tous les autres douze voyages. Il s'en suit que pour les autres voyages l'accord des longitudes n'a pas beaucoup gagné par l'emploi de la méthode des moindres carrés et nous devons nous féliciter d'avoir ici une preuve satisfaisante de l'exactitude très approchée de nos corrections thermométriques.

Par cette raison et vu que, dans cette déduction, chaque petit saut accidentel dans la marche d'un chronomètre quelconque altère l'évaluation des températures, je suis d'avis que, pour les premiers douze voyages, il faut se tenir aux résultats donnés dans notre table pag. 348. Mais, pour le dernier voyage qui s'étend sur les points 36—43, les corrections $d\lambda'$ doivent être ajoutées aux longitudes données dans notre table. L'exactitude approchée de ces corrections peut être estimée par les erreurs probables, déduites des $\Sigma v''^2$, eu égard naturellement aux poids relatifs des deux inconnues. Nous trouvons ainsi, dans le dernier voyage,

	l'erreur probable	
	de $d\lambda'$	de $d(\tau'-\tau)$
pour le point 36	0ˢ23	0°38
» » » 37	0,38	0,46
» » » 38	0,29	0,26
» » » 39	0,20	0,13
» » » 40	0,22	0,13
» » » 41	0,39	0,19
» » » 42	0,43	0,20
» » » 43	0,33	0,13

Pour ces huit points les $d\lambda'$ (pag. 352) sont en général trois à six fois plus forts que leurs erreurs probables, et par rapport aux $d(\tau'-\tau)$ la proportion est encore plus grande. Quoique

je n'hésite pas, à ce que je viens de dire, d'adopter les $d\lambda'$ pour le dernier voyage, il reste néanmoins à désirer que ces corrections trouvassent une confirmation ultérieure par une détermination répétée d'une de ces longitudes, si une occasion favorable s'y prête.

Aussi dans quelques cas particuliers des autres voyages la différence entre les $\Sigma v'^2$ et les $\Sigma v''^2$ pourrait paraître trop considérable pour ne pas nous engager à supposer qu'au moins en partie les $d\lambda'$ soient réels. Mais si l'on veut appliquer les corrections dans ces cas particuliers, nous ne sommes plus en droit de les rejeter pour les autres déterminations et nous devons procéder en corrigeant en premier lieu, les longitudes des points principaux Tikhvin et Kirilov, dont les corrections influencent naturellement celles des points intermédiaires. Notre liste précédente nous donne les corrections suivantes des longitudes

	de Tikhvin		de Kirilov
pour la combin. 1.	$d\lambda' = +0\overset{s}{,}62$	pour la combin. 1.	$+0\overset{s}{,}36$
2.	$+0,90$	2.	$+0,36$
3.	$+0,32$	3.	$-0,12$
		4.	$0,00$

d'où nous tirons, en donnant de nouveau le poids $= \frac{1}{2}$ à la dernière combinaison pour Tikhvin et à la première pour Kirilov,

le $d\lambda'$ moyen pour Tikhvin $= +0\overset{s}{,}67$
» » » Kirilov $= +0,12$

Par l'application des corrections précédentes l'accord entre les différentes longitudes de Tikhvin sera un peu diminué. En revanche celui des longitudes de Kirilov a un peu gagné. Nous en déduisons maintenant pour Tikhvin l'err. prob. $= 0\overset{s}{,}17$, pour Kirilov $= 0\overset{s}{,}30$, proportion plus favorable que celle que nous avions trouvée précédemment pag. 341.

En combinant les $d\lambda'$ des points principaux, comme il faut, avec les $d\lambda'$ trouvés pour les autres points, nous parvenons aux corrections définitives des longitudes données dans la liste suivante, auxquelles j'ai ajouté aussi les erreurs probables, telles qu'elles se déduisent maintenant par la formule pag. 347, après avoir traité les $\Sigma v''^2$ suivant les règles de la méthode des moindres carrés.

Lieu déterminé	$d\lambda'$	ε.
1	$+0\overset{s}{,}16$	$0\overset{s}{,}29$
2	$+0,29$	$0,33$
3	$+0,81$	$0,34$
4	$+0,67$	$0,21$
5	$+0,41$	$0,31$
6	$+0,05$	$0,27$
8	$+0,37$	$0,29$

Lieu déterminé	$d\lambda'$	ε
9	+ 0,54	0,37
10	+ 0,57	0,34
12	+ 0,72	0,35
13	+ 0,69	0,36
14	+ 0,72	0,40
15	— 0,24	0,41
16	+ 0,07	0,38
17	+ 0,17	0,39
18	+ 0,66	0,38
19	+ 0,43	0,37
20	+ 0,23	0,34
21	+ 0,16	0,32
22	+ 0,04	0,34
23	— 0,01	0,37
24	+ 0,16	0,37
25	+ 0,12	0,18
26	+ 0,02	0,28
27	— 0,03	0,31
28	— 0,18	0,33
29	— 0,19	0,43
30	— 0,22	0,42
31	— 0,22	0,24
32	— 0,38	0,34
33	— 0,21	0,28
34	— 0,16	0,30
35	+ 0,31	0,34
36	+ 1,50	0,42
37	+ 1,73	0,54
38	+ 1,77	0,47
39	+ 1,63	0,40
40	+ 1,38	0,49
41	+ 1,55	0,51
42	+ 1,33	0,53
43	+ 0,98	0,47

En ajoutant maintenant les corrections déduites pour les positions déterminées pendant le dernier voyage, aux longitudes correspondantes données dans le tableau précédent, nous avons, pour les derniers 8 lieux, en définitive, les coordonnées géographiques suivantes :

	Latitude	Longitude à l'Est de Poulkova	ε	de Greenwich
36. Vachki (Вашки)	60° 17′ 30″,1	0h 30m 22s,07	0s,42	2h 31m 40s,74
37. Iljinskoje (Ильинское)	60 25 49,1	27 51,19	0,54	29 9,86
38. Indoma (Индома)	60 31 47,6	29 45,56	0,47	31 4,23
39. Tchernoslobodskaja (Чернослободская)	60 47 21,0	29 47,92	0,40	31 6,59
40. Bolchechalsk (Большешалскъ)	60 56 39,1	32 47,28	0,49	34 5,95
41. Poltchenski (Польченскій)	60 41 30,9	32 45,91	0,51	34 4,58
42. Pritchistenskoj (Причистенской)	60 25 8,2	33 32,49	0,53	34 51,16
43. Popovo (Попово)	60 10 2,8	33 20,76	0,47	34 39,43

Pour les lieux déterminés pendant les autres voyages, il faudra, pour le moment, adopter les positions telles qu'elles sont données dans le tableau précédent (pag. 348).

UEBER

DIE RUSSISCHEN TOPASE

VON

N. v. Kokscharow.

Gelesen am 7. December 1855.

(Mit 10 lithographirten Tafeln).

UEBER DIE RUSSISCHEN TOPASE.

Der Topas findet sich in Russland: im Ural und im Nertschinsker Gebiet.

Mit Recht gehört hierher die Bemerkung, dass die an verschiedenen Orten Russlands vorkommenden Topase durch ihre Grösse, Vollkommenheit der Krystallisation und durch ihre Durchsichtigkeit zu den Schönsten gehören, welche bis jetzt bekannt sind.

An Krystallen des russischen Topases haben sich folgende Formen bestimmen lassen:

Rhombische Pyramide.

In den Figuren.	Nach Weiss.	Nach Naumann.
	Pyramiden der Hauptreihe.	
i	$(a : 3b : 3c)$	$\frac{1}{3}P$
u	$(a : 2b : 2c)$	$\frac{1}{2}P$
o	$(a : b : c)$	P
e	$(a : \frac{1}{m}b : \frac{1}{m}c)$	mP
	Brachypyramiden.	
s	$(\frac{1}{6}a : \frac{1}{3}b : c)$	$\frac{1}{2}\breve{P}3$
t	$(\frac{1}{5}a : \frac{1}{3}b : c)$	$\frac{3}{5}\breve{P}3$
x	$(\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c)$	$\frac{2}{3}\breve{P}2$
v	$(\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : c)$	$\breve{P}2$
r	$(a : \frac{1}{2}b : c)$	$2\breve{P}2$
	Makropyramide.	
q	$(ma : nb : c)$	$m\bar{P}n$
	Rhombische Prismen.	
	Hauptprisma.	
M	$(\infty a : b : c)$	∞P

In den Figuren.	Nach Weiss.	Nach Naumann.
	Brachyprismen.	
m	$(\infty a : \frac{2}{3}b : c)$	$\infty\breve{P}\frac{3}{2}$
l	$(\infty a : \frac{1}{2}b : c)$	$\infty\breve{P}2$
g	$(\infty a : \frac{1}{3}b : c)$	$\infty\breve{P}3$
n	$(\infty a : \frac{1}{4}b : c)$	$\infty\breve{P}4$
	Domen.	
	Brachydomen.	
β	$(\frac{1}{2}a : b : \infty c)$	$\frac{1}{2}\breve{P}\infty$
a	$(\frac{2}{3}a : b : \infty c)$	$\frac{2}{3}\breve{P}\infty$
f	$(a : b : \infty c)$	$\breve{P}\infty$
γ	$(a : \frac{7}{8}b : \infty c)$	$\frac{8}{7}\breve{P}\infty$
k	$(a : \frac{2}{3}b : \infty c)$	$\frac{3}{2}\breve{P}\infty$
y	$(a : \frac{1}{2}b : \infty c)$	$2\breve{P}\infty$
w	$(a : \frac{1}{4}b : \infty c)$	$4\breve{P}\infty$
	Makrodomen.	
h	$(\frac{1}{3}a : \infty b : c)$	$\frac{1}{3}\bar{P}\infty$
d	$(a : \infty b : c)$	$\bar{P}\infty$
	Pinakoide.	
	Basisches Pinakoid.	
P	$(a : \infty b : \infty c)$	oP
	Brachypinakoid.	
c	$(\infty a : b : \infty c)$	$\infty\breve{P}\infty$

Aus allen den angeführten Formen sind nur zwei, e und q nicht mit ganzer Gewissheit bestimmt worden. Die Flächen der rhombischen Pyramide e (Fig. 10) habe ich nur an einem einzigen grossen Krystalle aus Mursinka, der sich in der Sammlung des Museums des Bergin-stituts befindet, beobachten können. Da aber diese Flächen ziemlich schmal und rauh waren und da bisher unter allen den hundert Krystallen, die durch meine Hände gegangen sind, sich mir nie die Gelegenheit geboten hat dieselben zu beobachten, so scheint es mir dass die Form e noch mit grösserer Entschiedenheit bestimmt werden muss. Vielleicht kommt ihr der Ausdruck 2P zu. Die Flächen der rhombischen Pyramide q (Fig. 4 und 5.) findet man an einem ziemlich grossen Krystalle aus dem Ilmengebirge, welcher in der Sammlung des P. A. v. Ko-

tschubey zu sehen ist, so wie noch an einigen wenigen Krystallen im Museum des Berginstituts. Da aber die Flächen dieser Form ebenfalls rauh sind, so konnte man sie auch nicht mit ganzer Sicherheit bestimmen. Wenn die Combinationskante $\frac{q}{o}$ mit der Combinationskante $\frac{l}{o}$ parallel ist, wie es mir geschienen hat, so muss die Fläche q durch das Zeichen $\frac{2}{3}\bar{P}2$ ausgedrückt werden. Was die Form γ anbelangt so erhält man für dieselbe aus den Messungen mit dem gewöhnlichen Wollastonschen Goniometer einen sehr complicirten Ausdruck, obgleich ihre Flächen ziemlich glatt und glänzend sind, wie ich dies an einem Krystalle vom Flusse Urulga (Nertschinsk) aus der Sammlung des A. B. v. Kämmerer zu beobachten Gelegenheit hatte. Die annäherungsweisen Messungen ergaben nämlich folgende Resultate:

$$\gamma : f = \text{ungefähr } 176^\circ\ 25'$$
$$\gamma : y = \text{ungefähr } 165^\circ\ 0'$$
$$\gamma : u = \text{ungefähr } 136^\circ\ 16'$$

Wenn man diese Messungen in Rücksicht nehmen will, so ist für γ der passendste Ausdruck $\frac{8}{7}\breve{P}\infty$ und in diesem Falle erhält man durch Rechnung:

$$\gamma : f = 176^\circ\ 10'\ 41''$$
$$\gamma : y = 165^\circ\ 7'\ 57''$$
$$\gamma : u = 135^\circ\ 58'\ 28''$$

Die wichtigsten Combinationen der oben genannten Formen der russischen Topaskrystalle sind auf Taf. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX und X, in schiefer und horizontaler Projection dargestellt, nämlich:

Fig. 1 und 1 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u o M l a f y c h d

Fig. 2 und 2 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . 4\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u o M l a f y w c h d

Fig. 3 und 3 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . 2\breve{P}2 . \infty\breve{P}2 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u σ M r l a f y h d

Fig. 4 und 4 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{1}{2}\breve{P}3 . \frac{2}{3}\breve{P}3 . \frac{1}{2}\breve{P}\infty . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . m\bar{P}n . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u o M l s t β a f y c q h d

Fig. 5 und 5 bis) $\frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . m\bar{P}n . \bar{P}\infty .$
u o M l a f y c q d

Fig. 6 und 6 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . \infty P . \infty\breve{P}\frac{3}{2} . \infty\breve{P}2 . \breve{P}\infty .$
P i u M m l f

Fig. 7 und 7 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \infty\breve{P}3 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u o M l g a f y c h d

Fig. 8 und 8 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . 2\breve{P}2 . \infty\breve{P}2 . \infty\breve{P}4 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . 4\breve{P}\infty . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u o M r l n a f y w h d

Fig. 9 und 9 bis) $oP . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \infty\breve{P}3 . \frac{3}{5}\breve{P}3 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P u o M l g t a f y c d

Fig. 10 u. 10 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . mP . \infty P . \frac{2}{3}\breve{P}2 . \breve{P}2 . \infty\breve{P}2 . \infty\breve{P}3 . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u o e M x v l g f y c h d

Fig. 11 u. 11 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \frac{2}{3}\breve{P}2 . \infty\breve{P}\frac{3}{2} . \infty\breve{P}2 . \infty\breve{P}3 . \infty\breve{P}4 . \breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u o M x m l g n f c d

Fig. 12 u. 12 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . \infty P . \frac{3}{4}\breve{P}2 . \infty\breve{P}2 . \frac{3}{5}\breve{P}3 . \breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty .$
P i u M x l t f c

Fig. 13 u. 13 bis) $oP . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P u o M l a f y c h d

Fig. 14 u. 14 bis) $\frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty .$
i u o M l a f y c

Fig. 15 u. 15 bis) $\frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \bar{P}\infty .$
i u o M l a f y c d

Fig. 16 u. 16 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \breve{P}2 . 2\breve{P}2 . \infty\breve{P}2 . \breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u o M v r l f c d

Fig. 17 u. 17 bis) $oP . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{3}{2}\breve{P}\infty . \infty\breve{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P u o M l k c d

Fig. 18 u. 18 bis) $\frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty .$
u o M l f y

Fig. 19 u. 19 bis) $oP . \frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \frac{2}{3}\breve{P}\infty . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \frac{1}{3}\bar{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P i u e M l a f y h d

Fig. 20 u. 20 bis) $\frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \bar{P}\infty .$
u o M l f y d

Fig. 21 u. 21 bis) $\frac{1}{3}P . \frac{1}{2}P . P . \infty P . \infty\breve{P}2 . \breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . \bar{P}\infty .$
i u o M l f y d

Fig. 22 u. 22 bis) $\infty P . \infty\breve{P}2 . \infty\breve{P}3 . \breve{P}\infty .$
M l g f

Fig. 23 u. 23 bis) $oP . P . \breve{P}\infty . \bar{P}\infty .$
P o M d

Fig. 24 u. 24 bis)	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\infty\breve{P}3$.	$\breve{P}\infty$.	$2\breve{P}\infty$.
	M	l	g	f	y

Fig. 25 u. 25 bis)	$\frac{1}{2}P$.	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.
	u	M	l	f

Fig. 26 u. 26 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$2\breve{P}\infty$.	$\infty\breve{P}\infty$.	$\frac{1}{3}\bar{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	P	i	u	o	M	l	f	y	c	h	d

Fig. 27 u. 27 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$\infty\breve{P}\frac{3}{2}$.	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	P	i	u	o	M	m	l	f	d

Fig. 28 u. 28 bis)	oP .	mP .	$\frac{1}{3}P$.	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$2\breve{P}2$.	$\infty\breve{P}2$.	$\frac{2}{3}\breve{P}\infty$.	$\breve{P}\infty$.	$m\bar{P}\infty$.	$\frac{1}{3}\bar{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	P	e	i	u	q	M	r	l	a	f		h	d

Fig. 29 u. 29 bis)	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	u	o	M	l	f	d

Fig. 30 u. 30 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$\breve{P}2$.	$2\breve{P}2$.	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$m\breve{P}\infty$.	$2\breve{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	P	i	u	o	M	v	r	l	f	γ	y	d

Fig. 31 u. 31 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$\frac{1}{3}\bar{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	P	i	u	o	M	l	f	h	d

Fig. 32 u. 32 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	P	i	u	o	M	l	f	d

Fig. 33 u. 33 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$2\breve{P}2$.	$\infty\breve{P}2$.	$\frac{2}{3}\breve{P}\infty$.	$\breve{P}\infty$.	$2\breve{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	P	i	u	o	M	r	l	a	f	y	d

Fig. 34 u. 34 bis)	oP .	$\frac{1}{2}P$.	P .	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$2\breve{P}\infty$.	$\infty\breve{P}\infty$.	$\bar{P}\infty$.
	P	u	o	M	l	f	y	c	d

Fig. 35 u. 35 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$2\breve{P}\infty$.
	P	i	M	l	f	y

Fig. 36 u. 36 bis)	∞P .	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.
	M	l	f

Fig. 37 u. 37 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	$\infty\breve{P}2$.	$2\breve{P}\infty$.
	P	i	l	y

Fig. 38 u. 38 bis)	oP .	$\frac{1}{3}P$.	$\infty\breve{P}2$.	$\breve{P}\infty$.	$2\breve{P}\infty$.
	P	i	l	f	y

Fig. 39 u. 39 bis)	oP .	$\infty\breve{P}2$.	$2\breve{P}\infty$.
	P	l	y

Fig. 40 u. 40 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \breve{P}\infty$.
P i M l f

Fig. 41 u. 41 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \breve{P}\infty \,.\, 2\breve{P}\infty$.
P i u M l f y

Fig. 42 u. 42 bis) $oP \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, 2\breve{P}\infty$.
P i M l y

Fig. 43 u. 43 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, \infty P \,.\, \frac{2}{3}\breve{P}2 \,.\, \infty\breve{P}2$.
P i u M x l

Fig. 44 u. 44 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, P \,.\, \infty P \,.\, \frac{2}{3}\breve{P}2 \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \breve{P}\infty \,.\, 2\breve{P}\infty$.
P i u o M x l f y

Fig. 45 u. 45 bis) $\frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, 2\breve{P}\infty$.
i u M l y

Fig. 46 u. 46 bis) $\frac{1}{2}P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \breve{P}\infty$.
u M l f

Fig. 47 u. 47 bis) $\frac{1}{2}P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \infty\breve{P}3 \,.\, \breve{P}\infty$.
u M l g f

Fig. 48 u. 48 bis) $\frac{1}{2}P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \infty\breve{P}3 \,.\, \breve{P}\infty \,.\, \bar{P}\infty$.
u M l g f d

Fig. 49 u. 49 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \breve{P}\infty \,.\, 2\breve{P}\infty$.
P i u o M l f y

Fig. 50 u. 50 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \breve{P}\infty$.
P i u o M l f

Fig. 51 u. 51 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \frac{2}{3}\breve{P}\infty \,.\, \breve{P}\infty \,.\, 2\breve{P}\infty$.
P i u o M l a f y

Fig. 52 u. 52 bis) $\frac{1}{2}P \,.\, P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \frac{2}{3}\breve{P}\infty \,.\, \breve{P}\infty \,.\, 2\breve{P}\infty \,.\, \infty\breve{P}\infty$.
u o M l a f y c

Fig. 53 u. 53 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \breve{P}\infty \,.\, 2\breve{P}\infty$.
P i u o M l f y

Fig. 54 u. 54 bis) $oP \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, 2\breve{P}\infty$.
P M l y

Fig. 55 u. 55 bis) $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \breve{P}\infty \,.\, 2\breve{P}\infty \,.\, \infty\breve{P}\infty \,.\, \bar{P}\infty$.
P i u o M l f y c d

Fig. 56 u. 56 bis) $P \;.\; \infty P \;.\; \infty\breve{P}2 \;.\; \breve{P}\infty \;.\; 2\breve{P}\infty \;.\; \bar{P}\infty \;.$
o M l f y d

Fig. 57 u. 57 bis) $\frac{1}{2}P \;.\; P \;.\; \infty P \;.\; \infty\breve{P}2 \;.\; \breve{P}\infty \;.\; \bar{P}\infty \;.$
u o M l f d

Topas vom Ural.

Man findet den Topas im Ural hauptsächlich an zwei Orten: in der Umgegend von Katharinenburg und auf der Ostseite des Ilmensees im Ilmengebirge.

1) Topas aus der Umgegend von Katharinenburg.

Hier begegnet man den Topas bei dem Dorfe Alabaschka unweit Mursinka, auf Drusenräumen im Granit. Die Grösse der Krystalle ist sehr verschieden, von der Grösse eines Stecknadelkopfes bis zu mehreren Centimetern variirend. In der Regel sind sie von bläulicher Farbe, doch in einigen Fällen auch lichtgrün oder graulichweiss. Selten findet man Topase aus dieser Localität, die ganz farblos sind. Sie kommen hier oft von einer Schönheit der Krystallisation vor, die von keinem ausländischen Topaskrystalle übertroffen wird, was man übrigens im Allgemeinen von allen russischen Topasen sagen kann. Bei Alabaschka trifft man auch die zusammengesetzten Stücke an, welche aus mehreren undeutlich gebildeten Individuen bestehen.

Die Topase von Alabaschka *) bilden die hübschesten Mineralstufen, die man sich denken kann, indem sie vereint mit schönen, grossen, okergelben Feldspathkrystallen, röthlichweissem Lithionglimmer, zu Kugelmassen zusammengehäuften Albitkrystallen und mit grossen Krystallen von Rauchtopas vorkommen. Man trifft die Topaskrystalle einzeln vertheilt, und gewöhnlich mit einem Ende aufgewachsen, woher die an beiden Enden ausgebildeten Krystalle zu einer grossen Seltenheit gehören.

Grösstentheils bieten die Topaskrystalle von Alabaschka ziemlich einfache Combinationen dar, in einigen Fällen aber sind sie eben so complicirt wie die vom Ilmengebirge, und dann unterscheiden sie sich von diesen letzteren hauptsächlich durch ihre bläuliche Farbe.

Die einfachsten Krystalle bieten die Combinationen der Fig. 37, 38, 39, 40, 41, 42 und 43 dar. In diesen Krystallen sind fast immer die Flächen der Prismas $l = \infty\breve{P}2$ und des basischen Pinakoids $P = oP$ vorherrschend, während die anderen mehr oder weniger untergeordnet sind, besonders die Flächen der Pyramiden $i = \frac{1}{3}P$ und $u = \frac{1}{2}P$. Auch trifft man häufig die Flächen des Brachydomas $y = 2\breve{P}\infty$ ziemlich entwickelt an. Die Flächen des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ bilden gewöhnlich bloss die schmalen Abstumpfungen der Combinationskanten $\frac{P}{y}$ (Fig. 38), oder sie kommen in den Combinationen gar nicht vor (Fig. 37, 39 und 42). In einigen selte-

*) Wir haben einige Notizen über das Vorkommen der schönen Mineralien von Alabaschka schon in unserer Abhandlung über den Beryll gegeben (Mat. z. Min. Russl. Bd. I. S. 150 u. weiter).



nen Fällen spielt das Brachydoma $f = \breve{P}\infty$ dieselbe Rolle, wie das Brachydoma $y = 2\breve{P}\infty$ und dann fehlen die Flächen $y = 2\breve{P}\infty$ ganz (Fig. 40), oder sie erscheinen als sehr kleine Dreiecke auf den Combinationswinkeln zwischen den Flächen des Prismas $l = \infty\breve{P}2$ und des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$, und wenn alsdann sich die Flächen der Pyramide $i = \frac{1}{3}P$ mit den Flächen des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ durchschneiden, so bilden sie die Combinationskanten $\frac{i}{f}$, welche mit den gegenüberliegenden Combinationskanten $\frac{f}{l}$ (Fig. 40) parallel laufen. In diesen Krystallen sind die Flächen des Hauptprismas $M = \infty P$ fast immer untergeordnet, oder sie fehlen ganz in den Combinationen. Im ersteren Falle bilden sie gewöhnlich die mehr oder weniger schmalen Zuschärfungen der Brachydiagonalkanten des Prismas $l = \infty\breve{P}2$.

Die complicirten, so wie die selteneren Krystalle aus Alabaschka, sind vermittelst Fig. 6, 10, 11, 44 und 45 dargestellt. In diesen Krystallen sind die Flächen des basischen Pinakoids $P = oP$ oft sehr wenig entwickelt und sie erscheinen als kleine Rhomben (Fig. 11), oder als Achtecke (Fig. 10), bisweilen, jedoch in sehr seltenen Fällen, verschwinden sie ganz (Fig. 45). Die Krystalle sind gewöhnlich lang säulenförmig, und die Flächen des Hauptprismas $M = \infty P$ sind meistens bei ihnen vorherrschend, so wie die Flächen der Pyramiden $i = \frac{1}{3}P$ oder $u = \frac{1}{2}P$ sehr entwickelt. Aus allen diesen Gründen erhalten die Krystalle ein ganz verschiedenes Aussehen von den oben erwähnten. Die Flächen der Pyramide $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$ stumpfen gewöhnlich die Combinationskanten zwischen den Flächen der Pyramide $u = \frac{1}{2}P$ und des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ ab, und sie durchschneiden sich mit den Flächen $P = oP$ und $v = \breve{P}2$ so, dass die Combinationskanten $\frac{x}{P}$, $\frac{x}{v}$ und $\frac{v}{l}$ mit einander parallel laufen (Fig. 10). Bisweilen aber erscheinen die Flächen der Pyramide $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$ als sehr schmale Abstumpfungen der Combinationskanten zwischen den Flächen des basischen Pinakoids $P = oP$ und des Prismas $l = \infty\breve{P}2$ (Fig. 43). Die Flächen der Pyramide $v = \breve{P}2$ stumpfen die Combinationskanten zwischen den Flächen der Hauptpyramide $o = P$ und des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ ab, und bilden mit den Flächen der Pyramide $u = \frac{1}{2}P$ und des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ die Combinationskanten, von welchen die ersteren $\frac{v}{u}$ mit der brachydiagonalen Polkante der Pyramide $u = \frac{1}{2}P$ und die letzteren $\frac{v}{f}$ mit der Diagonale des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ parallel laufen. Die Flächen der Pyramide $v = \breve{P}2$ liegen also in der brachydiagonalen Polkantenzone der Pyramide $u = \frac{1}{2}P$ und in der Diagonalzone des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$, und endlich in der Zone, deren Axe durch die Durchschneidungslinie $\frac{l}{P}$ bestimmt wird (Fig. 10). Die Prismen $m = \infty\breve{P}\frac{3}{2}$, $l = \infty\breve{P}2$, $g = \infty\breve{P}3$ und $n = \infty\breve{P}4$ kommen in den Combinationen als untergeordnete Formen vor (Fig. 11). Ausser den vermittelst der Figuren dargestellten Formen, kommen noch mehrere andere vor, deren Flächen aber so schmal und grösstentheils so matt sind, dass es mir ihre krystallographischen Zeichen zu ermitteln unmöglich war. Gewöhnlich bilden die Flächen solcher Formen die schmalen Abstumpfungen der Combinationskanten $\frac{d}{o}$, $\frac{d}{u}$, $\frac{d}{M}$, $\frac{f}{l}$, $\frac{f}{g}$ u. s. w. Zwischen den Flä-

chen der Pyramide $u = \frac{1}{2}P$ und des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ bemerkt man noch, ausser der Fläche $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$, eine andere rauhe Fläche.

Die Beschaffenheit der Flächen ist sehr verschieden. Gewöhnlich sind die Flächen $i = \frac{1}{3}P$, $u = \frac{1}{2}P$ und $y = 2\breve{P}\infty$ ziemlich eben und gehören zu den glänzendsten. In anderen Fällen dagegen sind die Flächen der Pyramide $i = \frac{1}{3}P$ rauh und bisweilen gekraust; dasselbe kann man auch von den Flächen des Brachydomas $a = \frac{2}{3}\breve{P}\infty$ sagen, welchen man auf einigen complicirten Krystallen begegnet. Die Fläche des basischen Pinakoids $P = oP$ ist selten glänzend, sie ist gewöhnlich ganz matt oder mehr oder weniger drusenartig. Die Flächen der Prismen $M = \infty P$ und $l = \infty\breve{P}2$ sind ziemlich glänzend, aber in der Regel schwach vertical gestreift. Die Flächen der anderen Prismen sind etwas ebener, doch dieselbe Streifung ist auch auf ihnen bemerkbar. Die Flächen der Pyramide $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$ sind ziemlich glänzend. Die Flächen des Makrodomas $d = \bar{P}\infty$ sind sehr oft ganz matt, seltener schwach glänzend. Die Flächen des Brachypinakoids $c = \infty\breve{P}\infty$ sind fast immer glänzend.

Die Durchsichtigkeit der Topase von dem Dorfe Alabaschka ist ebenfalls sehr verschieden. Hin und wieder sind diese Krystalle vollkommen durchsichtig, hin und wieder nur stellweise durchsichtig, mehr oder weniger rissig und mit Sprüngen in der Richtung der Spaltungsfläche (d. h. nach dem basischen Pinakoid) durchsetzt. Auch halbdurchsichtige, oder bloss durchscheinende Krystalle kommen nicht selten vor *).

Den Topaskrystallen von Alabaschka begegnet man, wie schon oben bemerkt wurde, vereinzelt und nicht zu Drusen vereinigt. In einigen Fällen indessen bestehen die Krystalle aus zwei oder mehreren unter einander verwachsenen Individuen (doch immer nur aus wenigen, z. B. aus zwei, drei, vier u. s. w., aber selten mehr als aus sechs), die in paralleler Stellung zusammengewachsen sind. In der Sammlung von A. D. v. Osersky findet sich ein ausgezeichnet schöner, ganz durchsichtiger Krystall dieser Art. Ich habe denselben auf Fig. 55 in seiner natürlichen Form abgebildet, d. h. mit allen Unregelmässigkeiten, die von der ungleichmässigen Ausdehnung der Flächen herrühren, nur anderthalb Mal vergrössert.

Die ganz durchsichtigen Topase von Alabaschka werden zu Katharinenburg zu Schmucksteinen geschliffen, die im Handel einen ziemlich hohen Preis erlangen. Leider verarbeiten zu-

*) Eine ausgezeichnet schöne Sammlung von Topaskrystallen aus Alabaschka befindet sich im Museum des Berginstituts zu St. Petersburg. Unter diesen Krystallen stellt einer die Combination der Fig. 37 dar; er hat bis 6 Centimeter Länge und bis 5½ Centimeter im grössten Durchmesser. Er ist von ziemlich dunkel bläulicher Farbe und ganz durchsichtig. Seine Flächen aber sind nicht eben, sondern im Gegentheil mehr oder weniger drusenartig. Ein anderer Krystall, von der Combination der Fig. 10, hat gegen 15 Centimeter Länge und bis 7 Centimeter im grössten Durchmesser. Dieser Krystall ist bloss stellweise durchsichtig. Ausser den hier angeführten Krystallen giebt es noch in dieser Sammlung viele andere, die durch ihre Schönheit der Krystallisation, ihre Grösse und ihre Durchsichtigkeit die Aufmerksamkeit auf sich ziehen. Sie bieten fast Alle die oben beschriebenen Combinationen dar. Auch in den Sammlungen der Hrn. Dr. E. J. v. Rauch, P. A. v. Kotschubey und A. D. v. Osersky befinden sich mehrere schöne Topaskrystalle aus dieser Localität.

weilen die dortigen Juweliere manche sehr schöne durchsichtige Topaskrystalle, um den Geschmack der Bewohner des Urals zu befriedigen.

Gustav Rose*) verdanken wir die erste ausführliche Beschreibung der Topase von Alabaschka und die Bestimmung ihrer Formen.

2) Topas aus dem Ilmengebirge.

Der Topas kommt hier auf der Ostseite des Ilmensees, in der Umgegend der Hütte Miask, im Granit vor. Man trifft ihn zusammen mit grünem Feldspath, Chiolith, schönen Phenakitkrystallen und schwarzem zweiaxigen Glimmer. Zuweilen sind alle diese Mineralien auf ein und derselben Stufe vereint. Der Topas aus dieser Localität zerfällt in zwei Varietäten, die nur krystallisirt vorkommen. Die Krystalle der ersten Varietät zeichnen sich besonders durch ihre Farblosigkeit, ihre vollkommene Durchsichtigkeit, ihren Flächenreichthum und durch ihre vollständige Ausbildung aus. Die Krystalle der zweiten Varietät sind dagegen rissig, von schmutzig gelblichweisser Farbe, meistens bloss an den Kanten durchscheinend; auch bieten sie sehr einfache Combinationen dar, ähnlich denen, die auf Fig. 23 dargestellt sind. Die im Ilmengebirge mit der Ausbeute der Mineralien sich beschäftigenden Arbeiter haben diesen letzteren Topasen den Beinamen «verfaulte» gegeben, weil dieselben durch die grosse Anzahl von Rissen, die ihnen eigen sind, sehr leicht Feuchtigkeit in sich ziehen und daher leicht zerbrechbar sind, so dass ein ganz schwacher Druck mit dem Finger bisweilen hinreichend ist, um den Krystall in eine Menge kleiner Stücke zu zersplittern.

Die durchsichtigen Krystalle (d. h. von der ersten Varietät) kommen auf dem grünen Feldspath aufgewachsen vor, häufig aber finden sie sich in einem weissen oder gelblichen Thone, der hier sich auf den Drusenräumen findet und nicht selten Feldspathstücke enthält. In diesem Falle sind die Krystalle gewöhnlich an einem Ende abgebrochen, doch findet man auch an beiden Enden ganz gut ausgebildete Krystalle, was indessen zu einer Seltenheit gehört. Die Topase aus dieser Localität sind grösstentheils von ganz rein weisser Farbe und vollkommen durchsichtig. Ihre Grösse ist sehr verschieden: zuweilen sind sie nur so gross wie ein Stecknadelkopf, während sie in anderen Fällen eine Länge von mehreren Centimetern erreichen. Im Museum des Berginstituts zu St. Petersburg befinden sich mehrere Topaskrystalle aus dem Ilmengebirge, die bis 5 Centimeter lang sind. Nach v. Lissenko's Mittheilung, soll man in früheren Zeiten Krystalle von 6, 7 und 10 Pfund angetroffen haben**). Professor D. v. Sokolow führt an, dass in der Sammlung des verstorbenen Berghauptmanns Hermann ein Topaskrystall vom Ilmengebirge gewesen sei, der über 7 Pfund gewogen hätte***).

Man findet in den Topaskrystallen vom Ilmengebirge fast alle bis jetzt in den Topasen bestimmten Formen. Die wichtigsten Combinationen derselben sind vermittelst Fig. 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19 und 21 dargestellt.

---

*) Gustav Rose. Reise nach dem Ural und Altai. Berlin, 1837; Bd. I, S. 453 und Bd. II, S. 496.

**) Gustav Rose. Reise nach dem Ural und Altai. Berlin, 1842, Bd. II, S. 80.

***) Дмитрій Соколовъ. Руководство къ Минералогіи. С.-Петербургъ 1832, часть I, стр. 451.



Aus allen diesen Figuren ist der Habitus der Topaskrystalle vom Ilmengebirge sehr leicht zu ersehen. Fast in allen Krystallen sind die Flächen des Hauptprismas M $= \infty P$ und der rhombischen Pyramiden o $= P$, u $= \frac{1}{2}P$ und i $= \frac{1}{3}P$ ziemlich entwickelt, vorzüglich die erstere, woher sie ein ganz anderes Aussehen, als die Krystalle von Alabaschka, erhalten. Sie zeichnen sich ebenfalls durch das häufigere Vorkommen der oft sehr entwickelten Flächen des Makrodomas d $= \bar{P}\infty$ aus, und durch das Vorhandensein der Brachydomen a $= \frac{2}{3}\breve{P}\infty$, f $=$ $= \breve{P}\infty$, y $= 2\breve{P}\infty$ und w $= 4\breve{P}\infty$, die oft alle an ein und demselben Krystalle vereinigt sind. Fast an jedem Krystalle bemerkt man die Flächen des Prismas l $= \infty\breve{P}2$, die in einigen Fällen sogar ziemlich breit sind (Fig. 13, 15, 18, 19 und 21), in anderen dagegen schmal (Fig. 8, 9, 14 und 16). Den Flächen des Prismas g $= \infty\breve{P}3$, des Makrodomas h $= \frac{1}{3}\bar{P}\infty$ und des basischen Pinakoids P $= oP$ begegnet man auch häufig genug, aber die Flächen des basischen Pinakoids P $= oP$ sind fast immer klein, und dadurch unterscheiden sich diese Topase besonders von den Krystallen von Alabaschka. Die Flächen der anderen Formen sind ziemlich selten; gewöhnlich erscheinen sie als mehr oder weniger schmale Abstumpfungen verschiedener Theile der Krystalle. So z. B. stumpfen die Flächen der rhombischen Pyramide r $= 2\breve{P}2$ die Combinationsecken ab, welche von den Flächen o, f und l (Fig. 3), oder von den Flächen o, y und l (Fig. 8) gebildet sind. In einigen Krystallen bilden ebenfalls dieselben Flächen Abstumpfungen der Combinationskanten zwischen den Flächen des Prismas M $= \infty P$ und des Brachydomas f $= \breve{P}\infty$, und der Combinationskanten zwischen den Flächen der rhombischen Pyramide v $= \breve{P}2$ und des Prismas l $= \infty\breve{P}2$ (Fig. 16). Die Flächen der rhombischen Pyramide r $=$ $2\breve{P}2$ werden also leicht durch ihre Lage bestimmt, denn, wie aus den Figuren 3 und 8 es ersichtlich ist, liegen sie in der brachydiagonalen Polkantenzone der Hauptpyramide o $= P$ und in der Diagonalzone des Brachydomas y $= 2\breve{P}\infty$, und bilden zugleich die horizontalen Kanten mit den Flächen des Prismas l $= \infty\breve{P}2$. Desgleichen werden die Flächen der rhombischen Pyramide r $= 2\breve{P}2$ durch die Zonen $\frac{f}{M}$ und $\frac{v}{l}$ (oder $\frac{P}{l}$) vollkommen bestimmt. Die Flächen der rhombischen Pyramide t $= \frac{3}{5}\breve{P}3$ bilden die schmalen Abstumpfungen der Combinationskanten, zwischen den Flächen der rhombischen Pyramide u $= \frac{1}{2}P$ und des Brachydomas a $= \frac{2}{3}\breve{P}\infty$ (Fig. 9), oder der Combinationskanten zwischen den Flächen der rhombischen Pyramide i $=$ $\frac{1}{3}P$ und des Brachydomas f $= \breve{P}\infty$ (Fig. 12). Die Flächen der rhombischen Pyramide s $=$ $\frac{1}{2}\breve{P}3$ bilden ebenfalls sehr schmale Abstumpfungen der Combinationskanten zwischen den Flächen der rhombischen Pyramide i $= \frac{1}{3}P$ und des Brachydomas a $= \frac{2}{3}\breve{P}\infty$, und sie liegen in der Diagonalzone des Brachydomas $\beta = \frac{1}{2}\breve{P}\infty$ (Fig. 4). Die Flächen der rhombischen Pyramide q $= m\bar{P}n$ stumpfen die Combinationskanten zwischen den Flächen des Makrodomas d $=$ $\bar{P}\infty$ und der rhombischen Pyramide u $= \frac{1}{2}P$ ab. Diese Flächen sind sehr selten und es scheint, dass sie die Combinationskanten $\frac{q}{o}$ bilden, welche mit den Combinationskanten $\frac{o}{l}$ parallel laufen (Fig. 4). Die Flächen der rhombischen Pyramide v $= \breve{P}2$ bilden, wie schon bei der Beschrei-

bung der Krystalle von Alabaschka erwähnt wurde, Abstumpfungen der Combinationskanten zwischen den Flächen des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ und der rhombischen Pyramide $o = P$; sie schneiden auch die Flächen der rhombischen Pyramide $u = \frac{1}{2}P$ in den Kanten, die mit den brachydiagonalen Polkanten dieser Pyramide parallel laufen.

Die Flächen des Brachydomas $k = \frac{3}{2}\breve{P}\infty$ habe ich bloss an einem einzigen Krystalle Gelegenheit gehabt zu beobachten; derselbe befindet sich in der Sammlung des P. A. v. Kotschubey und gehört zu der zweiten Varietät der Topase aus dem Ilmengebirge (d. h. zu den rissigen, durchscheinenden Topasen). Die Flächen des Brachydomas $k = \frac{3}{2}\breve{P}\infty$ bilden mit den Flächen der rhombischen Pyramide $u = \frac{1}{2}P$ und den gegenüberliegenden Flächen des Prismas $l = \infty\breve{P}2$ die Combinationskanten, die mit einander parallel laufen (Fig. 17).

Was die Beschaffenheit der Flächen anbelangt, so ist sie ebenso verschieden, wie in den Topasen von Alabaschka. Die Flächen der Hauptpyramide $o = P$ sind in den grösseren Krystallen fast immer matt, in den kleineren dagegen fast immer vollkommen glänzend. Die Flächen der rhombischen Pyramiden $u = \frac{1}{2}P$ und $i = \frac{1}{3}P$ sind meistens glänzend, obgleich in einigen Fällen ziemlich schwach. Die Flächen des basischen Pinakoids $P = oP$ sind oft ganz matt, bisweilen aber ziemlich glänzend. Ebenso sind die Flächen des Makrodomas $d = \bar{P}\infty$ oft ganz matt und bisweilen vollkommen glänzend. Die Flächen des Makrodomas $h = \frac{1}{3}\bar{P}\infty$ sind meistens glänzend. Die Flächen der Brachydomen $f = \breve{P}\infty$, $y = 2\breve{P}\infty$ und $w = 4\breve{P}\infty$ sind fast immer glänzend, besonders die der beiden letzteren Formen. Von den Flächen des Brachydomas $a = \frac{2}{3}\breve{P}\infty$ kann man dasselbe nicht sagen, indem sie in einigen Fällen ziemlich glänzend, in anderen dagegen mehr oder weniger drusig sind. Die Flächen des Brachydomas $\beta = \frac{1}{2}\breve{P}\infty$ sind gewöhnlich gekraust und zum Theil drusig. Die Flächen aller Prismen sind immer sehr glänzend und schwach vertical gestreift, vorzugsweise die Flächen der Prismen $M = \infty P$ und $l = \infty\breve{P}2$, die indessen in einigen Fällen so glatt und glänzend sind wie ein Spiegel. Die Flächen der rhombischen Pyramide $r = 2\breve{P}2$ und des Brachypinakoids $c = \infty\breve{P}\infty$ sind immer sehr glänzend. Die Flächen der rhombischen Pyramide $t = \frac{4}{3}\breve{P}3$ sind schwach glänzend. Die Flächen der rhombischen Pyramide $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$, die auch, obgleich selten, an einigen Krystallen vom Ilmengebirge vorkommen, sind meistens ganz matt, ebenso auch die Flächen der rhombischen Pyramide $q = m\bar{P}n$.

Die erste ausführliche Beschreibung der Topase vom Ilmengebirge verdanken wir ebenfalls Gustav Rose*), der auch zuerst die Flächen $n = \infty\breve{P}4$, $a = \frac{2}{3}\breve{P}\infty$, $w = 4\breve{P}\infty$, $r = 2\breve{P}2$ und $t = \frac{4}{3}\breve{P}3$ in diesen Topaskrystallen bestimmt hat. Zu diesen, damals neuen Formen, habe ich jetzt folgende Formen hinzugefügt, die, meines Wissens nach, noch von Niemand beobachtet wurden, nämlich: $e = mP$ (wo m wahrscheinlich $= 2$ ist), $v = \breve{P}2$, $s = \frac{1}{2}\breve{P}3$, $q = m\bar{P}n$, $\beta = \frac{1}{2}\breve{P}\infty$ und $k = \frac{3}{2}\breve{P}\infty$.

*) Gustav Rose. Reise nach dem Ural und Altai. Berlin, 1842, Bd. II, S. 80 und 496.



Topas aus Nertschinsk.

Der Topas des Nertschinsker Gebiets findet sich gegenwärtig hauptsächlich in drei Localitäten, nämlich: in den Bergketten Borschtschowotschnoi, Kuchuserken und Adun-Tschilon *). Im Adun-Tschilonschen Gebirgszuge ist das Mineral schon seit langer Zeit bekannt (wie man vermuthen kann, seit dem Jahre 1723); doch aus den Bergketten Borschtschowotschnoi und Kuchuserken erscheinen die Topase erst seit kurzer Zeit in den Sammlungen der Liebhaber. Im Jahre 1840 erhielt das Museum des Berginstituts zu St. Petersburg das erste Exemplar aus dem Borschtschowotschnoi Gebirgszuge, wenigstens in dem Jahre ist es im russischen Bergjournale beschrieben worden **).

Die Topase vom Adun-Tschilon haben ein ganz eigenes Aussehen, was sie leicht von den Topasen aus allen anderen russischen Fundörtern unterscheiden lässt. Zu einer Eigenthümlichkeit derselben gehört schon die, dass sie stets zu grossen Drusen vereinigt sind. Dagegen die Topase aus den beiden anderen angeführten Gebirgszügen vereinzelt vorkommen; auch sind sie einander so ähnlich, dass nur zu oft Verwechselungen der Localitäten statt finden. In den Privat- und Kronssammlungen bezeichnet man grösstentheils die Topaskrystalle vom Borschtschowotschnoi und Kuchuserken als aus ein und derselben Localität stammend, nämlich aus der Umgegend des Flusses Urulga ***). Die Ursache dieser Verwechselung liegt erstens gewöhnlich in der grossen Aehnlichkeit der Krystalle und zweitens in dem weiten Wege, den dieselben machen müssen, um endlich in die Hände eines Liebhabers zu gelangen. In der That werden alle die sogenannten bunten Steine, wie Topas, Beryll u. s. w. in den verschiedenen Gebigszügen des Nertschinsker Gebiets von den dortigen Bauern ausgebeutet, die sie vorzüglich nach der Stadt Nertschinsk und der Hütte gleiches Namens zum Verkauf bringen. Gewöhnlich halten sich in diesen Orten schon Aufkäufer auf, besonders solche Leute, die sich mit dem Schleifen der Steine beschäftigen; doch dieselben richten ihre Aufmerksamkeit mehr auf die Durchsichtigkeit, Vollkommenheit der Krystallisation und auf die anderen Eigenheiten, als auf den Fundort derselben. Die auf diese Art erlangten Krystalle werden später schon zu ziemlich hohen Preisen an Ort und Stelle verkauft, oder man versendet sie nach Irkutsk, Katharinenburg und selbst zur Nischnii-Nowogoroder Messe, von wo aus sie sich alsdann, nachdem sie durch viele Hände gegangen sind, im Inneren Russlands und überhaupt in ganz Europa verbreiten. Wenn also ein Topaskrystall aus diesen letzteren Localitäten in die Sammlung eines Mineralogen zu St. Petersburg gelangt, so wird sein Fundort schon sehr zweifelhaft.

1) Topas aus dem Borschtschowotschnoi Gebirgszuge.

Der Topas findet sich in vielen Localitäten des genannten Gebirgszuges, doch hauptsächlich in der Umgegend des Flusses Urulga. Ausser den an diesem Flusse gelegenen Ausbrüchen

*) Eine kurze Notiz dieser drei Fundörter haben wir in unserer Abhandlung über den Beryll gegeben. (Vergl. Mat. z. Min. Russl. Bd. I, S. 164 u. 165.)

**) Russisches Bergjournal. 1840, Bd. II, S. 139.

***) Russisches Bergjournal. 1840, Bd. II, S. 139. Man begehet hier einen Fehler, indem man gewöhnlich «Urulunga» statt «Urulga» schreibt. (Vergl. Mat. zur Min. Russl. Bd. I. S. 168).



findet man ihn noch: in den Bergen Semenowskaia und Kibirewskaia, bei dem Dorfe Lesskowa und noch an anderen Orten *).

Die Topase kommen hier in grossen sehr schön ausgebildeten Krystallen vor, so wie auch in Stücken, die unregelmässige Umrisse haben und aus mehreren zusammengewachsenen und verschmolzenen, undeutlich ausgebildeten Individuen bestehen.

Die im Gebirgszuge Borschtschowotschnoi vorkommenden Topase zeichnen sich durch ihre ausserordentliche Schönheit, angenehme Farbe, Durchsichtigkeit und bedeutende Grösse aus; sie übertreffen, vereint mit den Topasen von Kuchuserken, alles was bisher der Ural und der Adun-Tschilon an Topasen geliefert; auch gehören sie unstreitig zu der schönsten Varietät die wir bis jetzt gesehen haben. Ihre Farbe wechselt meistens zwischen der der gewöhnlichen Rauchtopase (Bergkrystall) und der der brasilianischen Topase, in einigen Fällen findet man sie von mehr oder weniger rein dunkelhoniggelber Farbe; auch treffen sich blaulichweisse, farblose, so wie vollkommen wasserhelle Topase. Die Grösse der Krystalle und der aus mehreren Individuen bestehenden Stücke ist in den Topasen aus dieser Localität, so wie in denen vom Ural, sehr verschieden, doch bisweilen ist dieselbe gewiss sehr merkwürdig. So befindet sich z. B. in der ausgezeichnet schönen Sammlung Seiner Excellenz des Herrn Grafen L. A. v. Perowsky ein ganz gut ausgebildeter, vollkommen durchsichtiger Krystall von dunkelhoniggelber Farbe (Fig. 56), der ungefähr 3 Pfund an Gewicht hat. In der Sammlung des Berginstituts zu St. Petersburg trifft man einen durchscheinenden, aber nicht ganz gut ausgebildeten Krystall, von etwas schmutzig braungelber Farbe, der 19 Centimeter lang ist und 21 Centimeter in seinem grössten Durchmesser hat, und der 31 Pfund und 74 Zolotnik wiegt **). In diesem Krystalle sind die Flächen des Hauptprismas $M = \infty P$ vorherrschend; die makrodiagonalen Kanten desselben sind durch die Flächen des Prismas $l = \infty \breve{P}2$ zugeschärft. An dem einen

*) Vergl. im russischen Bergjournal, 1835, Bd. II, S. 461, die Abhandlung von W. v. Titow «Bemerkungen über die Fundörter der bunten Steine und Salzseen des Nertschinsker Gebiets.» v. Titow hat die Güte mir über das Vorkommen der Topase im Borschtschowotschnoi Gebirgszuge folgendes mitzutheilen:

«Die vielen Fundorte der Topase im Borschtschowotschnoi Gebirgszuge können hauptsächlich in vier Gruppen getheilt werden:

1) In der Umgegend des Flusses Urulga in dem Berge Boetz begegnet man Topase von blassgelber Farbe.

2) In dem Berge Semenowskaia findet sich der Topas in unregelmässigen, zum Theil auskrystallisirten, bisweilen ganz durchsichtigen Massen von dunkelgelber Farbe, so wie auch farblos. In dem Berge Tulun, der 2 Werst von dem Berge Semenowskaia gelegen ist, trifft man besonders farblose, durchsichtige und ganz gut auskrystallisirte Topase an.

3) Die in dem Berge Kiberewskaia vorkommenden Topaskrystalle sind theils farblos, theils von weingelber Farbe. Sie werden an vielen Orten ausgebeutet, nämlich: bei Dorogoi Utess oder Tscheremuchowaia Gora (Theurer Fels oder Faulbaum Berg), 2 Werst westlich von dem Berge Kiberewskaia und ungefähr 15 Werst nördlich von dem Dorfe Nowo-Troitzkaia gelegen; aus dieser Localität stammen besonders zwei grosse Krystalle her, von denen der eine 31¾ Pfund wiegt (derselbe findet sich im Museum des Berginstituts zu St. Petersburg) und der andere 26 Pfund an Gewicht hat (dieser vollkommen durchsichtige und gut ausgebildete Krystall war im Besitz S. K. H. des verstorbenen Herzogs Maximilian von Leuchtenberg). In dem Berge Sucholessnaia (trockner Wald) begegnet man Topaskrystalle von weisser und gelber Farbe. In dem Berge Obussinskaia sind sie theils von licht blaulichweisser Farbe, theils farblos. In den Bergen Strelka (kleiner Nadelberg) und Solonetschnaia trifft man Topase von blassgelber Farbe.

4) In der Umgegend des Dorfes Lesskowa, in den Bergen Berkowskaia und Woronia, findet man farblose und gelbe Topase, doch treffen sie sich hier meistens in mehr oder weniger unregelmässigen Massen.»

**) Russisches Bergjournal, 1840. Bd. II, S. 139.



Ende ist der Krystall von der unebenen Fläche des basischen Pinakoids begränzt und an dem anderen von der gekrümmten Oberfläche, die von einer unvollkommenen Ausbildung abhängig ist. Die Flächen des Prismas $M = \infty P$ sind mit mehreren regelmässigen, viereckigen Vertiefungen bedeckt.

Die wichtigsten Combinationen, die an den Krystallen aus den verschiedenen Localitäten des Borschtschowotschnoi Gebirgszuges vorkommen, sind auf Fig. 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 und 36 dargestellt; da aber die Krystallisation der Topase aus dieser Localität so sehr mannigfaltig ist, so können, um dieselbe zu verdeutlichen, alle von uns für die russischen Topase gegebenen Figuren dienen, denn einige Krystalle sind sehr ähnlich den Krystallen vom Ilmengebirge (wie z. B. Fig. 20 und 33), andere denen vom Adun-Tschilon (Fig. 22) und noch andere gleichen sehr denen von Mursinka (z. B. Fig. 54). Die seltensten Combinationen sind die, in welchen die Flächen $v = \breve{P}2$, $r = 2\breve{P}2$ und $\gamma = \frac{8}{7}\breve{P}\infty$ auftreten, wie z. B. die auf Fig. 30 und Fig. 28 abgebildeten Combinationen. Erstere habe ich an einem ziemlich grossen, durchsichtigen und ganz farblosen Krystalle aus der Sammlung des A. B. v. Kämmerer, und letztere an einem, aus meiner Sammlung stammenden Krystalle, beobachten können.

Damit die geehrten Leser sich selbst einen Begriff von der Schönheit, natürlichen Grösse und vollkommenen Ausbildung der Topase aus dem Borschtschowotschnoi Gebirgszuge machen können, so habe ich sieben der schönsten Krystalle, aus der prachtvollen Sammlung S. E. des Grafen L. A. v. Perowsky, auf Fig. 49, 50, 51, 52, 53, 54 und 56 dargestellt. Diese sieben Krystalle sind in ihrer natürlichen Grösse in schiefer und horizontaler Projection, mit allen Details, die von der ungleichmässigen Ausdehnung der Flächen abhängig sind, abgebildet. Also mit Ausnahme der krystallographischen Verhältnisse und der Grösse (die die Figuren vollkommen verdeutlichen) sind die Beschaffenheiten der Flächen und die anderen Eigenschaften dieser Krystalle folgende:

Der auf Fig. 49 dargestellte Krystall ist von ziemlich dunkel weingelber Farbe und ganz vollkommen durchsichtig. Die Fläche des basischen Pinakoids $P = oP$ ist ganz matt, während alle anderen Flächen sehr glänzend sind. Auf den Fläben der Prismen $M = \infty P$ und $l = \infty\breve{P}2$, wie im Allgemeinen, ist eine schwache verticale Streifung bemerkbar.

Der auf Fig. 50 abgebildete Krystall hat die Farbe des Vorhergehenden, und ist ebenfalls vollkommen durchsichtig. Die glänzendsten Flächen desselben sind $i = \frac{1}{3}P$, $u = \frac{1}{2}P$ und $o = P$. Die Flächen $M = \infty P$, $l = \infty\breve{P}2$ und $d = \bar{P}\infty$ sind ebenfalls glänzend, nur schwach vertical gestreift. Die Flächen $f = \breve{P}\infty$ sind glänzend, aber drusenartig. Die Fläche $P = oP$ ist weniger glänzend als alle anderen und dabei besitzt sie Fettglanz.

Der Krystall Fig. 51 ist von blassgelber Farbe und, mit Ausnahme einiger Stellen, durchsichtig. Die Fläche des basischen Pinakoids $P = oP$ ist sehr glänzend, ebenso auch die Flächen $o = P$, $u = \frac{1}{2}P$, $f = \breve{P}\infty$ und $y = 2\breve{P}\infty$. Die Flächen $M = \infty P$ und $l = \infty\breve{P}2$ sind glänzend, aber sehr schwach, ja kaum bemerkbar, vertical gestreift. Die Flächen $i = \frac{1}{3}P$,

$d = \bar{P}\infty$ und $r = 2\breve{P}2$ sind ganz matt. In diesem Krystalle liegen zwischen den Flächen $u = \frac{1}{2}P$ und $f = \breve{P}\infty$ zwei ganz schmale, gewölbte und matte Flächen, die von mir in der Zeichnung nicht in Rücksicht genommen sind. Eine dieser letzteren Flächen ist wahrscheinlich $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$, die andere gehört aber einer Pyramide an, deren krystallographisches Zeichen noch nicht bestimmt ist.

Der Krystall Fig. 52 ist ganz farblos und vollkommen durchsichtig. Bloss die Flächen $a = \frac{2}{3}\breve{P}\infty$ sind rauh und faltig, alle anderen aber sehr glänzend.

Der Krystall Fig. 53 ist von weingelber Farbe und ganz durchsichtig. Alle seine Beschaffenheiten sind ungefähr dieselben, wie die der vorhergehenden Krystalle.

Der Krystall Fig. 54 ist ganz durchsichtig und von weingelber Farbe. Die Fläche $P = oP$ ist sehr rauh und ganz matt, alle anderen sind aber sehr glänzend, vorzüglich die Flächen $y = 2\breve{P}\infty$. Die Flächen $M = \infty P$ und $l = \infty\breve{P}2$ sind, wie gewöhnlich schwach vertical gestreift.

Der Krystall Fig. 56 ist besonders dadurch merkwürdig, dass er mit vollkommener Durchsichtigkeit und Schönheit der Krystallisation eine so ungewöhnliche Grösse vereint. Seine Farbe ist ziemlich dunkel weingelb (oder, um richtiger zu sagen, so ist dieselbe zwischen der des brasilianischen Topases und der des gewöhnlichen Rauchtopases). In diesem Krystalle ist der Pleochroismus sehr deutlich, nämlich: in der Richtung der Haupt- oder Verticalaxe erscheint er von dunkelröthlichgelber Farbe, in der Richtung der Makrodiagonalaxe bemerkt man einen Stich in das Blaulichgrüne, und in der Richtung der Brachydiagonalaxe besitzt er seine dunkel weingelbe Farbe. Die glänzendsten Flächen sind $o = P$ und $M = \infty P$. Die Flächen $d = \bar{P}\infty$ sind glänzend, aber sie haben einige schwache Unebenheiten. Die Flächen $f = \breve{P}\infty$ sind glänzend und schwach drusenartig. Die Flächen $l = \infty\breve{P}2$ sind etwas weniger glänzend, als $M = \infty P$, auch sind sie mit wellenförmigen Streifen bedeckt. Die Combinationskanten $\frac{o}{d}$ und $\frac{d}{f}$ sind schwach abgerundet, was, wahrscheinlich, von den anderen schmalen und nicht ganz gut ausgebildeten Flächen abhängig ist. Dieser grosse und schöne Krystall, welcher mit zu einer der grössten Seltenheiten gezählt werden kann, wiegt 2 Pfund und 90 Zolotnik.

Ausser den beschriebenen Krystallen giebt es noch, in der Sammlung S. E. des Grafen L. A. v. Porowsky, andere, die hier, ihrer Schönheit wegen, verdienen angeführt zu werden. Unter diesen letzteren finden sich zum Beispiel:

Ein vollkommen durchsichtiger Krystall, von weingelber Farbe, ungefähr von der Combination der Fig. 35, der $8\frac{1}{2}$ Centimeter lang ist und ungefähr 5 Centimeter im grössten Durchmesser hat. Seine Flächen $P = oP$, $f = \breve{P}\infty$, $y = 2\breve{P}\infty$ und $i = \frac{1}{3}P$ sind sehr uneben, durchlöchert und mit spitzen Unebenheiten bedeckt. Die Flächen $M = \infty P$ und $l = \infty\breve{P}2$ sind ziemlich glänzend und schwach vertical gestreift. Dieser Krystall ist an einem Ende abgebrochen.

Ein vollkommen durchsichtiger Krystall, ungefähr von der Combination der Fig. 34, der ungefähr $4\frac{1}{2}$ Centimeter lang ist und ungefähr $3\frac{1}{2}$ Centimeter im grössten Durchmesser hat. Seine Farbe ist die des Vorhergehenden. Die Flächen $o = P$ und $d = \bar{P}\infty$ sind ganz matt,

$f = \breve{P}\infty$, $u = \frac{1}{2}P$ und $y = 2\breve{P}\infty$ sind ziemlich glänzend, und die Fläche $P = oP$ ist glänzend, doch schwach drusenartig. Dieser Krystall ist auch an einem Ende abgebrochen.

Ein ganz durchsichtiger Krystall, der in Hinsicht seiner Farbe, Ausdehnung und Beschaffenheit seiner Flächen u. s. w. dem auf Fig. 50 dargestellten sehr ähnlich ist.

Der auf Fig. 57 abgebildete Krystall gehört zu meiner Sammlung.

Ein ausgezeichnet schöner und grosser Krystall aus dem Borschtschowotschnoi Gebirgszuge war im Besitz S. K. H. des verstorbenen Herzogs v. Leuchtenberg. Dieser Krystall wurde zum ersten Mal sehr ausführlich von A. D. v. Osersky *) beschrieben. Nach dieser Beschreibung hat derselbe ungefähr 27 Centimeter in der Richtung der Makrodiagonalaxe, ungefähr 16 Centimeter in der Richtung der Brachydiagonalaxe, und ungefähr 13 Centimeter in der Richtung der Verticalaxe. Er wiegt 26 Pfund. Seine Farbe ist honiggelb. Der ganze obere Theil des Krystalls ist grösstentheils ganz durchsichtig. Die Combination desselben ist folgende: das sehr entwickelte hauptrhombische Prisma $M = \infty P$, dessen makrodiagonale Kanten durch die Flächen des Prismas $l = \infty\breve{P}2$ zugeschärft sind, und dessen oberes Ende von den sehr breiten Flächen des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ und von den weniger entwickelten Flächen des basischen Pinakoids $P = oP$, der Hauptpyramide $o = P$ und dem Makrodoma $d = \bar{P}\infty$ begränzt wird. Das untere Ende ist abgebrochen und daher von einer Spaltungsfläche begränzt.

Man begegnet noch sehr schönen Topaskrystallen aus dem Borschtschowotschnoi Gebirgszuge in verschiedenen anderen Privatsammlungen zu St. Petersburg. Zum Beispiel die Sammlungen der Hrn. P. A. v. Kotschubey, A. D. v. Osersky, A. B. v. Kämmerer und die Meinige sind sehr reich an Exemplaren dieses prachtvollen Minerals. In der Sammlung von P. A. v. Kotschubey findet sich besonders ein Krystall, der durch die Vollkommenheit der Krystallisation und Durchsichtigkeit die Aufmerksamkeit auf sich zieht. Dieser Krystall ist von mittelmässiger Grösse, er hat nämlich: 4 Centimeter Länge und $2\frac{1}{4}$ Centimeter im grössten Durchmesser. Er ist ganz durchsichtig und von licht weingelber Farbe. Seine Combination ist ungefähr die von Fig. 35. Die ganz vollkommen und schön ausgebildeten Flächen dieses Krystalls haben folgende Eigenschaften: $i = \frac{1}{3}P$ und $f = \breve{P}\infty$ sind ohne die geringsten Unebenheiten, aber ganz matt; $y = 2\breve{P}\infty$ sind sehr glänzend; $M = \infty P$ und $l = \infty\breve{P}2$ sind glänzend, aber schwach vertical gestreift, und endlich $P = oP$ ist glänzend, doch etwas drusenartig. Der Krystall ist an einem Ende abgebrochen und daher an demselben von einer Spaltungsfläche begränzt. In derselben Sammlung findet sich noch ain anderer ziemlich kleiner Krystall (ungefähr von $2\frac{1}{2}$ Centimeter Länge und ungefähr $1\frac{1}{4}$ Centimeter im grössten Durchmesser) der besonders dadurch merkwürdig ist, dass er an beiden Enden vollkommen und ganz symetrisch ausgebildet ist. Er ist farblos, ganz durchsichtig und bietet die Combination $oP \,.\, \frac{1}{3}P \,.\, \frac{1}{2}P \,.\, P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}2 \,.\, \infty\breve{P}3 \,.\, \infty\breve{P}\infty \,.\, \breve{P}\infty \,.\, 2\breve{P}\infty$ dar.

*) Russisches Bergjournal, 1846, Bd. I, S. 308.



2) Topas aus dem Gebirgszuge Kuchuserken.

Die Topase kommen hier besonders in den verschiedenen, von den dortigen Bewohnern (Buriaten und Tungusen) durch ganz eigene Namen bezeichneten, Gebirgszweigen des Hauptzuges vor *).

Die Topase, die mir als aus Kuchuserken stammend gezeigt wurden, bieten sehr einfache Combinationen dar, ungefähr die der Fig. 22, 24 und 36. Sie erlangen bisweilen eine bedeutende Grösse; so befindet sich z. B. in der Sammlung des A. D. v. Osersky ein Krystall, der 5 Pfund wiegt. Derselbe ist durchscheinend und von etwas schmutzig gelblichweisser Farbe. Er bietet die Combination der Fig. 36 dar. Seine Flächen M = ∞P und l = $\infty \breve{P}2$ sind ziemlich glänzend und stark vertical gestreift, die Flächen f = $\breve{P}\infty$ sind auch glänzend, doch mit Unebenheiten bedeckt, die von der Zusammenschmelzung der Flächen mehrerer Individuen, aus welchen der ganze Krystall besteht, abhängig sind.

Wenn die vielen anderen Exemplare, die ich unter der Etiquette «aus Kuchuserken» in den Sammlungen der Hrn. A. D. v. Osersky und W. v. Titow gesehen habe, wirklich aus diesem Gebirgszuge kommen, so muss man glauben, dass bisweilen die Combinationen der Krystalle aus dieser Localität sehr complicirt sind, und dass im Allgemeinen diese Topase durch ihre Beschaffenheit so ähnlich denen aus dem Borschtschowotschnoi Gebirgszuge sind, dass es zuweilen schwer ist, sie von den anderen zu unterscheiden. Diese Aehnlichkeit ist indessen etwas sonderbar, denn gewöhnlich betrachtet man den Gebirgszug Kuchuserken als eine südwestliche Fortsetzung des Adun-Tschilons; nun sind aber die Mineralien dieser letzteren Localität, durch ihren Habitus, ganz verschieden von denen aus dem Borschtschowotschnoi Gebirgszuge.

Im Kuchuserken sind die Topase, so wie die anderen Mineralien, erst seit 3 oder 4 Jahren entdeckt worden **).

3) Topas aus dem Gebirgszuge Adun-Tschilon.

Die Topase kommen hier im Topasfels vor, aus welchem die verschiedenen Berge, wie z. B. Hoppewskaia u. s. w. bestehen und die den sogenannten grossen Berg Adun-Tschilon bilden***).

*) W. v. Titow sagt unter anderem in seiner Abhandlung «Bemerkungen über die Fundörter der bunten Steine und Salzseen des Nertschinsker Gebiets» (Russisches Bergjournal, 1855, Bd. II, S. 443): «In dem Hauptzuge von Kuchu«serken, welcher von SW. nach NO. geht, sind bis jetzt fast keine Fundorte der bunten Steine bekannt, sie begegnen «sich vielmehr in den Seitenzweigen desselben, und vorzugsweise in den östlichen Zweigen. Nach den Mittheilungen, «die ich von den Tungusen und Buriaten erhalten konnte, sind folgende Zweige bekannt u. s. w.»

Ferner bezeichnet v. Titow diese Gebirgszweige, vom Süden ausgehend, mit folgenden Namen: Kusk-Kundui, Kargurtui, Laka, Kuchuserken, Narin-Kundui, Urtu-Kundui oder Orton-Kundui, Tchindagatai, Urtui-Undur, Urtui-Nagitui, Uluntui, Golimitui, Altangimil, Talin-Talagai.

Die Topase sind bis jetzt, ebenfalls nach den Mittheilungen des W. v. Titow, in sechs dieser Gebirgszweige bekannt, nämlich: im Kuchuserken — blaue, weingelbe und farblose Topaskrystalle; im Narin-Kundui — weingelbe und weisse Topase, im Urtu-Kundui — weisse, blaue und gelbe Topase; im Tchindagatai — weingelbe Topase; im Urtui-Undur und im Urtui-Nagitui — farblose Topase.

**) W. v. Titow. Russisches Bergjournal, 1855, Bd. II, S. 445.

***) Vergl. «Mat. z. Min. Russlands», Bd. I. S. 166. Nach v. Titow finden sich die Topase hier in den Bergen:

Auch findet man die Topase unter der Grassdecke in einer verwitterten Felsart, die viel Eisenoker enthält, auf einer Fläche, die hier unter dem Namen «Ackerfeld» bekannt ist.

Die Topase aus dem Adun-Tschiloner Gebirgszuge kommen fast immer nur krystallisirt vor. Die Grösse der Krystalle ist aber bedeutend geringer, als die der Topase aus allen den angeführten Localitäten des Nertschinsker Gebiets, und variirt gewöhnlich von der Grösse eines Stecknadelkopfs bis 6 Centimeter Länge und bis 3 Centimeter im grössten Durchmesser, selten mehr. Der Grad der Durchsichtigkeit ist auch um vieles geringer, als der der übrigen Varietäten. Ganz vollkommen durchsichtige Krystalle gehören hier zu einer Seltenheit, häufiger sind sie rissig. Ihre vorherrschende Farbe ist bläulichweiss, doch farblose und gelblichweisse Topase kommen auch vor. Die Krystalle sind fast immer zu grossen Drusen vereinigt und oft mit Rauchtopas- und Beryllkrystallen verwachsen, vorzüglich aber mit ersteren. Zu den Eigenthümlichkeiten, die besonders die Topaskrystalle vom Adun-Tschilon von allen den anderen russischen Topasen unterscheiden, gehören auch die: 1) dass sie im Allgemeinen ihrer Krystallform nach einander sehr ähnlich sind und ziemlich einfache Combinationen darbieten; 2) dass sie oft an beiden Enden von den Zuspitzungs- und Zuschärfungsflächen begränzt sind, was an den Topaskrystallen aus den anderen Localitäten als eine Seltenheit betrachtet werden kann; und 3) dass die Flächen der Prismen $M = \infty P$ und $l = \infty\breve{P}2$ fast immer stark vertical gestreift sind, während diese Streifung in den anderen Topasen mehr oder weniger schwach ist.

Die Adun-Tschiloner Topaskrystalle bilden gewöhnlich ziemlich lange rhombische Prismen $l = \infty\breve{P}2$, deren brachydiagonale Kanten durch die schmalen Flächen des Hauptprismas $M = \infty P$ zugeschärft sind und deren Enden durch die sehr breiten Flächen des Brachydomas $f = \breve{P}\infty$ zugeschärft und durch die kleinen Flächen der rhombischen Pyramide $u = \frac{1}{2}P$ zugespitzt werden (Fig. 46). Ziemlich oft begegnet man auch solchen Krystallen, wo die makrodiagonalen Kanten des Prismas $l = \infty\breve{P}2$ durch die Flächen des Prismas $g = \infty\breve{P}3$ zugeschärft sind (Fig. 47), oder auch solchen, wo die Flächen des Makrodomas $d = \bar{P}\infty$ in der Combination eintreten (Fig. 48). Den mehr complicirten Combinationen begegnet man seltener, als den eben erwähnten.

Was die Beschaffenheit der Flächen anbelangt, so sind gewöhnlich die Flächen $d = \bar{P}\infty$ und $u = \frac{1}{2}P$ glänzend und ziemlich eben, die Flächen $f = \breve{P}\infty$ sind glänzend und oft schwach drusenartig, und endlich die Flächen $M = \infty P$, $l = \infty\breve{P}2$ und $g = \infty\breve{P}3$ sind glänzend, aber stark vertical gestreift.

Winkel der Krystalle des russischen Topases.

Wenn man $a : b : c = 1,80487 : 1,89199 : 1$ (wo a die Haupt- oder Verticalaxe, b die Makrodiagonalaxe und c die Brachydiagonalaxe ist) annimmt, so ergeben sich folgende Winkel:

Goldener Berg, Hoppewskaia und Kutzania. Auch kommen, nach demselben, die Topase im Gebirgszuge Soktui vor, der nordöstlich vom Adun-Tschilon geht, nämlich: in den Bergen Kugutai-Dschilga und Serga-Sirgoi (Russisches Bergjournal, 1855, Bd. II, S. 452).

	Durch Rechnung.	Durch Messung *).
o : P	= 116° 5′ 52″	116° 5′ 45″
o : M	= 153° 54′ 8″	(153° 55′ 0″ Kupffer.) 153° 53′ 0″ *
o : o in X	= 74° 53′ 4″	(74° 53′ 30″ Kupffer.)
o : o in Y	= 130° 22′ 32″	(130° 23′ 12″ Kupffer.) 130° 22′ 51″
o : l	= 148° 15′ 52″	
i : P	= 145° 45′ 55″	145° 47′ 0″ *
i : i in Y	= 149° 31′ 0″	149° 32′ 0″ *
i : u	= 168° 38′ 50″	
i : M	= 124° 14′ 5″	
i : a	= 147° 0′ 6″	
i : f	= 141° 13′ 48″	
i : l	= 122° 11′ 40″	
u : P	= 134° 24′ 45″	134° 24′ 38″
u : M	= 135° 35′ 15″	135° 35′ 10″
u : o	= 161° 41′ 7″	161° 41′ 0″
u : u in Y	= 141° 0′ 6″	141° 1′ 0″
u : f	= 137° 27′ 22″	137° 27′ 43″
u : u über P	= 88° 49′ 30″	88° 50′ 0″
$u_1 : M_2$ d. h. in der Zone u d M	= 113° 43′ 33″	113° 43′ 30″
r : P	= 110° 50′ 41″	

*) Hier werden die mittleren Werthe aus den verschiedenen Messungen gegeben.

Die mit einem * bezeichneten Zahlen gehören den Messungen an, die weniger genau sind, als die anderen, doch sind sie zu gut, um sie mit Stillschweigen zu übergehen. Die auf diese Art bezeichneten Messungen sind: a) Vermittelst des bloss mit *einem* Fernrohr versehenen Instruments vollzogen worden. b) An einem und demselben Krystalle von Mursinka, wo ein jeder Winkel nur ein Mal gemessen werden konnte, indem der Krystall zu kurze Zeit in meinem Besitze war.

Vielleicht rühren die sehr kleinen Differenzen dieser mit einem * bezeichneten Messungen daher, dass die Ränder des reflectirten Bildes nicht immer hinlänglich scharf sichtbar waren.

Fast alle anderen Messungen sind vermittelst des Mitscherlich'schen Goniometers, welches mit *zwei* Fernröhren versehen war, vollzogen worden und dieselben können als sehr genau betrachtet werden.

Die vollständige Revision der Messungen im Allgemeinen, mit ihren Details, wird weiter unten ausführlich angeführt werden.

Neben den Winkeln, die Kupffer erhalten hat, wird sein Name gesetzt sein, die anderen Zahlen sind durch meine Messungen erhalten.

	Durch Rechnung.	Durch Messung.
r : l	= 159° 9′ 19″	
r : o	= 162° 3′ 15″	
r : f	= 136° 33′ 33″	
r : v	= 163° 33′ 18″	
r : M	= 152° 15′ 28″	
r : y	= 140° 2′ 27″	
v : P	= 127° 17′ 23″	
v : M	= 138° 53′ 23″	
v : u	= 164° 11′ 34″	
v : f	= 146° 51′ 22″	
v : o	= 160° 35′ 10″	
v : l	= 142° 42′ 37″	
v : y	= 142° 28′ 55″	
u : a	= 140° 19′ 18″	
x : P	= 138° 47′ 58″	
x : u	= 166° 26′ 44″	
x : f	= 151° 0′ 37″	
x : i	= 166° 39′ 12″	
x : l	= 131° 12′ 2″	
t : P	= 145° 54′ 51″	
t : u	= 157° 54′ 52″	
t : a	= 162° 24′ 26″	
s : P	= 150° 34′ 52″	
s : i	= 163° 40′ 30″	
s : a	= 163° 19′ 36″	
s : β	= 164° 48′ 35″	
M : c	= 117° 51′ 30″	
M : M in Y	= 124° 17′ 0″	(124° 16′ 27″ Kupffer.) 124° 16′ 40″
M : P	= 90° 0′ 0″	90° 0′ 0″
m : M	= 169° 27′ 2″	169° 27′ 30″
m : c	= 128° 24′ 28″	
m : l	= 171° 49′ 6″	
m : P	= 90° 0′ 0″	
l : l in X	= 93° 10′ 44″	93° 12′ 0″ *
: M	= 161° 16′ 8″	(161° 15′ 42″ Kupffer.) 161° 16′ 15″

	Durch Rechnung.		Durch Messung.
l : P	= 90° 0′ 0″		
l_1 : M_2 d. h. das nicht anliegende M, sondern das nachfolgende	= 105° 33′ 8″	. . . .	105° 34′ 0″ *
l : u	= 132° 34′ 13″		
g : g in X	= 115° 31′ 24″		
g : c	= 147° 45′ 42″		
g : l	= 168° 49′ 40″		
g : P	= 90° 0′ 0″		
n : c	= 154° 41′ 9″		
n : n in X	= 129° 22′ 18″		
n : l	= 161° 54′ 13″		
n : P	= 90° 0′ 0″		
a : P	= 147° 32′ 41″		
a : c	= 122° 27′ 19″		
a : f	= 168° 48′ 19″		
a : a über P	= 115° 5′ 22″		
β : P	= 154° 30′ 0″		
β : c	= 115° 30′ 0″		
f : P	= 136° 21′ 0″	. . . .	136° 20′ 47″
f : f über P	= 92° 42′ 0″	. . . .	92° 42′ 23″
f : c	= 133° 39′ 0″		
f : M	= 108° 49′ 0″		
f : l	= 120° 5′ 40″		
f : o	= 127° 26′ 32″		
k : P	= 124° 56′ 51″		
k : c	= 145° 3′ 9″		
k : u	= 132° 24′ 48″		
k : l	= 126° 32′ 41″		
y : c	= 152° 20′ 22″	. . . .	152° 20′ 0″
y : P	= 117° 39′ 38″		
y : f	= 161° 18′ 38″	. . . .	(161° 19′ 6″ Kupffer.)
y : o	= 125° 9′ 46″		

Durch Rechnung.		Durch Messung.
y : l	= 130° 2′ 50″	
w : P	= 104° 41′ 6″	
w : c	= 165° 18′ 54″	
w : y	= 167° 1′ 28″	
w : l	= 134° 38′ 42″	
γ : f	= 176° 10′ 41″	
γ : y	= 165° 7′ 57″	
γ : u	= 135° 58′ 28″	
γ : P	= 132° 31′ 41″	
γ : c	= 137° 28′ 19″	
h : P	= 148° 58′ 4″	
h : u	= 157° 42′ 10″	
h : i	= 164° 45′ 30″	
h : o	= 141° 50′ 12″	
d : P	= 118° 59′ 20″	118° 59′ 0″
d : d über P	= 57° 58′ 40″	
d : M	= 140° 39′ 17″	140° 39′ 30″
d : o	= 155° 11′ 16″	155° 11′ 30″
d : u	= 153° 4′ 18″	153° 4′ 20″
d : h	= 150° 1′ 16″	
d : f	= 110° 31′ 42″	110° 31′ 55″
c : P	= 90° 0′ 0″	

Wenn man jetzt im Allgemeinen in einer jeden der rhombischen Pyramiden mP und $m\breve{\bar{P}}n$, die makrodiagonalen Polkanten durch X, die brachydiagonalen Polkanten durch Y, die Mittelkanten durch Z bezeichnet, und wenn man ebenfalls durch α den Winkel der makrodiagonalen Polkante gegen die Haupt- oder Verticalaxe, durch β den Winkel der brachydiagonalen Polkante gegen die Haupt- oder Verticalaxe, und durch γ den Winkel der Mittelkante gegen die Makrodiagonalaxe der Grundform bezeichnet, so lassen sich ferner durch Rechnung folgende Werthe bestimmen:

o = P.

$\frac{1}{2}$X = 37° 26′ 32″	X = 74° 53′ 4″	α = 46° 21′ 0″
$\frac{1}{2}$Y = 65° 11′ 16″	Y = 130° 22′ 32″	β = 28° 59′ 20″
$\frac{1}{2}$Z = 63° 54′ 8″	Z = 127° 48′ 16″	γ = 27° 51′ 30″

i = $\frac{1}{3}$P.

$\frac{1}{2}$X = 60° 10′ 22″	X = 120° 20′ 44″	α = 72° 21′ 36″

$\frac{1}{2}Y = 74° 45' 30''$	$Y = 149° 31' 0''$	$\beta = 58° 58' 4''$
$\frac{1}{2}Z = 34° 14' 5''$	$Z = 68° 28' 10''$	$\gamma = 27° 51' 30''$

$u = \frac{1}{2}P.$

$\frac{1}{2}X = 50° 50' 10''$	$X = 101° 40' 20''$	$\alpha = 64° 30' 0''$
$\frac{1}{2}Y = 70° 30' 3''$	$Y = 141° 0' 6''$	$\beta = 47° 56' 8''$
$\frac{1}{2}Z = 45° 35' 15''$	$Z = 91° 10' 30''$	$\gamma = 27° 51' 30''$

$r = 2\breve{P}2.$

$\frac{1}{2}X = 50° 2' 27''$	$X = 100° 4' 55''$	$\alpha = 27° 39' 38''$
$\frac{1}{2}Y = 47° 14' 31''$	$Y = 94° 29' 2''$	$\beta = 28° 59' 20''$
$\frac{1}{2}Z = 69° 9' 19''$	$Z = 138° 18' 38''$	$\gamma = 46° 35' 22''$

$v = \breve{P}2.$

$\frac{1}{2}X = 56° 51' 22''$	$X = 113° 42' 45''$	$\alpha = 46° 21' 0''$
$\frac{1}{2}Y = 54° 41' 37''$	$Y = 109° 23' 14''$	$\beta = 47° 56' 8''$
$\frac{1}{2}Z = 52° 42' 37''$	$Z = 105° 25' 14''$	$\gamma = 46° 35' 22''$

$x = \frac{2}{3}\breve{P}2.$

$\frac{1}{2}X = 63° 5' 5''$	$X = 126° 10' 10''$	$\alpha = 57° 32' 41''$
$\frac{1}{2}Y = 61° 24' 42''$	$Y = 122° 49' 24''$	$\beta = 58° 58' 4''$
$\frac{1}{2}Z = 41° 12' 2''$	$Z = 82° 24' 4''$	$\gamma = 46° 35' 22''$

$t = \frac{3}{5}\breve{P}3.$

$\frac{1}{2}X = 72° 36' 17''$	$X = 145° 12' 34''$	$\alpha = 60° 12' 52''$
$\frac{1}{2}Y = 61° 42' 12''$	$Y = 123° 24' 24''$	$\beta = 70° 9' 6''$
$\frac{1}{2}Z = 34° 5' 9''$	$Z = 68° 10' 18''$	$\gamma = 57° 45' 42''$

$s = \frac{1}{2}\breve{P}3.$

$\frac{1}{2}X = 74° 48' 35''$	$X = 149° 37' 10''$	$\alpha = 64° 30' 0''$
$\frac{1}{2}Y = 65° 27' 4''$	$Y = 130° 54' 8''$	$\beta = 73° 15' 29''$
$\frac{1}{2}Z = 29° 25' 8''$	$Z = 58° 50' 16''$	$\gamma = 57° 45' 42''$

$M = \infty P.$

$\frac{1}{2}X = 27° 51' 30''$	$X = 55° 43' 0''$
$\frac{1}{2}Y = 62° 8' 30''$	$Y = 124° 17' 0''$

$m = \infty\breve{P}\frac{3}{2}.$

$\frac{1}{2}X = 38° 24' 28''$	$X = 76° 48' 56''$
$\frac{1}{2}Y = 51° 35' 32''$	$Y = 103° 11' 4''$

$l = \infty\breve{P}2.$

$\frac{1}{2}X = 46° 35' 22''$	$X = 93° 10' 44''$
$\frac{1}{2}Y = 43° 24' 38''$	$Z = 86° 49' 16''$

$g = \infty\breve{P}3.$

$\frac{1}{2}X = 57° 45' 42''$	$X = 115° 31' 24''$
$\frac{1}{2}Y = 32° 14' 18''$	$Y = 64° 28' 36''$

$n = \infty\breve{P}4.$

$\frac{1}{2}X = 64^\circ\ 41'\ 9''$ $X = 129^\circ\ 22'\ 18''$
$\frac{1}{2}Y = 25^\circ\ 18'\ 51''$ $Y = 50^\circ\ 37'\ 42''$

$a = \frac{2}{3}\breve{P}\infty.$

$\frac{1}{2}Y = 57^\circ\ 32'\ 41''$ $Y = 115^\circ\ 5'\ 22''$
$\frac{1}{2}Z = 32^\circ\ 27'\ 19''$ $Z = 64^\circ\ 54'\ 38''$

$\beta = \frac{1}{2}\breve{P}\infty.$

$\frac{1}{2}Y = 64^\circ\ 30'\ 0''$ $Y = 129^\circ\ 0'\ 0''$
$\frac{1}{2}Z = 25^\circ\ 30'\ 0''$ $Z = 51^\circ\ 0'\ 0''$

$f = \breve{P}\infty.$

$\frac{1}{2}Y = 46^\circ\ 21'\ 0''$ $Y = 92^\circ\ 42'\ 0''$
$\frac{1}{2}Z = 43^\circ\ 39'\ 0''$ $Z = 87^\circ\ 18'\ 0''$

$k = \frac{3}{2}\breve{P}\infty.$

$\frac{1}{2}Y = 34^\circ\ 56'\ 51''$ $Y = 69^\circ\ 53'\ 42''$
$\frac{1}{2}Z = 55^\circ\ 3'\ 9''$ $Z = 110^\circ\ 6'\ 18''$

$y = 2\breve{P}\infty.$

$\frac{1}{2}Y = 27^\circ\ 39'\ 38''$ $Y = 55^\circ\ 19'\ 16''$
$\frac{1}{2}Z = 62^\circ\ 20'\ 22''$ $Z = 124^\circ\ 40'\ 44''$

$w = 4\breve{P}\infty.$

$\frac{1}{2}Y = 14^\circ\ 41'\ 6''$ $Y = 29^\circ\ 22'\ 12''$
$\frac{1}{2}Z = 75^\circ\ 18'\ 54''$ $Z = 150^\circ\ 37'\ 48''$

$\gamma = \frac{8}{7}\breve{P}\infty.$

$\frac{1}{2}Y = 42^\circ\ 31'\ 41''$ $Y = 85^\circ\ 3'\ 22''$
$\frac{1}{2}Z = 47^\circ\ 28'\ 19''$ $Z = 94^\circ\ 46'\ 38''$

$h = \frac{1}{3}\bar{P}\infty.$

$\frac{1}{2}X = 58^\circ\ 58'\ 4''$ $X = 117^\circ\ 56'\ 8''$
$\frac{1}{2}Z = 31^\circ\ 1'\ 56''$ $Z = 62^\circ\ 3'\ 52''$

$d = \bar{P}\infty.$

$\frac{1}{2}X = 28^\circ\ 59'\ 20''$ $X = 57^\circ\ 58'\ 40''$
$\frac{1}{2}Z = 61^\circ\ 0'\ 40''$ $Z = 122^\circ\ 1'\ 20''$

Resultate der Krystallmessungen des Topases.

Die von mir zur Messung angewandten Topaskrystalle zeichneten sich durch sehr spiegelnde Flächen, Durchsichtigkeit und im Allgemeinen durch die Vollkommenheit ihrer Ausbildung aus. Ich suchte so viel als möglich alle Krystalle, die nur die geringsten Unebenheiten, Streifungen oder ähnliche Unvollkommenheiten ihrer Flächen zeigten, zu übergehen. Obgleich diese Bedingung nicht leicht zu erfüllen war, so ist es mir doch gelungen Topaskrystalle aus fast allen russischen Localitäten zu messen. Ich habe nämlich: neun Krystalle vom Ilmengebirge (№ 2, № 4, № 5, № 6, № 7, № 8, № 9, № 10, № 11), einen von Mursinka, aus der Umgegend von Katharinenburg (№ 3), zwei vom Flusse Urulga im Gebirgszuge Borschtschowotschnoi (№ 1 und № 12) und einen vom Adun-Tschilon (№ 13) gemessen. Die angestellten Messungen haben mich überzeugt, dass die Winkel der Topaskrystalle aus allen diesen Localitäten nicht im Geringsten von einander abweichen. Die Messungen selbst wurden vermittelst des Mitscherlich'schen Reflectionsgoniometers, welches, nachdem es die Umstände erlaubten, bald mit *einem*, bald mit *zwei* Fernröhren versehen war, vollzogen. Indessen sind nur sehr wenige Winkel mit *einem* Fernrohre gemessen worden. Folgendes sind die erhaltenen Resultate:

1) Die Messungen, die man als sehr genau betrachten kann.

Für f : f (über P).

Am Krystall № 1 von der *Urulga*.	=	92° 42′ 0″ mit *zwei* Fernr.
		92° 42′ 30″ mit *einem* Fernr.
Mittel	=	92° 42′ 15″ (1).
Am Krystall № 2 vom *Ilmengebirge*.	=	92° 42′ 30″ mit *zwei* Fernr. (2).

Der mittlere Werth aus (1) und (2) ist gleich:

92° 42′ 23″ *).

Für f : P.

Am Krystall № 1 von der *Urulga*.	=	136° 21′ 0″ mit *zwei* Fernr.
		136° 21′ 10″, 136° 21′ 0″ mit *einem* Fernr.
Mittel	=	136° 21′ 3″ (3).
An der anderen Seite	=	136° 20′ 30″ mit *einem* Fernr. (4).

Der mittlere Werth aus (3) und (4) ist gleich:

136° 20′ 47″.

Für f : u.

Am Krystall № 1 von der *Urulga*.

An einer Kante	=	137° 27′ 30″ (5).	mit *zwei* Fernr.
An der anderen Kante	=	137° 28′ 0″ (6).	mit *zwei* Fernr.
An der dritten Kante	=	137° 27′ 40″ (7).	mit *zwei* Fernr.

Der mittlere Werth aus (5), (6) und (7) ist gleich:

137° 27′ 43″.

Für d : P.

Am Krystall № 1 von der *Urulga*.	=	118° 59′ 0″ mit *zwei* Fernr. (8).
		118° 59′ 0″ mit *einem* Fernr. (8).
Mittel	=	**118° 59′ 0″.**

Für d : M.

Am Krystall № 1 von der *Urulga*.	=	**140° 39′ 30″** mit *zwei* Fernr. (9).

*) Kupffer hat für diesen Winkel = 92° 45′ 12″ gefunden. (Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen. Berlin, 1825, S. 72.)

Für d : u.

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* } = **153° 4′ 20″** mit *zwei* Fernr. (10).

Für d : f.

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* } = **110° 31′ 55″** mit *zwei* Fernr. (11).

Für u : P.

Am Krystall № 1 von der *Urulga.*

An der einen Seite = 134° 24′ 15″ mit *zwei* Fernr.
134° 24′ 30″ mit *einem* Fernr.

Mittel = 134° 24′ 23″ (12).

An der anderen Seite = 134° 24′ 30″ mit *zwei* Fernr.
134° 24′ 30″ mit *einem* Fernr.

Mittel = 134° 24′ 30″ (13).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* } = 134° 25′ 0″ mit *einem* Fernr. (14).

Der mittlere Werth aus (12), (13) und (14) ist gleich:

134° 24′ 38″.

Für u : M.

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* } = 135° 35′ 50″ mit *zwei* Fernr. (15).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* } = 135° 34′ 30″ mit *einem* Fernr. (16).

Der mittlere Werth aus (15) und (16) ist gleich:

135° 35′ 10″.

Für u_1 : M_2 (d. h. in der Zone u d M).

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* } = **113° 43′ 30″** *) mit *zwei* Fernr. (17).

Für u : u (über P).

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* } = **88° 50′ 0″** mit *zwei* Fernr. (18).

Für u : u (in der Kante Y).

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* } = 141° 1′ 0″ mit *einem* Fernr. (19).

*) Kupffer hat für diesen Winkel 113° 47′ 30″ erhalten. (Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen. Berlin, 1825, S. 81).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* = 141° 1′ 0″ mit *einem* Fernr. (20).

Der mittlere Werth aus (19) und (20) ist gleich:

141° 1′ 0″.

Für o : o (in der Kante Y).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* = 130° 23′ 0″ mit *einem* Fernr. (21).

Am Krystall № 4 vom *Ilmengebirge.* = 130° 23′ 0″, 130° 22′ 30″ mit *zwei* Fernr.

Mittel = 130° 22′ 45″ (22).

Am Krystall № 5 vom *Ilmengebirge.* = 130° 22′ 30″ mit *einem* Fernr. (23).

Am Krystall № 13 vom *Adun-Tschilon.* = 130° 23′ 10″ mit *zwei* Fernr. (24).

Der mittlere Werth aus (21), (22), (23) und (24) ist gleich:

130° 22′ 51″ *).

Für o : P.

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* = 116° 5′ 30″ mit *zwei* Fernr., 116° 5′ 0″ mit *einem* Fernr.

Mittel = 116° 5′ 15″ (25).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* = 116° 6′ 0″ mit *einem* Fernr. (26).

Am Krystall № 10 vom *Ilmengebirge.* = 116° 6′ 0″ mit *zwei* Fernr. (27).

Der mittlere Werth aus (25), (26) und (27) ist gleich:

116° 5′ 45″.

Für o : d.

Am Krystall № 13 vom *Adun-Tschilon.* = **155° 11′ 30″** mit *zwei* Fernr. (28).

Für M : M (in der Kante Y).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* = 124° 17′ 0″ mit *einem* Fernr. (29).

---

*) Kupffer hat für diesen Winkel an einem Krystalle = 130° 22′ 48″ und an einem anderen = 130° 23′ 36″ gefunden. Als den richtigsten Werth für diesen Winkel nimmt Kupffer schliesslichst 130° 23′ 18″ an. (Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen. Berlin, 1825, S. 78 und 79.)

Am Krystall № 5 vom *Ilmengebirge.* = 124° 16′ 10″ mit *einem* Fernr. (30).

Am Krystall № 6 vom *Ilmengebirge.* = 124° 16′ 30″ mit *zwei* Fernr. (31).

Am Krystall № 7 vom *Ilmengebirge.* = 124° 17′ 0″ mit *zwei* Fernr. (32).

Am Krystall № 8 vom *Ilmengebirge.* = 124° 16′ 0″ mit *zwei* Fernr. (33).

Am Krystall № 9 vom *Ilmengebirge.* = 124° 17′ 0″ mit *zwei* Fernr. (34).

Am Krystall № 12 von der *Urulga.* = 124° 17′ 0″ mit *zwei* Fernr. (35).

Der mittlere Werth aus (29), (30), (31), (32), (33), (34) und (35) ist gleich:

124° 16′ 40″ *).

Für M : P.

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* = 90° 0′ 0″ mit *zwei* Fernr. (36).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* = 90° 0′ 0″ mit *einem* Fernr. (37).

Am Krystall № 8 vom *Ilmengebirge.* = 90° 0′ 0″ mit *zwei* Fernr. (38).

Der mittlere Werth aus (36), (37) und (38) ist gleich:

90° 0′ 0″

Für o : u.

Am Krystall № 1 von der *Urulga.* = 161° 41′ 0″ mit *zwei* Fernr. (39).

Am Krystall № 10 vom *Ilmengebirge.* = 161° 41′ 0″ mit *zwei* Fernr. (40).

Der mittlere Werth aus (39) und (40) ist gleich:

161° 41′ 0″.

Für M : l.

Am Krystall № 6 vom *Ilmengebirge.* = 161° 16′ 30″ mit *zwei* Fernr. (41).

---

*) Kupffer hat für diesen Winkel an *einem* Krystall = 124° 16′ 36″ und an einem anderen = 124° 16′ 18″ gefunden. Als den richtigsten Werth hat er schliesslichst angenommen: 124° 16′ 28″. (Preisschrift u. s. w. Berlin, 1825, S. 80.)

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* } = 161° 16′ 0″ mit *einem* Fernr. (42).

Der mittlere Werth aus (41) und (42) ist gleich:

161° 16′ 15″ *).

Für m : M.

Am Krystall № 5 vom *Ilmengebirge.* } = **169° 27′ 30″** mit *einem* Fernr. (43).

Für y : c.

Am Krystall № 11 vom *Ilmengebirge.* } = **152° 20′ 0″** mit *zwei* Fernr. (44).

2) Die Messungen, die weniger genau sind, als die Vorhergehenden.

Für i : P.

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* } = 145° 47′ 0″ mit *einem* Fernr. (45).

Für i : i (in der Kante Y).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* } = 149° 32′ 0″ mit *einem* Fernr. (46).

Für l : l (in der Kante X).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* } = 93° 12′ 0″ mit *einem* Fernr. (47).

Für l_1 : M_2 (d. h. die Neigung der Fläche l nicht zu der anliegenden, sondern zu der nachfolgenden Fläche M).

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* } = 105° 34′ 0″ mit *einem* Fernr. (48).

Für o : M.

Am Krystall № 3 von *Mursinka.* } = 153° 53′ 0″ mit *einem* Fernr. (49).

Obgleich diese letzten Messungen (45), (46), (47), (48) und (49) ziemlich gut sind, so habe ich sie doch von den anderen getrennt, indem sie, nach dem Grade der Deutlichkeit des reflectirenden Bildes zu urtheilen, den anderen nachstehen müssen. Alle diese letzten Messungen wurden an einem und demselben Krystalle von Mursinka aus der schönen Sammlung S. E. des Grafen L. A. v. Perowsky vollzogen. Da der Krystall nur kurze Zeit in meinem Besitze

*) Kupffer hat für diesen Winkel = 161° 15′ 42″ gefunden. (Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen. Berlin, 1825, S. 81).

war, so konnte ich meine Messungen nicht wiederholen, doch ungeachtet dessen bieten, wie es ersichtlich ist, die erhaltenen Grössen von den Berechneten nur einen Unterschied von ungefähr einer Minute dar.

Specifisches Gewicht des Topases.

Ich habe das specifische Gewicht des Topases aus mehreren russischen Localitäten bestimmt. Die Exemplare, die zu diesem Zweck dienten, haben folgende Resultate gegeben:

a) Ein vollkommen durchsichtiger, wasserheller Krystall vom Flusse *Urulga*, welcher 16,434 Gram. wog.

Spec. Gew. = 3,561.

b) Ein vollkommen durchsichtiger, wasserheller Krystall vom Flusse *Urulga*, welcher 12,760 Gram. wog.

Spec. Gew. = 3,565.

c) Ein grösstentheils durchsichtiger, farbloser Krystall vom Flusse *Urulga*, welcher 20,208 Gram. wog.

Spec. Gew. = 3,553.

d) Ein vollkommen durchsichtiger und sehr schön ausgebildeter Krystall von weingelber Farbe vom Flusse *Urulga*, der 6,534 Gram. wog.

Spec. Gew. = 3,562.

e) Drei kleine, ganz durchsichtige, farblose Krystalle vom *Ilmengebirge*, die zusammen 5,544 Gram. wogen.

Spec. Gew. = 3,567.

f) Ein zum Theil durchsichtiger, farbloser Krystall vom *Ilmengebirge*, der 26,773 Gram. wog.

Spec. Gew. = 3,563.

g) Ein blauer, zum Theil durchsichtiger Krystall von *Mursinka*, der 25,526 Gram. wog.

Spec. Gewicht: Bei dem ersten Versuch = 3,562.
Bei dem zweiten Versuch = 3,563.

h) Ein bläulicher, zum Theil durchsichtiger Krystall vom *Adun-Tschilon*, der 42,126 Gram. wog.

Spec. Gew. = 3,550.

Der mittlere Werth des specifischen Gewichts der russischen Topase beträgt also, aus a, b, c, d, e, f, g und h:

3,560

Ein grösstentheils durchsichtiger, weingelber *brasilianischer* Topaskrystall, der 8,965 Gram. wog, gab:

Spec. Gewicht: Beim ersten Versuch $= 3{,}521$.
Beim zweiten Versuch $= 3{,}522$.

Es scheint also, dass das specif. Gewicht der brasilianischen Topase etwas niedriger ist, als das der russischen Topase.

Besondere Bemerkungen.

Vor dem Schlusse meines Artikels halte ich es nicht für überflüssig noch einige Bemerkungen anzuführen; erstens über den Werth der Winkel, die als Data dienen sollen, um die Axenverhältnisse der Grundform des Topases zu berechnen, und zweitens über die Unvollkommenheiten einiger Krystalle dieses Minerals.

1) Um das Axenverhältniss der Grundform des Topases zu berechnen, habe ich die Winkel $M : M = 124° 17' 0''$ und $f : P = 136° 21' 0''$ angenommen, welche $a : b : c = 1{,}80487 : 1{,}89199 : 1$ gegeben haben. Ich glaube, dass dieses Axenverhältniss am Besten allen Bedingungen entspricht, denn die aus denselben berechneten Winkel stimmen mit den unmittelbar Gemessenen fast ganz überein.

Alle kleinen Veränderungen die ich an den oben angeführten Daten unternehmen wollte, lieferten mir schon weniger befriedigende Resultate. Zum Beispiel da der mittlere Werth, aus mehreren an verschiedenen Krystallen angestellten Messungen, für $M : M = 124° 16' 40''$ und für $o : o = 130° 22' 50''$ betrug, so wäre es für mich am Besten gewesen diese beiden Winkel als Daten zur Berechnung der anderen anzunehmen, um so mehr, als Kupffer für dieselben Winkel fast dieselben Werthe erhalten hat, nämlich: $124° 16' 28''$ und $130° 23' 18''$*). Indessen konnte ich mich nicht dazu entschliessen, unter anderen noch aus folgendem Grunde: in einem sehr gut ausgebildeten, vollkommen durchsichtigen, kleinen Topaskrystalle vom Ilmengebirge habe ich vermittelst des Mitscherlich'schen Goniometers, welches mit *zwei* Fernröhren versehen war, die Neigung $f : f$ (in der Kante Y) sehr gut gemessen und erhielt $92° 42' 30''$. Dieselbe Neigung betrug in einem sehr schönen Topaskrystalle vom Flusse Urulga $92° 42' 0''$. Eine solche Uebereinstimmung der Winkel der Topaskrystalle aus so weit von einander gelegenen Localitäten, ist gewiss hinreichend um zu überzeugen, dass den Topaskrystallen dieser Winkel wirklich eigen ist. Wenn wir nun unsere oben angeführten Winkel $M : M = 124° 16' 40''$ und $o : o = 130° 22' 50''$ als Daten zur Berechnung der anderen annehmen wollen, so erhalten wir durch Rechnung $f : f = 92° 44' 58''$. Auf diese Weise findet

---

*) Kupffer hat nämlich durch Messung erhalten: $M : M = 124° 16' 28''$ und
$o : o$ an einem Krystalle $= 130° 22' 48''$
$130° 22' 48''$
An einem anderen Krystalle $= 130° 23' 36''$.
Nach seinen Regeln combinirt, nimmt er als richtigsten Werth den Winkel $o : o = 130° 23' 18''$ an.
(Kupffer. Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen. Berlin, 1825, S. 78 und 79.)

also zwischen den berechneten und den ganz genau gemessenen Winkeln ein Unterschied von fast $2\frac{3}{4}$ Minuten statt. Wenn wir dagegen unsere Daten beibehalten (d. h. a : b : c = 1,80487 : 1,89199 : 1), so erhalten wir für alle drei Winkel M : M, o : o und f : f die Werthe, die mit den gemessenen Winkeln im vollkommensten Einklang stehen, nämlich durch Rechnung M : M = 124° 17′ 0″ (durch Messung 124° 16′ bis 124° 17′ und im Mittel 124° 16′ 40″), o : o = 130° 22′ 32″ (durch Messung 130° 22′ 30″ bis 130° 23′ 10″ und im Mittel 130° 22′ 50″) und f : f = 92° 42′ 0″ (durch Messung im Krystall von der Urulga 92° 42′ 0″ und im Krystall vom Ilmengebirge 92° 42′ 30″*). In diesem letzteren Falle bestehen also die Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Winkeln bloss in Secunden, oder, um zu sagen, es findet hier keine Differenz statt.

Da die Fortsetzung einer Erläuterung auf ähnlicher Weise zu langwierig werden würde, so halte ich es für besser hier folgende Tabelle hinzuzufügen, die die oben erwähnten Verhältnisse auch in Bezug zu den anderen Winkeln verdeutlichen soll.

Die Neigungen.	*Berechnete* Winkel, nach Kupffer, aus o : o = {74° 55′ 30″ / 130° 23′ 17″}	*Berechnete* Winkel aus M : M = 124° 16′ 40″ o : o = 130° 22′ 30″	*Berechnete* Winkel aus a : b : c = 1,80487 : 1,89199 : 1	*Gemessene* Winkel.
f : f über P . .	92° 44′	92° 45′	92° 42′	92° $42\frac{1}{2}$′ {92 $45\frac{1}{4}$ Kupffer.}
f : P . .	136 22	136 $22\frac{1}{2}$	136 21	136 $20\frac{3}{4}$
f : u . .	137 28	137 $28\frac{3}{4}$	137 $27\frac{1}{4}$	137 $27\frac{3}{4}$
d : P . .	119 0	119 $\frac{3}{4}$	118 $59\frac{1}{4}$	118 59
d : M . .	140 39	140 $38\frac{1}{4}$	140 $39\frac{1}{4}$	140 $39\frac{1}{2}$
d : u . .	153 $4\frac{1}{2}$	153 $4\frac{1}{2}$	153 $4\frac{1}{4}$	153 $4\frac{1}{4}$
d : f . .	110 $32\frac{1}{2}$	110 $33\frac{1}{4}$	110 $31\frac{3}{4}$	110 32
u : P . .	134 $25\frac{1}{2}$	134 $26\frac{1}{2}$	134 $24\frac{3}{4}$	134 $24\frac{3}{4}$
u : M . .	135 $34\frac{1}{2}$	135 $33\frac{1}{2}$	135 $35\frac{1}{4}$	135 $35\frac{1}{4}$
u_1 : M_2 . .	113 $43\frac{1}{2}$	113 $42\frac{3}{4}$	113 $43\frac{1}{2}$	113 $43\frac{1}{2}$ {113 $47\frac{1}{2}$ Kupffer.}
u : u über P . .	88 51	88 $52\frac{3}{4}$	88 $49\frac{1}{2}$	88 50
u : u in Y . .	141 1	141 1	141 0	141 1

*) Vergl. die oben angeführten Messungen der Topaskrystalle.

Die Neigungen.	*Berechnete* Winkel, nach Kupffer, aus o : o = $\begin{cases} 74^\circ\ 53'\ 30'' \\ 130^\circ\ 23'\ 17'' \end{cases}$	*Berechnete* Winkel aus M : M = 124° 16′ 40″ o : o = 130° 22′ 50″	*Berechnete* Winkel aus a : b : c = 1,80487 : 1,89199 : 1	*Gemessene* Winkel.
o : o in X . .	74° $53\frac{1}{2}'$	74° 55′	74° 53′	{74° $53\frac{1}{2}'$ Kupffer.}
o : o in Y . .	130 $23\frac{1}{4}$	130 $22\frac{3}{4}$	130 $22\frac{1}{2}$	130 $22\frac{3}{4}$
				{130° $23\frac{1}{4}$ Kupffer.}
o : P . .	116 $6\frac{1}{2}$	116 $7\frac{1}{4}$	116 $5\frac{3}{4}$	116 $5\frac{3}{4}$
o : d . .	155 $11\frac{3}{4}$	155 $11\frac{1}{2}$	155 $11\frac{1}{4}$	155 $11\frac{1}{2}$
o : u . .	161 41	161 $40\frac{3}{4}$	161 41	161 41
M : M in Y . .	124 $17\frac{1}{2}$ *)	124 $16\frac{3}{4}$	124 17	124 $16\frac{3}{4}$
				{124 $16\frac{1}{2}$ Kupffer.}
M : l . .	161 $16\frac{1}{4}$	161 16	161 $16\frac{1}{4}$	161 $16\frac{1}{4}$
				{161 $15\frac{3}{4}$ Kupffer.}
m : M . .	169 27	169 27	169 27	169 $27\frac{1}{2}$
y : c . .	152 $19\frac{1}{2}$	152 $19\frac{1}{4}$	152 $20\frac{1}{4}$	152 20
o : M . .	153 $53\frac{1}{2}$	153 $52\frac{3}{4}$	153 $54\frac{1}{4}$	153 53 *
				{153 55 Kupffer.}
y : f . .	161 $18\frac{1}{2}$	161 $18\frac{1}{4}$	161 $18\frac{3}{4}$	{161 19 Kupffer.}
M : P . .	90 0	90 0	90 0	90 0

2) Wie wir es bei mehreren anderen Mineralien gethan haben, so wollen wir auch hier der unvollkommenen Ausbildung einiger Topaskrystalle erwähnen. Diese Art von Bemerkungen können, wie es mir wenigstens scheint, für solche Beobachter nützlich sein, die nicht die Mittel haben ihre Messungen an mehreren Krystallen anzustellen und die daher zu Winkeln gelangen können, deren Werthe von den wahren Grössen ziemlich abweichen.

Ich werde hier einen Fall anführen, den ich Gelegenheit hatte an einem kleinen Topas-

*) Kupffer hat diesen Winkel = 124° 18′ 20″ berechnet (Preisschrift über genaue Messung u. s. w. S. 83), doch in seinen Rechnungen hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen. Aus diesem Grunde sind auch zwei andere von ihm berechnete Winkel nicht ganz richtig, nämlich: für die Neigung der Fläche der Grundform gegen die Hauptaxe ist = 26° 4′ 56″, statt 26° 6′ 28″, gegeben, ebenso für die Neigung der makrodiagonalen Polkante gegen die Hauptaxe ist = 46° 22′ 33″ statt 46° 22′ 2″, gegeben.

krystalle vom Ilmengebirge zu beobachten, welcher scheinbar ganz gut ausgebildet war und den ich oben unter № 10 angeführt habe. Dieser Krystall hatte an einem Ende die Flächen $o = P$, $u = \frac{1}{2}P$, $f = \breve{P}\infty$, $y = 2\breve{P}\infty$, $h = \frac{1}{4}\bar{P}\infty$, $d = \bar{P}\infty$ und $P = oP$, am anderen Ende war er aber abgebrochen und daher von einer Spaltungsfläche begränzt. Ich werde diese letztere Spaltungsfläche durch P′ bezeichnen, um sie von der Krystallfläche P des oberen Endes zu unterscheiden. Durch sehr genaue Messungen habe ich an diesem Krystalle gefunden:

$$M : P' \text{ (Spaltungsfläche)} = \left.\begin{matrix} 90^\circ\ 5'\ 0'' \\ 90\ \ 4\ \ 40 \end{matrix}\right\} \text{ mit } zwei \text{ Fernröhren.}$$

$$\text{Im Mittel} = 90^\circ\ 4'\ 50''$$

Dass die gemessene Fläche des Hauptprismas M dieses Krystalls wirklich nicht unter einem geraden Winkel zur Spaltungsfläche P′ geneigt ist, und ungefähr eine Abweichung von 5 Minuten macht, geht ganz deutlich aus folgendem Grunde hervor: a) dass das Instrument sorgfältig vor und nach einer jeden dieser beiden Messungen verificirt wurde. b) Mit derselben Einstellung des Goniometers fand ich gleich an zwei anderen Krystallen (nämlich an № 1 von der Urulga und an № 8 vom Ilmengebirge) denselben Winkel = 90° 0′ 0″. c) Die Neigungen o : M und o : P′ an dem Krystall № 10 zeigten, wie wir es gleich sehen werden, dass wirklich die Neigung der Fläche M zu P′ eine kleine Abweichung vom geraden Winkel macht; in der That ich erhielt durch Messung am Krystall № 10:

$$o : P' = 63^\circ\ 54'\ 0'' \text{ mit } zwei \text{ Fernröhren.}$$

Nach dem von uns für den Topas gegebenem Axenverhältnisse a : b : c = 1,80487 : 1,89199 : 1, ergiebt sich durch Rechnung dieser Winkel = 63° 54′ 8″, also ganz dieselbe Grösse wie die, die durch Messung erhalten wurde.

Ferner erhielt ich durch Messung:

$$o : M = 153^\circ\ 58'\ 30'' \text{ mit } zwei \text{ Fernröhren.}$$

Dagegen erhält man durch Rechnung für diesen Winkel den Werth = 153° 54′ 8″. Die Abweichung beträgt also 4 Minuten und 30 Secunden, d. h. denselben Unterschied, welchen die Neigung M : P′ zeigt.

Aus allen diesen Messungen ist also leicht zu ersehen, dass die Flächen P′ und o ihre wahre Stellung beibehalten haben, dagegen die Fläche M einer Verschiebung unterworfen ist, woher sie von ihrer Normalstellung um 4½ Minuten abweicht. Solche ausnahmsweise und ganz zufällige Vorkommenheiten können aber sehr unangenehme Folgerungen nach sich ziehen, wenn der Beobachter sich nur auf wenige Messungen der Winkel beschränken will, um so mehr, da man denselben in Krystallen begegnet die, dem Anchein nach, sehr gut ausgebildet sind und sehr glänzende Flächen haben. Setzen wir nun z. B. voraus, dass der Beobachter nur einen einzigen Topaskrystall messen konnte, in welchem er bloss zwei Winkel ganz genau bestimmte, aber nun unglücklicherweise mit unserem Krystall № 10 zu thun gehabt hätte. Ferner dass, durch seine genauen Messungen, er für M : M = 124° 17′ 0″ und für o : M = 153°

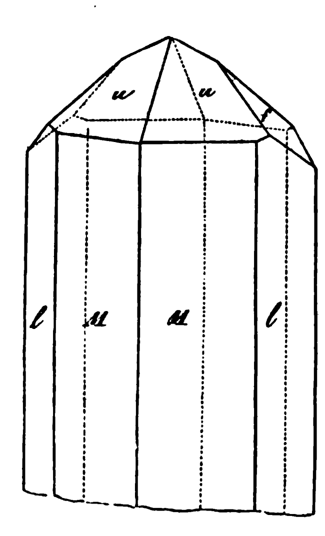
58′ 30″ erhalten hat. Was erhielt man dann als Endresultat? Natürlich würden sich in diesem Falle folgende Neigungswinkel durch Rechnung ergeben: f : f = 92° 31′ 0″ (während nach den genauesten Messungen dieser Winkel im Topas = 92° 42′ 23″ beträgt); d : P = 118° 54′ 40″ (durch sehr genaue Messungen = 118° 59′ 0″); o : P = 116° 1′ 30″ (durch sehr genaue Messungen = 116° 5′ 45″); o : o = 130° 20′ 34″ (durch sehr genaue Messungen = 130° 22′ 51″). Auf diese Art wird man ebenfalls ähnliche oder noch stärkere Abweichungen in anderen Winkeln erhalten.

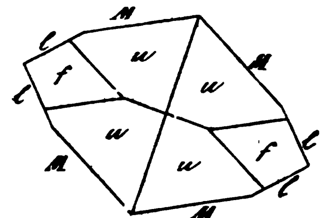
Ergänzung.

Im Jahre 1853 sandte mir der verstorbene Bergingenieur Obrist P. E. v. Achmatow zwei kleine Topaskrystalle, begleitet von folgendem Schreiben:

Den 10ten Juni 1853.

«Im vergangenen Frühjahre fand man in den Goldseifen des Gouvernements Orenburg «(namentlich in der Goldseife des Kaufmanns Bakakin) Fragmente und Krystallchen eines Mine«rals von rosenrother Farbe, welches hier «Rosen-Topas» benannt wurde. Zwei solcher Kry«stalle, von denen der eine zugespitzt ist, sende ich Ihnen mit diesem Briefe u. s. w.»





Einer von diesen Topaskrystallen, der mir durch die Güte des Hrn. v. Achmatow zu Theil wurde und der hier abgebildet ist, hat ungefähr 1 Centimeter Länge und $\frac{1}{2}$ Centimeter im grössten Durchmesser; er ist zugespitzt, von weingelber Farbe, grösstentheils durchsichtig, und bietet das Hauptprisma M = ∞P dar, wo das eine Ende desselben durch die vier Flächen der rhombischen Pyramide u = $\frac{1}{2}P$ zugespitzt und durch das Brachydoma f = $\breve{P}\infty$ zugeschärft ist, und dessen makrodiagonale Kante durch die Flächen des Prismas l = $\infty\breve{P}2$ zugeschärft wird, was indessen ganz deutlich aus der Figur ersichtlich ist. Der zweite Krystall ist sehr rissig, von rosenrother Farbe, bietet die Combination der beiden Prismen M = ∞P und l = $\infty\breve{P}2$ dar, ist aber an beiden Seiten abgebrochen und daher von Spaltungsflächen begränzt. Diese Krystalle sind durch ihre Farbe, ihren Habitus, ihren Glanz u. s. w so ähnlich den brasilianischen Topasen, dass es unmöglich ist den geringsten Unterschied zwischen denselben zu finden. Ich muss gestehen, dass ich damals diese Krystalle für brasilianische Topase hielt, die durch ein Missverständniss als aus dem Ural herstammend betrachtet wurden. Aus diesem Grunde erwiederte ich sogleich Herrn v. Achmatow, dass bevor man nicht eine grössere Anzahl dieser Topase finden würde, ich mich nicht entschliessen könnte über diesen Gegenstand etwas zu veröffentlichen. Doch

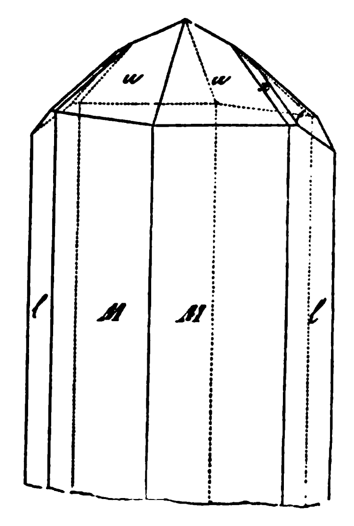
später gab der Lieutenant Barbot de Marni die Beschreibung dieser Topase*). Nach demselben sind diese Krystalle in der Goldseife Kamenno-Pawlowskaja, im Lande der Orenburgischen Kosaken, vom Kaufmann Bakakin entdeckt worden. Das specifische Gewicht beträgt nach Danilow's Bestimmung:

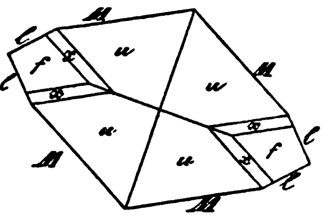
Für die Krystalle von rosenrother Farbe = 3,529
Für die Krystalle von gelber Farbe = 3,515

Im Mittel = 3,522

Also ganz dasselbe wie das welches ich für einen Topaskrystall aus Brasilien erhalten habe**).

Durch die Güte des Obrist-Lieutenants des Berg-Corps A. v. Peretz wurde mir neuerdings ein hübscher Topaskrystall, der ebenfalls aus der Goldseife des Kaufmanns Bakakin stammt, zu Theil, und der aus dem Ural durch den Oberst-Lieutenant v. Roschkow gebracht wurde. Dieser Krystall ist ganz durchsichtig, von angenehmer rosenrother, in's Violblau ziehender Farbe, und hat ungefähr $2\frac{1}{2}$ Centimeter Länge und ungefähr $\frac{3}{4}$ Centimeter im grössten Durchmesser. Die Combination desselben ist sehr ähnlich der des oben beschriebenen und abgebildeten Krystalls. Sie unterscheidet sich bloss durch die Hinzufügung der Flächen der Pyramide $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$, die die schmalen Abstumpfungen der Combinationskanten zwischen den Flächen $u = \frac{1}{2}P$ und $f = \breve{P}\infty$ bilden, was man aus nachfolgender Figur am Besten ersehen kann.

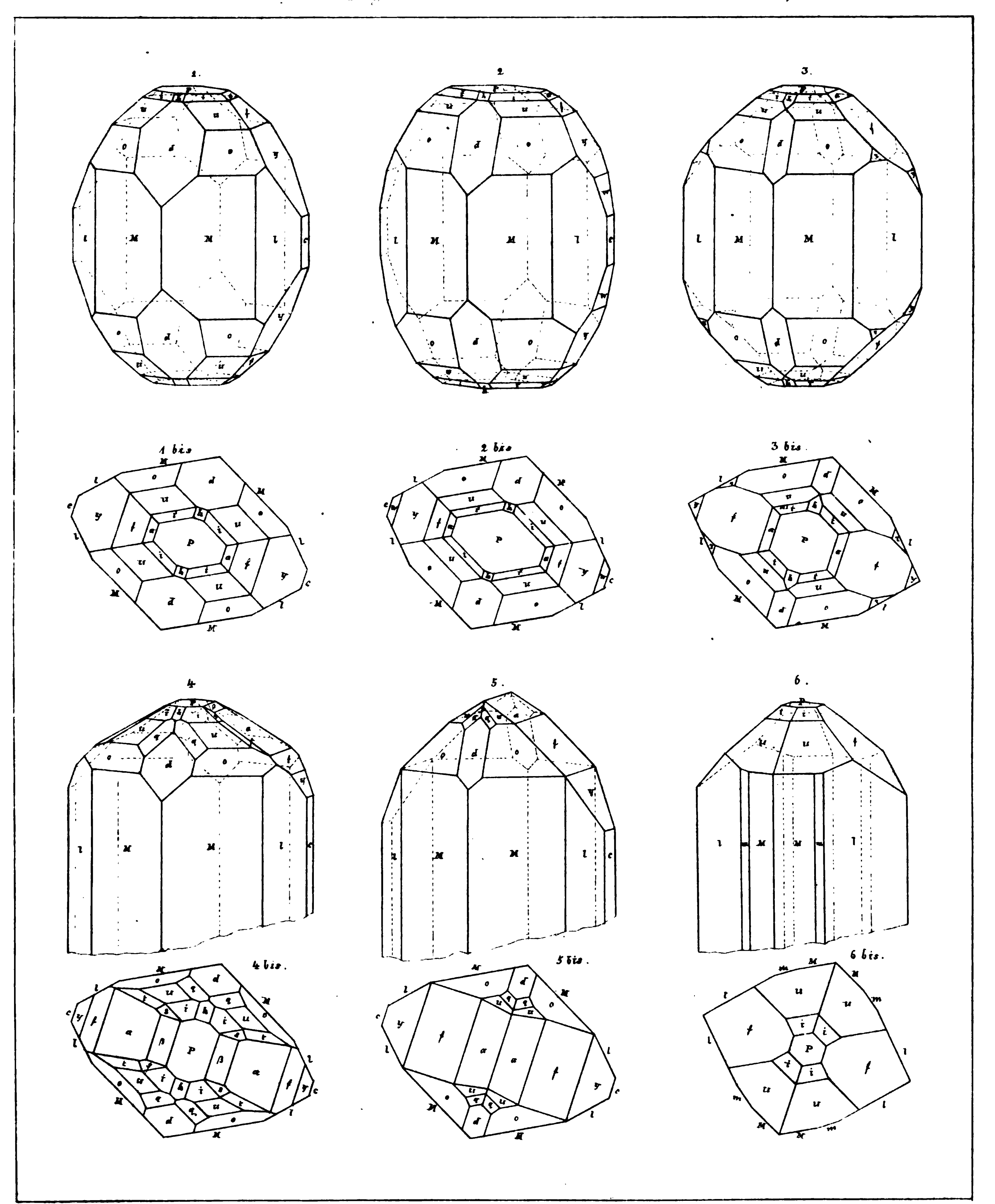


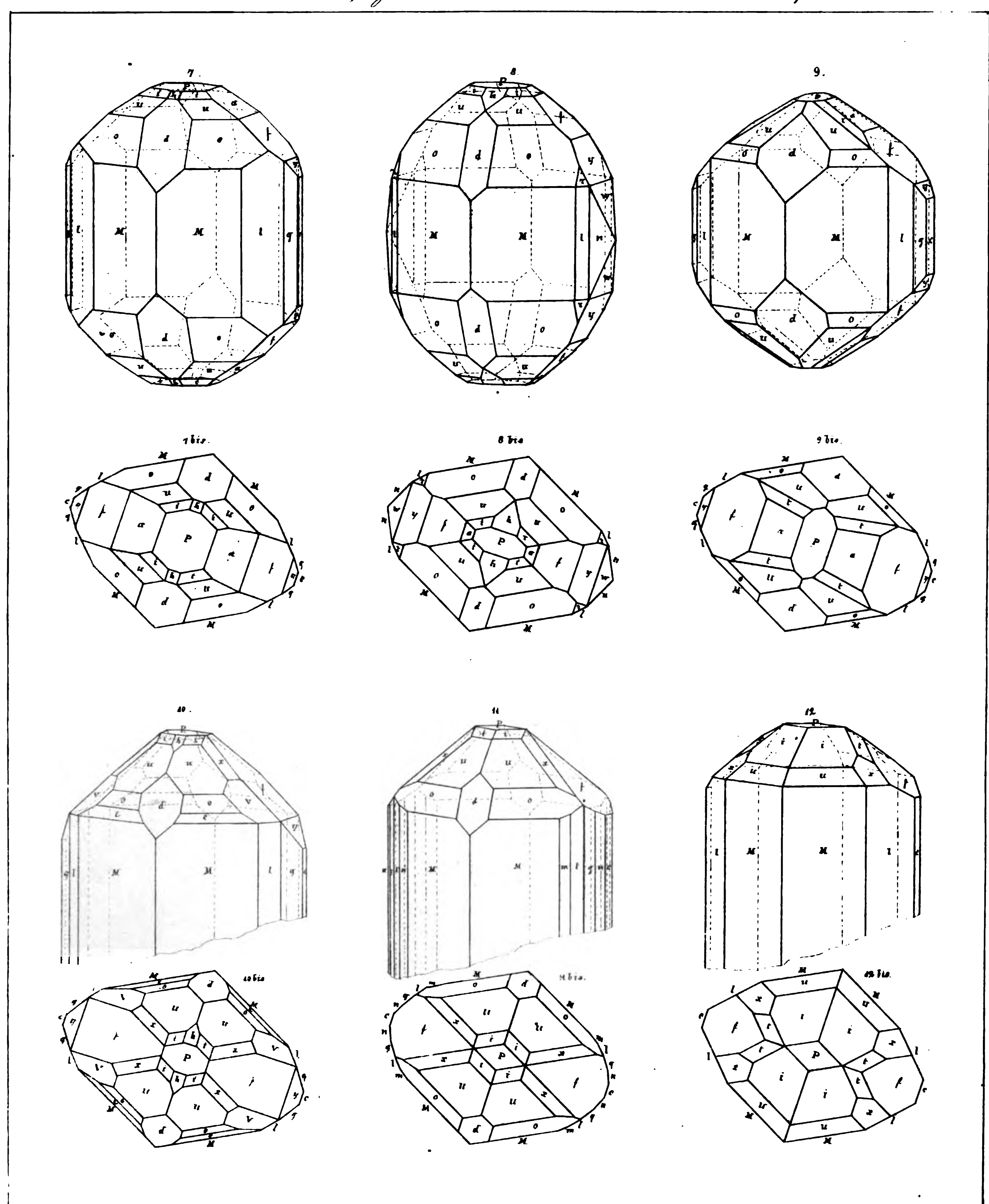


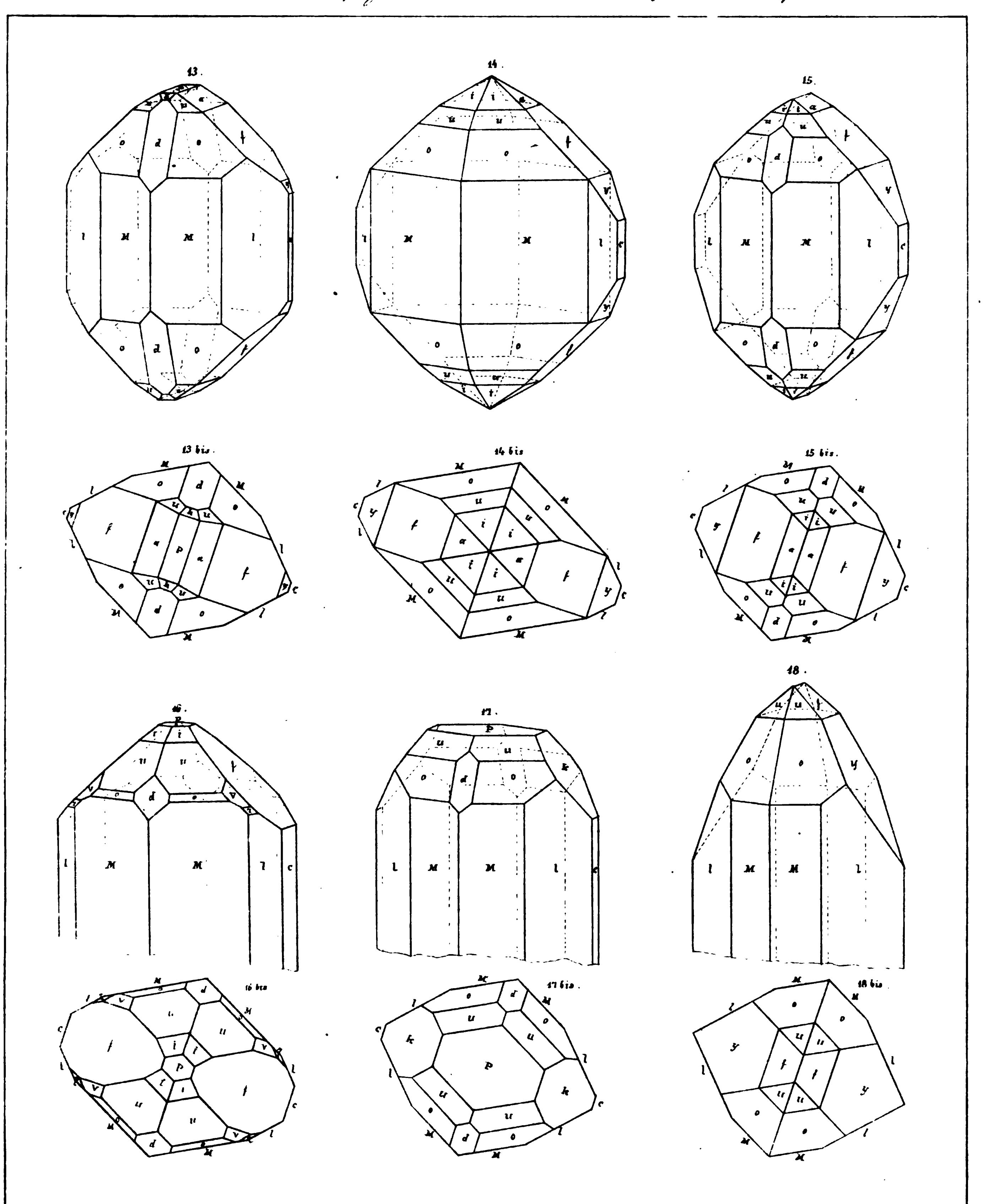
Das Vorkommen solcher Topase im Ural scheint nun auch aus folgendem Grunde keinem Zweifel mehr unterworfen zu sein, indem man in ganz letzter Zeit im Lande der Orenburgischen Kosaken einige Mineralien endeckt hat, die sich durch ihren Habitus sehr von denen unterscheiden, die man bisher im Ural gekannt hat, z. B. weisser und rother Korund (Rubin) in kleinen sehr schönen Krystallen, Gerölle von Smaragd, durchscheinende Chrysoberyll-Gerölle, ganz durchsichtige Olivin- und Zianit-Gerölle. Alle diese Mineralien sind im russischen Bergjournal von Barbot de Marni beschrieben worden. Sie stammen, nach seiner Beschreibung, aus den Goldseifen, die am Flusse Kamenka und an den anderen Nebenflüssen des Uis (Land der Kosaken des Regiments № 6) gelegen sind. Der Fluss Kamenka ergiesst sich in die Samarka, dieselbe fällt in den Fluss Ui und dieser ergiesst sich wieder in den Fluss Tobol.

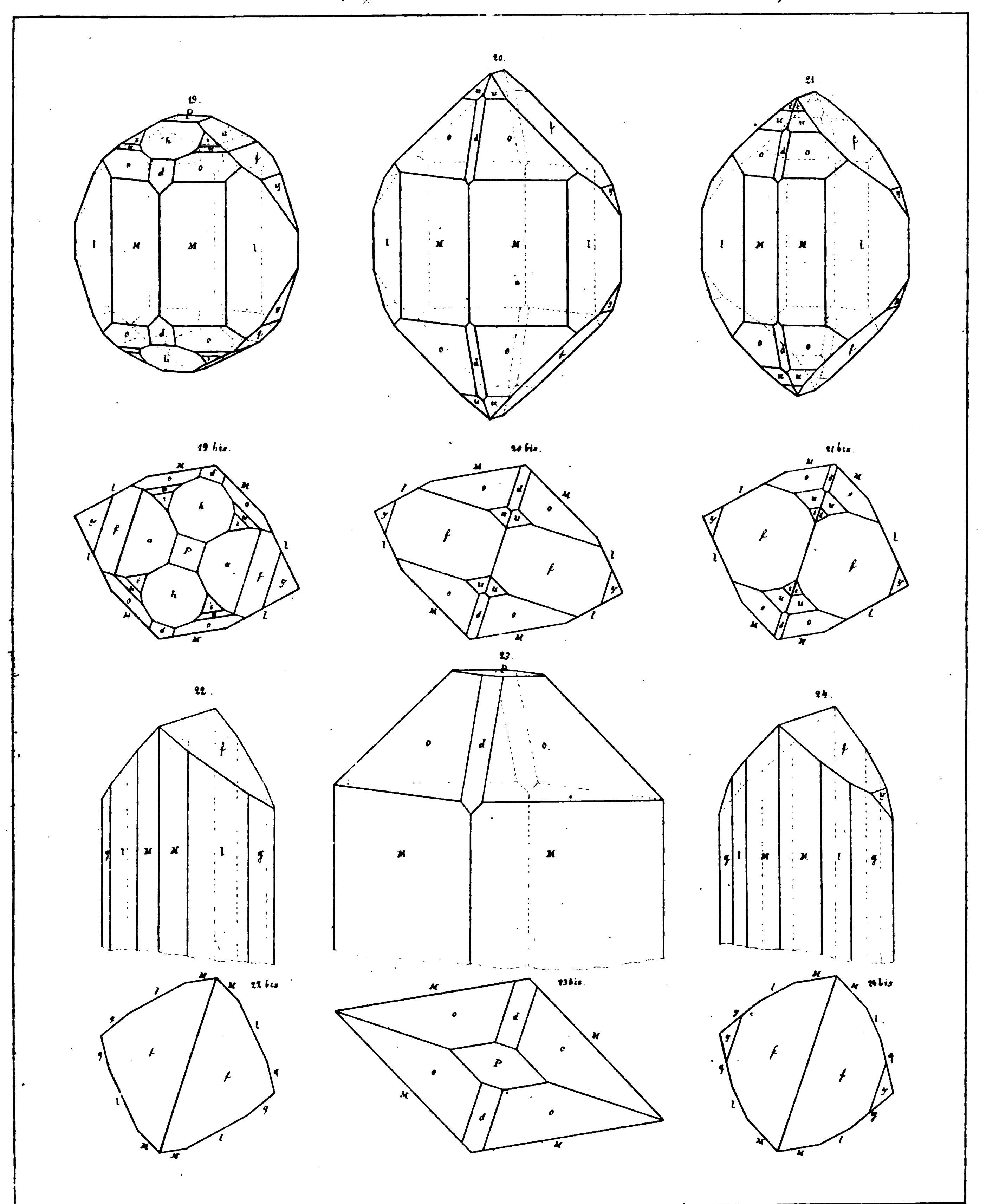
*) Russisches Bergjournal. 1854. Bd. I, S. 437.

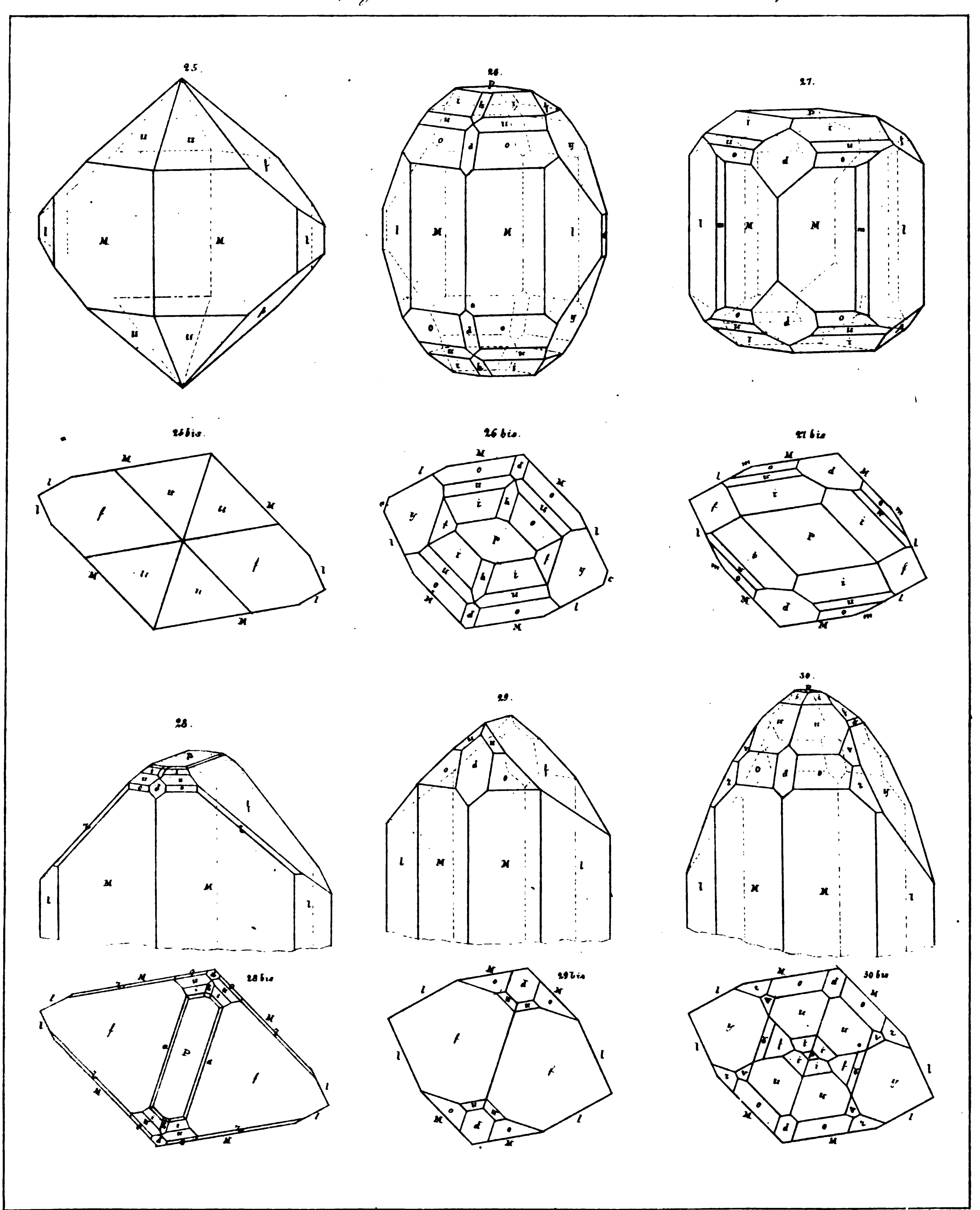
**) Vergl. «Specifisches Gewicht des Topases.»

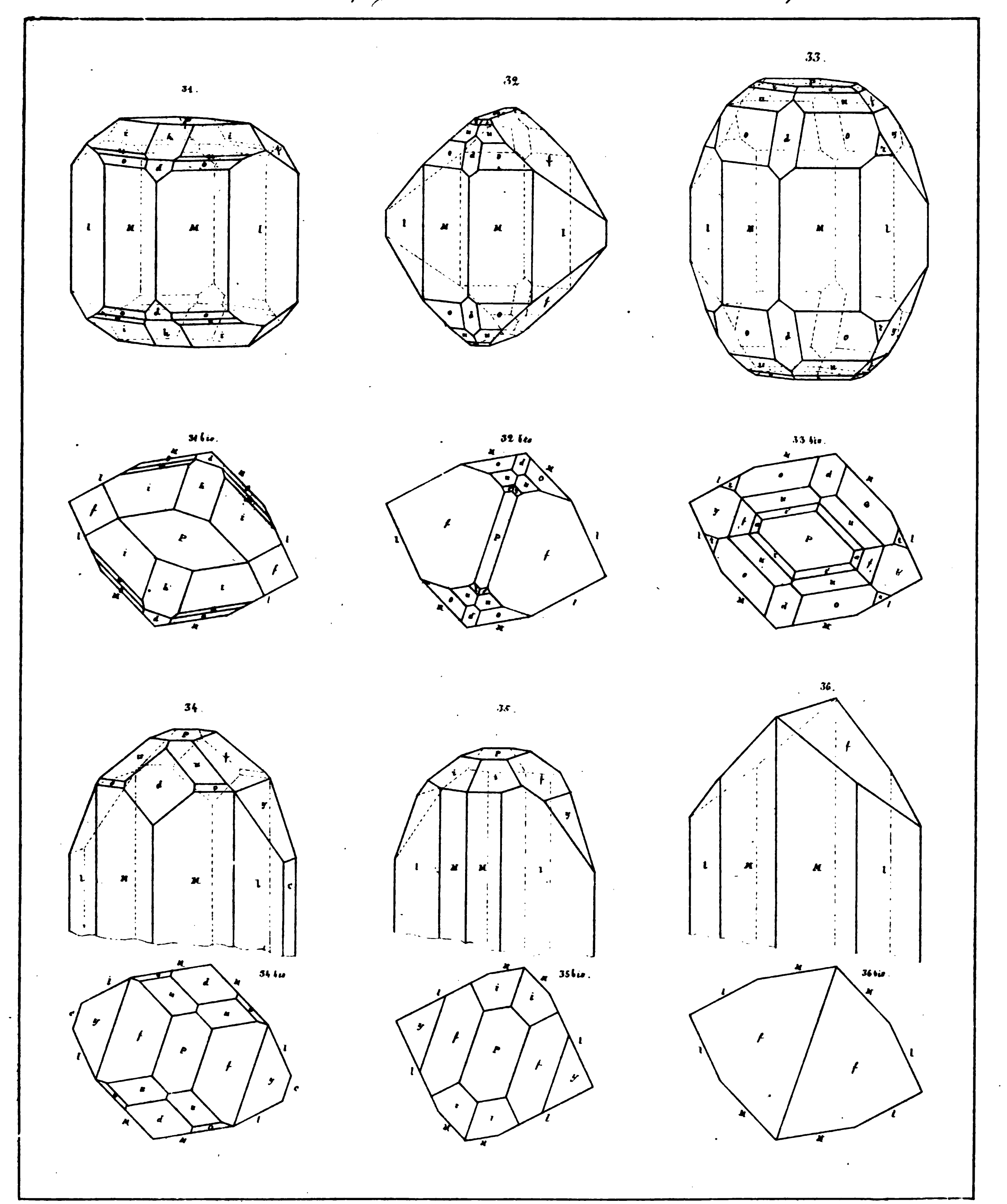

1.
2
3.
1 bis
2 bis
3 bis.
4.
5.
6.
4 bis.
5 bis.
6 bis.

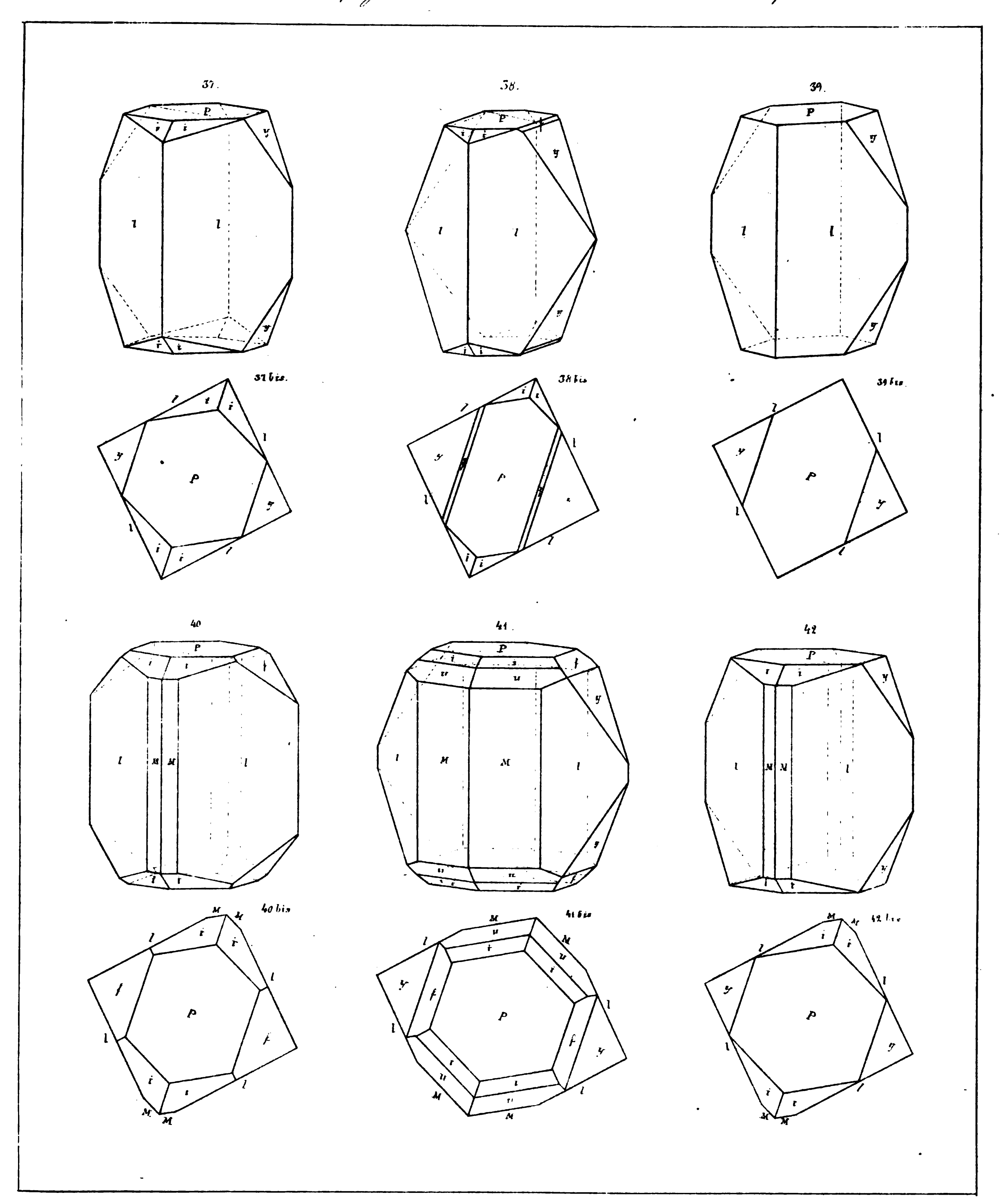


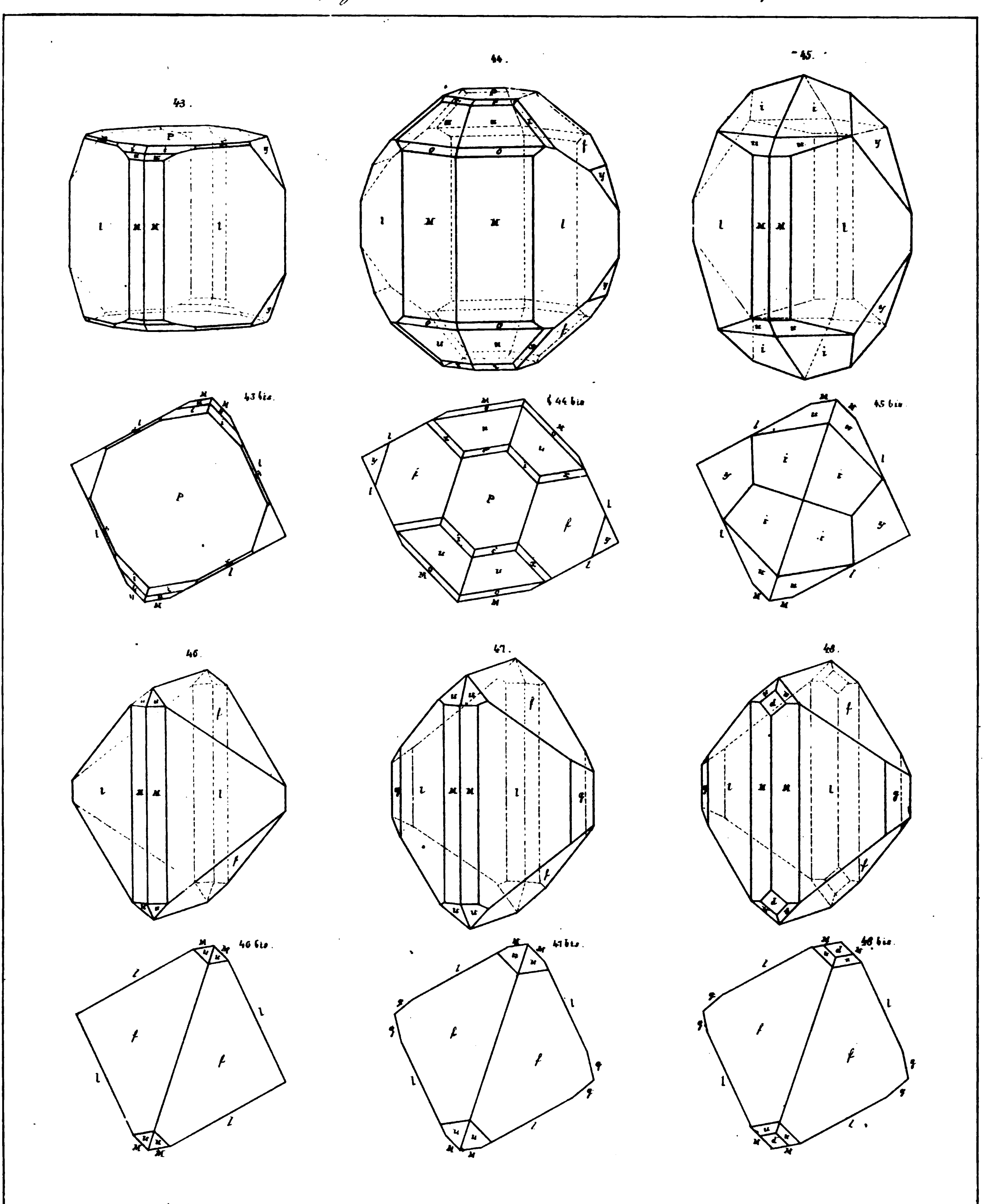


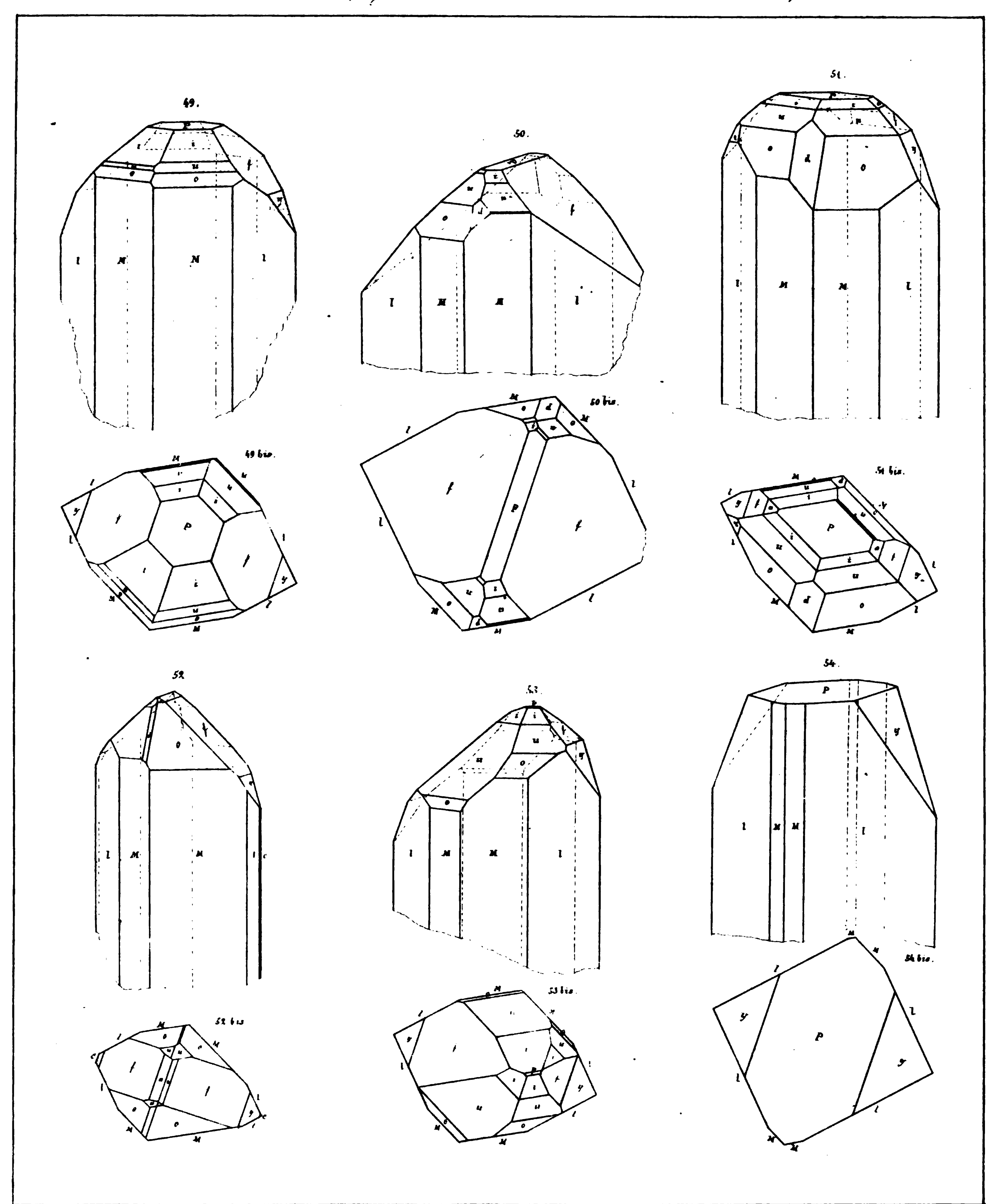

19.
20.
21.
19 bis.
20 bis.
21 bis
22.
23.
24.
22 bis
23 bis.
24 bis

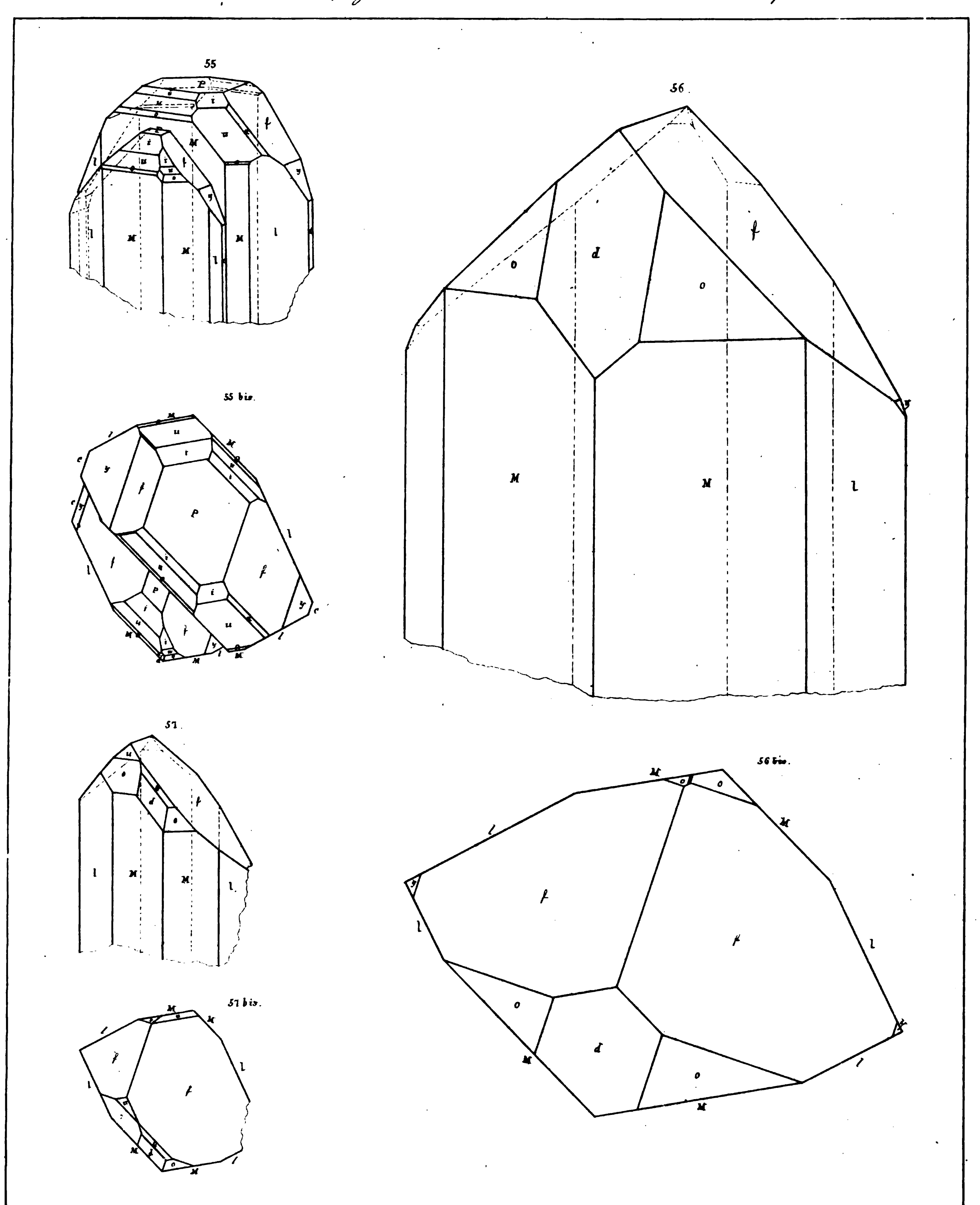

25.
26.
27.
25 bis.
26 bis.
27 bis.
28.
29.
30.
28 bis
29 bis
30 bis


31.
32.
33.
31 bis.
32 bis.
33 bis.
34.
35.
36.
34 bis.
35 bis.
36 bis.


37.
38.
39.
37 bis.
38 bis
39 bis.
40
41.
42
40 bis
41 bis
42 bis


43.
44.
45.
43 bis.
44 bis.
45 bis.
46.
47.
48.
46 bis.
47 bis.
48 bis.


49.
49 bis.
50.
50 bis.
51.
51 bis.
52.
52 bis.
53.
53 bis.
54.
54 bis.


55
55 bis.
56.
56 bis.
57.
57 bis.

UEBER

DEN EINFLUSS DER WÄRME

AUF

DIE ELASTISCHE KRAFT DER FESTEN KÖRPER

UND

INS BESONDERE DER METALLE,

VON

A. T. KUPFFER.

Eine von der Königl. Societät der Wissenschaften in Göttingen gekrönte Preisschrift.

Lu le 3 décembre 1852.

Vorwort.

Die nachstehende Abhandlung ist aus einer grösseren Arbeit über Elasticität entnommen, die nocht nicht beendigt ist, und die zu ihrer Zeit wird bekannt gemacht werden. Ich habe einstweilen in der Einleitung einige allgemeine und noch nicht bekannte Thatsachen aus der grössern Schrift mittheilen zu müssen geglaubt, um dem Leser zu zeigen, wie man die Elasticitätscoefficienten derselben Metalle sehr genau bestimmen könne, und bestimmt hat, für welche in dieser Schrift der Einfluss der Temperatur auf diese Coefficienten bestimmt worden ist. Indem ich durch Versuche erwies, dass der Einfluss der Temperatur bei Torsionsschwingungen ein anderer sein kann als bei Transversalschwingungen, war es interessant nachzuweisen, dass auch der Elasticitätscoefficient für die Torsionsschwingungen ein anderer ist, als für die Transversalschwingungen. Diese Mittheilungen führten zur Erwähnung des Coefficienten k, den ich den Flüssigkeitscoefficienten genannt habe, und von dem meines Wissens vor mir noch nicht die Rede war, oder dessen Werth wenigstens vor mir noch nicht genau bestimmt worden ist. Vielleicht war es nicht durchaus nothwendig, die diesen Coefficienten betreffende Beobachtungen ausführlich mitzutheilen: ich habe das nur deshalb gethan, um den Leser zu überzeugen, dass Alles mit der grössten Genauigkeit beobachtet worden ist, und dass ich mich nicht mit blossen Annäherungen begnügt habe.

In dieser Abhandlung ist nur das dynamische Moment der Elasticität berücksichtigt worden; der Einfluss der Wärme auf die elastische Kraft ist nur durch Schwingungen, Transversal- und Torsionsschwingungen, bestimmt worden. Ich habe auch Versuche über den Einfluss der Temperatur auf das statische Moment der Elasticität gemacht, aber sie sind vollständig misslungen; bei fortdauernder Erwärmung war die bleibende Aenderung des Flexions- oder des Torsionswinkels so stark, dass die vorübergehende, mit der Erhöhung der Temperatur eintretende, und mit deren Verminderung sich wieder vermindernde, ganz darin verschwand: die elastische Nachwirkung brachte noch mehr Verwirrung in die Resultate. Ein dicker Stahldrath von beiläufig 6 Fuss Länge wurde an einem seiner Enden festgeklemmt, am andern befand sich ein horizontaler Hebel, dessen Ebene einen rechten Winkel mit dem Drath machte; dieser wurde beschwert, und das andere Ende des Draths so lang gedreht, bis der Hebel wieder die horizontale Lage angenommen hatte; der Winkel, um den das Ende gedreht worden war, wurde genau beobachtet. Nun wurde der Drath bis zum Kochpunkt des Wassers erhitzt, der Hebel hätte sich nun herabbewegen, oder der Torsionswinkel sich vergrössern müssen; es geschah aber gerade das Gegentheil: der Torsionswinkel nahm ab — und nahm immerfort ab, selbst als der Drath wieder bis zur Temperatur des Zimmers erkaltet war. Dies konnte wohl nichts an-

ders als eine Nachwirkung sein, welche strebt den Drath zu seiner ersten Gleichgewichtslage zurück zu führen, und welche durch die Wärme verursacht wird — wir werden aus der Abhandlung selbst ersehen, dass eine vorübergehende Wärme, die nicht bis zur Glühhitze geht, sondern bei der Siedhitze des Wassers stehen bleibt, die elastische Kraft sehr weicher Metalle, wie des Kupfers, erhöht. Nicht besser ging es mir mit der Flexion; ein Messingstab, der durch ein an seinem freien Ende angehängtes Gewicht eine ziemlich bedeutende Biegung erhalten hatte, bog sich, bis zu 80° R. erhitzt, so stark, dass diese Biegung bei weitem die übertraf, welche eine Folge des Einflusses der erhöhten Temperatur sein konnte; als der Stab wieder erkaltet war, nahm die Biegung nicht wieder ab, ein Beweiss, dass in der langen Zeit, die das Erhitzen und das Wiedererkalten erfordert hatte, das Gleichgewicht der Molecüle des Stabs sich sehr geändert haben musste. Ich sah daraus, dass um die Einwirkungen der Wärme auf das statische Moment der Elasticität zu finden, man vor allen Dingen ein Mittel haben müsste, die Einwirkung derselben Wärme auf die Verrückung der Gränzen der Elasticität und auf die Nachwirkung von ihrer Einwirkung auf die Elasticität selbst zu trennen; um ein solches Mittel zu finden, werden noch viele Arbeiten über die Gränze der Elasticität und über die Nachwirkung erforderlich sein, so dass die Lösung dieses Problems mir noch sehr ins Unbestimmte hinaus gerückt zu sein scheint. Man hat aber erst angefangen die Gesetze der Elasticität in ihrem ganzen Umfange zu studiren; bei jedem Schritte stösst man in diesen Untersuchungen auf neue Eigenschaften der elastischen Körper; je weiter man vorgeht, desto mehr Verwickelung. Bei solchen Umständen ist wohl in diesem Augenblick keine völlig abgeschlossene Arbeit über irgend eine Eigenschaft der elastischen Körper möglich.

Es bleibt nur noch übrig zu erklären, warum ich dem Wunsche der Societät nicht nachgekommen bin, nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Fehlergränzen meiner Bestimmungen zu berechnen. Die metallischen Stäbe schwingen so kurze Zeit, dass wiederholte Beobachtungen immer dieselbe Schwingungszeit geben, wenigstens fallen die Unterschiede immer innerhalb der halben Secunde, welches der kleinste Zeittheil ist, der sich mit Sicherheit mit einem Chronometer, welcher halbe Secunden schlägt, beobachten lässt. Die Unterschiede der beobachteten Werthe und des berechneten Mittelwerths sind also fast immer $= 0$: man erhält gar keine Summe der Quadrate der Fehler. Die Genauigkeit des Endwerths könnte freilich auch durch Rechnung bestimmt werden, wenn man den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität desselben Stabes mehrere Male, bei verschiedenen Temperaturunterschieden, und ins besondere bei verschiedenen Längen desselben Stabes, beobachtete; man würde dann wohl verschiedene Werthe dieses Einflusses erhalten, aus deren Unterschieden man denn auf die Genauigkeit des Mittels aus allen Beobachtungen schliessen könnte; aber dies würde die Arbeit gar sehr vergrössern, und was wäre der Gewinn dabei? Alle die erhaltenen Werthe gehören doch nur einem bestimmten Individuum, und man würde sehr irren, wenn man die erhaltenen Resultate auf andere Stäbe von demselben Metall beziehen wollte; die erlangte Genauigkeit hätte also gar keinen praktischen Nutzen — wenn man den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität eines gewissen Metallstabes recht genau wissen wollte, müsste man doch dieselbe besonders untersuchen.

Einleitung.

Ehe wir uns mit dem Einfluss der Wärme auf die Elasticität beschäftigen, wird es nöthig sein, erst genauer zu bestimmen, was man unter dem Wort: Elasticität zu verstehen hat; denn obgleich die Bedeutung dieses Wortes im Allgemeinen sehr bekannt ist, so findet man doch bei näherer Betrachtung, dass der Begriff der Elasticität durch unsere bis jetzt gesammelten Erfahrungen, denen in der vorliegenden Schrift noch neue zugesellt werden sollen, mannigfach modificirt wird, ja ich möchte sagen in eine Menge Unterabtheilungen zerfällt, deren Zusammenhang freilich an sich klar ist, deren numerisches Verhältniss aber noch nicht durch scharfe Beobachtung ermittelt worden ist.

Wenn man einen Körper, er mag nun fest oder flüssig sein, einem nach allen Richtungen gleichmässigen Druck D aussetzt, den man sich senkrecht auf die kleinsten Theile seiner Oberfläche wirkend denken kann, so verringert sich das Volumen des Körpers, und zwar so, dass alle grade Linien, die man sich innerhalb des Körpers denken kann, in einem gewissen Verhältniss abnehmen. Dieses Verhältniss ist ein in allen Richtungen gleiches, wenn der Körper homogen ist, wie z. B. bei allen Flüssigkeiten, und auch bei einigen festen Körpern. Es sei l die Länge einer solchen geraden Linie, und a die Grösse um welche sich diese Linie durch die Wirkung des Druckes D verkürzt, so werden alle Dimensionen des Körpers sich im Verhältniss

$$1 : 1 - \frac{a}{l}$$

sein Volumen aber im Verhältniss zu

$$1 : \left(1 - \frac{a}{l}\right)^3$$

vermindern.

Dem letzten Ausdruck kann man auch die Form

$$1 : 1 - 3\frac{a}{l}$$

geben, da a immer sehr klein im Vergleich mit l ist, und man desshalb die 2te und 3te Potenz dieser Grösse vernachlässigen kann.

Wäre die Grösse a immer dem Drucke proportional, so hätte man für einen anderen Druck D'

$$a' = \frac{a D'}{D}$$

wo a' dasselbe für D' bedeutet, was a für D ist. Da aber das nie der Fall ist, oder wenigstens nur in sehr engen Grenzen angenommen werden kann, so hat man im Allgemeinen

$$a' = a \frac{D'}{D} (1 + f . a)$$

wo $f . a$ eine uns unbekannte Function der Grösse a bedeutet.

Da es eines gewissen Druckes bedarf, um die Dimensionen eines Körpers nach allen Richtungen hin zu vermindern, so ist man berechtigt, jedem Körper eine gewisse Kraft zuzuschreiben, welche dem Druck entgegenarbeitet und ihm das Gleichgewicht hält; diese Kraft nennt man eben: Elasticität.

Denkt man sich alle Körper aus kleinen Theilchen zusammengesetzt, die nicht zusammen drückbar sind, so ändern sich die gegenseitigen Entfernungen dieser Theilchen bei gleichmässiger, durch einen äusseren Druck hervorgebrachter Volumverminderung, offenbar im Verhältniss von

$$1 : 1 - \frac{a}{3};$$

es liegt also sehr nahe, anzunehmen, die elastische Kraft eines Körpers sei eine Function der gegenseitigen Entfernung seiner Theilchen und nimmt zu, wenn die Entfernung abnimmt, und umgekehrt. Bei den Gasen ist dies besonders deutlich; bei ihnen ist die Elasticität, oder die repulsive Kraft dem Volumen oder dem Cubus der gegenseitigen Entfernungen der Theilchen umgekehrt proportional.

Bei den Gasen ist es der Druck der Atmosphäre, welcher der repulsiven Kraft das Gleichgewicht hält; bei der Dichtigkeit, welche die Gase auf der Oberfläche der Erde haben (wenn sie nicht in Gefässen eingeschlossen sind) ist also der Druck, den ihre repulsive Kraft auf eine Oberfläche von einem Quadratmillimeter ausübt, gleich $10\frac{1}{3}$ Gramm; reducirt man das Volumen des Gases zur Hälfte, oder vermindert man die gegenseitige Entfernung der Theilchen im Verhältniss von $1 : \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, so verdoppelt sich die repulsive Kraft desselben, und es gehört ein doppelt so grosser Druck dazu, um ihr das Gleichgewicht zu halten.

Das Wasser wird durch eine Atmosphäre nur um 45 Millionentheile zusammengedrückt; es würden also ungefähr 22,000 Atmosphären dazu gehören, um ein Wasser-Volumen zur Hälfte zu reduciren. Man sieht hieraus, dass der Druck, welcher der Elasticität des Wassers das Gleichgewicht hält, ungefähr dem Druck von 22,000 Atmosphären, oder von $227\frac{1}{4}$ Kilogrammen auf 1 Quadratmillimeter gleich kommen muss. Wenn auch diese Zahl keinen Anspruch auf Genauigkeit machen kann, so giebt sie doch einen Begriff von der Grösse der Kräfte, die hier im Spiele sind.

Wenn der auf eine tropfbare Flüssigkeit ausgeübte Druck nicht gleichmässig von allen Seiten her wirkt, sondern nur an einer begränzten Stelle, so weicht die Flüssigkeit mit grosser Leichtigkeit zurück, und die äussere Form derselben ändert sich, ohne Aenderung des Volumens; das kommt daher, weil die Theilchen des flüssigen Körpers ihre gegenwärtige Lage ändern können, ohne dass es dazu eines grösseren Kraftaufwandes bedürfte als der, welcher nöthig ist, um den durch ihre Schwere hervorgebrachten Druck zu überwinden. Diese Verschiebbarkeit der Flüssigkeiten (aus welcher eben die Eigenschaft hervorgeht, die man Flüssigkeit nennt) ist mehr oder weniger vollkommen; es giebt dünnflüssige und dickflüssige Körper. Wenn leichtflüssige Körper durch eine augenblickliche Einwirkung aus ihrem Gleichgewicht gebracht werden, so kehren sie sehr bald zu ihrem Gleichgewicht zurück, und nehmen wieder die Form an, welche ihr Gleichgewicht erfordert, z. B. eine horizontale Oberfläche, wenn es eine in einem Gefässe enthaltene Flüssigkeit mit freier Oberfläche ist; nach einigen Oscillationen um die Gleichgewichtslage her, kommen sie zur Ruhe, und nehmen zugleich die dem Gleichgewicht entsprechende Form an; anders ist es mit dickflüssigen Körpern; bei diesen hören die Oscillationen sehr bald auf, oder sie oscilliren auch wohl gar nicht; aber es gehört immer eine geraume Zeit dazu bis sie vollkommen ihre Gleichgewichtslage erlangt haben; so wie es ebenfalls einer geraumen Zeit bedarf, um sie aus ihrer Gleichgewichtslage herauszubringen.

Die festen Körper haben eine sehr mannigfaltige inneren Structur: bei einigen von ihnen, und bei den sogenannten dichten Körpern (dieser Ausdruck ist der Mineralogie abgeborgt) sind die Theilchen derselben nach allen Richtungen gleichmässig angeordnet: sie unterscheiden sich von den flüssigen Körpern nur dadurch, dass ihre Theilchen gar nicht, oder bei weitem nicht so verschiebbar sind; es sind gewissermaassen Körper von sehr grosser oder unendlich grosser Dickflüssigkeit. Wenn sie von allen Seiten her einem gleichmässigen Druck ausgesetzt werden, so verhalten sie sich eben so, wie die Flüssigkeiten, d. h. ihr Volumen wird vermindert ohne Aenderung der äussern Form; ein einseitiger Druck aber wirkt ganz anders auf dieselben; die Form des Körpers ändert sich nicht nur durch Verschiebung der Theilchen, sondern auch dadurch, dass die Theilchen auseinander gehen, oder sich nähern, oft beides zugleich mit mehr oder weniger vollständiger Compensation. Bei einseitigem Druck äussern sich also zwei verschiedene Wirkungen: die Theilchen des Körpers ändern ihre gegenseitige Entfernung, und streben in ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage wieder zurück zu kehren: das ist die elastische Wirkung; ausserdem aber verschieben sich die Theilchen gegen einander, und streben ebenfalls zur ursprünglichen Gleichgewichtslage zurück zu kehren; das pflegt man die elastische Nachwirkung zu nennen. Diese beiden Wirkungen würden nicht von einander zu unterscheiden sein, wenn sie nicht verschiedene Gesetze befolgten; es gehört nämlich eine gewisse Zeit dazu, damit die Nachwirkung sich einstelle; dagegen ist die elastische Wirkung momentan. Die Nachwirkung ist auch nur dann vollständig (d. h. der Körper kehrt nur dann vollständig in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück) wenn die Verschiebung der Theile eine gewisse Grenze des Raumes und der Zeit nicht überschritten hat; im entgegengesetzten Falle entsteht aus der Nachwirkung, d. h. aus der vorübergehenden Verschiebung der Theilche, eine blei-

bende, oder die Gleichgewichtslage derselben wird eine andere. Man sehe hierüber die interessante Abhandlung von Weber in den Annalen von Poggendorf nach: folgender Versuch giebt ebenfalls einen deutlichen Begriff davon, was man unter Nachwirkung zu verstehen hat.

Ein cylindrischer Stab von Stahl, von beiläufig 30 Zoll Länge und 2 Linien Dicke, Taf. I. fig. 1, wurde so an einem Ende eingeklemmt, dass dieses Ende eine vollkommen horizontale Lage hatte, während das andere Ende des Stabs vermöge der Biegsamkeit desselben, ein wenig herabhing; an dieses freie Ende wurde eine Wagschale gehängt, welche man mit Gewichten beschweren konnte; indem man die Gewichte vermehrte, wurde das freie Ende des Stabes immer mehr herabgebogen, während das eingeklemmte Ende seine horizontale Lage behielt.

Um mit Genauigkeit messen zu können, um wieviel sich das freie Ende des Stabes geneigt hatte, war an diesem Ende ein Spiegel befestigt, dessen Fläche einen rechten Winkel mit der Axe des Stabes machte; die belegte Seite des Spiegels war dem eingeklemmten Ende zugewandt. Ein tragbarer astronomischer Verticalkreis, dessen verticale Axe vermittelst eines an den Rand des Kreises befestigten Niveaus, und vermittelst dreier Fussschrauben eingestellt werden konnte, wurde so vor den Spiegel gestellt, dass der getheilte Kreis des Instruments und die Axe des Stabes in parallelen Verticalebenen lagen; das Fernrohr des Kreises wurde auf den Spiegel gerichtet. Wenn die optische Axe des Fernrohrs senkrecht auf die reflectirende Ebene des Spiegels stand, so wurde das durch eine besondere Vorrichtung stark beleuchtete Bild des Fadenkreuzes wieder zurück geworfen, und man konnte es mit dem wahren Fadenkreuze coincidiren sehen. Neigt sich das freie Ende des Stabes ein wenig mehr herab, so ändert sich auch zugleich die Neigung des Spiegels gegen den Horizont, und das reflectirte Bild des Fadenkreuzes änderte seine Lage; um die Coincidenz wieder hervorzubringen, musste das Fernrohr so lange fort bewegt werden, bis die optische Axe desselben mit der Axe des Spiegels wieder einen rechten Winkel machte; der getheilte Kreis gab sogleich an, um wieviel das Fernrohr fortgeschoben worden war, um wieviel sich also der Spiegel geneigt hatte. Man konnte auf diese Art auch die Neigung des freien Endes gegen das eingeklemmte bestimmen, oder, wenn man lieber will, die Neigung des freien Endes gegen den Horizont; man brauchte nur vorher dem Fernrohr eine lothrechte Lage zu geben, mit dem Objectiv nach unten, und unter dasselbe einen künstlichen Quecksilberhorizont zu stellen; man liess das von der Quecksilberfläche reflectirte Bild des Fadenkreuzes mit dem wahren Fadenkreuz coincidiren, stellte den Nullpunkt des Verticalkreises auf den Nullpunkt der Alidade, und befestigte den Verticalkreis in dieser Stellung. Man sieht leicht ein, dass wenn man nach dieser Operation das Fernrohr auf den am freien Ende des Stabes befestigten Spiegel richtete, und das vom Spiegel reflectirte Bild des Fadenkreuzes mit dem wahren coincidiren liess, so gab die Theilung des Verticalkreises unmittelbar die Neigung des Spiegels gegen den Horizont an; ist aber der Spiegel wirklich senkrecht auf die Axe des Stabes an seinem freien Ende, und das eingeklemmte Ende desselben wirklich horizontal, so ist offenbar die Neigung des Spiegels gegen den Horizont dem Winkel, den die beiden Enden des Stabes mit einander machen, gleich: wie man aber den Collimationsfehler des

Spiegels, d. h. die Abweichung seiner Stellung gegen die Axe des freien Endes des Stabes von einem rechten Winkel finden kann, ist jedem bekannt, der sich mit magnetischen Beobachtungen abgegeben hat.

So erhielt ich bei verschiedenen Belastungen, in verschiedenen Zeiten, folgende Neigungen der Axe des freien Endes des Stabes gegen die Horizontalebene, oder gegen die Axe des eingeklemmten Endes des Stabes.

Zeit.	Belastung. *) Pfund.	Neigung des freien Endes.
rasch hinter einander.	0,000	2° 53′ 50″
	0,1138	4 2 30
	0,1763	4 40 20
	0,2388	5 18 10
	0,0000	2 55 00
den andern Morgen.	0,0000	2 53 50

Man sieht, dass nach allmähliger Belastung bis zu 0,2388, der Stab nicht wieder in seine ursprüngliche Stellung zurückkehrte, sobald die Belastung abgenommen war, sondern nach und nach, und vollständig erst den andern Morgen.

Der folgende Versuch zeigt, dass die Neigung, welche durch eine gewisse Belastung hervorgebracht wird, ebenfalls nach und nach grösser wird.

	Zeit.	Belastung.	Neigung.
2. December Vormittag.	10h 0′	0,0000	2° 53′ 20″
	11 15	1,0513	13 13 00
	11 30	—	18 10
	12 00	—	20 50
Nachmittag.	1 00	—	22 10
	2 25	—	24 00
	11 25	—	27 00
3. Dec. Nachm.	2 00	—	29 30
	10 30	—	30 30
	10 32	0,0000	3 9 0
4. Dec. Vormit.	10 30	—	2 57 10
Nachm.	7 00	—	56 10
	12 00	—	55 30
5. Dec. Vormit.	11 00	—	54 20
Abends.	11 00	—	53 50

*) In diesen Belastungen ist das Gewicht der Schale mit einbegriffen; die Neigung 2° 53′ 50″ wurde also nur durch das Gewicht des Spiegels, des Stabes selbst und des Hakens, an welchen die Schale gehängt wurde, hervorgebracht.

Die durch die Belastung hervorgebrachte Neigung des freien Endes des Stabes vermehrte sich also $1\frac{1}{2}$ Tage hindurch, erst ziemlich rasch, nachher sehr langsam; es bedurfte wieder zweier Tage, um den Stab wieder zu seiner ursprünglichen Richtung zurückgekehrt zu sehen.

Als der Stab mehrere Mal hinter einander mit einem Pfunde belastet wurde, aber jedes Mal nur auf eine sehr kurze Zeit (ein Paar Secunden) kam er genau wieder zu seiner ursprünglichen Stellung zurück; dasselbe geschah, wie zu erwarten war, auch bei geringeren Belastungen. Der Versuch wurde wiederholt, und in noch engeren Intervallen beobachtet.

Zeit.			Belastung.	Neigung.		
6. December.			0,0000	2°	54′	30″
8. Dec. Vorm.	11^h	40′	1,0513 (Hatte vom 6. December an gehangen.)	13	32	10
	11	42	0,0000	3	12	40
		45	—		9	40
		48	—		8	40
		51	—		7	40
		54	—		7	00
	12	00	—		6	00
		6	—		5	40
		18	—		4	50
		30	—		4	10
Nachm.	9	30	—	2	58	10
9. Dec. Morg.	10	30	—	2	57	20
Abends.	7	30	—		56	40
10. Dec. Morg.	11	00	—		55	20
11. Dec. Nachm.	4	00	—		55	00
12. Dec. Ab.	10	00	—		55	00

Man sieht, dass nach Aufhebung der Belastung, die Neigung des freien Endes des Stabes erst rasch, dann immer langsamer abnimmt, und erst nach mehreren Tagen zu ihrem ursprünglichen Werth zurückkehrt.

Mit geringeren Belastungen war die Erscheinung genau dieselbe; den 12. December um 10 Uhr Abends z. B. wurde der Stab mit 0,5513 belastet, die Belastung blieb bis zum folgenden Abend hängen; die Neigung war 8° 30′ 40″ als die Belastung plötzlich abgenommen worden war. Es wurden nun folgende Neigungen beobachtet:

Zeit.			Neigung.		
13. Dec.	7^h	56′	3°	0′	40″
		59	3	0	0
	8	5	2	59	0

Zeit.	Neigung.
8h 17′	2° 58′ 40″
45	2 57 50
9 10	2 57 30
12 00	2 56 00
14. Dec. Ab. 8 20	2 55 00

Im vorigen Versuche hatte eine Belastung von 1,0513 eine Nachwirkung von 17′ 40″ hervorgebracht; in diesem, bei einer Belastung von 0,5513, hatte die Nachwirkung 5′ 40″ betragen; die Nachwirkungen haben sich also ungefähr wie die Quadrate der Belastungen verhalten.

Bei geringeren Balastungen nahm die Nachwirkung immer ab, aber selbst sehr geringe brachten eine kleine Nachwirkung hervor.

Ich brauche nicht hinzuzufügen (denn die alltägliche Erfahrung lehrt es) dass wenn die Belastung zu weit getrieben wird, der Stab sich für immer biegt, und nicht mehr in seinen früheren Gleichgewichtszustand zurück kehrt. Dies geschah wenn die Belastung mehr als $\frac{1}{2}$ Kilogramm betrug; das ist also die wahre Grenze für die Elasticität des Stabes.

Diese merkwürdige Eigenschaft der elastischen Körper zeigt sich nicht nur, wie wir eben gezeigt haben, bei der Flexion, sondern auch bei der Torsion. Wenn man einen metallischen Drath in senkrechter Stellung am oberen Ende einklemmt, am unteren Ende desselben aber einen horizontalen Hebel befestigt (an den man, um die Schwingungsdauer zu variiren, in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt desselben Gewichte anhängen kann) und diesen in einer horizontalen Ebene schwingen lässt, so nehmen die Schwingungen bei einigen Metallen rascher ab als bei andern: ein Beweis, dass der Widerstand der Luft nicht die einzige Ursache dieser Abnahme ist. Ich verweise auf meine früheren Versuche*) und auf das, was in dieser Einleitung in dem Abschnitt, der von den Torsionsschwingungen handelt, gesagt ist.

Um alle Zweifel zu entfernen, die wegen des Widerstandes der Luft entstehen könnten, habe ich diese Versuche, auch in einem ziemlich grossen Maassstabe im luftleeren Raume wiederholt, und auch hier gefunden:

1. Dass die Schwingungsweiten immer mehr, und zwar ziemlich rasch abnehmen.
2. Dass die Grösse der Abnahme verschieden ist bei verschiedenen Metallen, und selbst bei demselben Metalle, wenn es sich in verschiedenen Zuständen befindet.
3. Dass die Schwingungsdauer mit der Abnahme der Schwingungsweite ebenfalls abnimmt.

Ich halte es für überflüssig, diese Versuche hier ausführlich mitzutheilen, da sie eigentlich nicht hierher gehören, werde es aber in einer eigenen Abhandlung thun, sobald sie ganz beendigt sein werden.

Die allmählige Abnahme der Schwingungsweiten (selbst im luftleeren Raum) lässt sich sehr gut durch die Nachwirkung erklären, weshalb auch schon Weber vorausgesehen hat,

*) Siehe: Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg, VIme série sc. math. et phys. Tom. V.

dass die Schwingungsweiten elastischer Körper in luftleerem Raum allmählich abnehmen würden, wie ich später durch Versuche bewiesen habe. Die Nachwirkung bringt hier dieselbe Wirkung hervor, wie die Friction beim Widerstande der Luft, und besteht wohl auch in nichts anderem, als in einem mit Friction verbundenem Glitschen der Theile über einander: nur ist nicht zu übersehen, dass die Friction der Theilchen unter einander nicht zu erklären im Stande ist, warum der Stab oder der Drath, nach Aufhebung der ablenkenden Kraft, wieder zu seinem ursprünglichen Gleichgewichtszustande zurück kehrt; diese Erscheinung setzt offenbar eine gewisse Kraft voraus, welche jeden festen Körper, selbst wenn er durch Aenderung seiner Form in andere Gleichgewichtsbedingungen versetzt worden ist, dennoch immer wieder in längerer oder kürzerer Zeit zu seiner ursprünglichen Form (oder zu seiner ursprünglichen Gleichgewichtsbedingung) zurückführt, wenn die Abweichung von der ursprünglichen Gleichgewichtslage nicht gar zu gross gewesen ist.

Die allmählige Abnahme der Schwingungsdauer, welche mit der Abnahme der Schwingungsweiten gleichen Schritt hält, lässt sich ebenfalls aus der Nachwirkung erklären; wir haben oben gesehen, dass die Nachwirkung rascher zunimmt als die ablenkende Kraft; bei grösseren Schwingungsweiten (es ist bekannt, dass die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist) muss also die Nachwirkung verhältnissmässig grösser sein als bei kleineren.

Wenn die Nachwirkung dem Torsionswinkel proportional wäre, so würde die Summe der elastischen Kraft und der Nachwirkung ebenfalls dem Ablenkungswinkel proportional bleiben, und die Schwingungen würden isochron sein; in der That aber nimmt das Verhältniss der ablenkenden Kraft zum Ablenkungswinkel immer mehr ab, je grösser die Schwingungsweite wird; die Schwingungsdauer hängt aber eben von diesem Verhältniss ab.

Wir sehen aus dem Vorhergehenden, dass beim Studium der Eigenschaften der elastischen Körper, die Erscheinungen der eigentlichen Elasticität von den Erscheinungen der Nachwirkung sorgfältig zu unterscheiden sind, und dass wir, um eine klare Einsicht zu erhalten, uns an eine Beobachtungsmethode halten müssen, die beide Erscheinungen gehörig zu trennen im Stande ist. Die Schwingungen elastischer Körper sind offenbar besonders dazu geeignet, eine solche Beobachtungsmethode zu liefern, denn in der Dauer ihrer Schwingungen geben sie uns ein Maass für ihre ganze elastische Kraft, in dem allmähligen Abnehmen der Schwingungsweiten aber ein Maass für die Nachwirkung.

Was ich von den gleichmässig dichten oder homogenen festen Körpern gesagt habe, gilt auch für diejenigen, welche in verschiedenen Richtungen eine verschiedene Dichtigkeit haben. Diese Ungleichmässigkeit nach verschiedenen Richtungen hat seine Ursache gewöhnlich in der Bearbeitung. Metalle z. B. die vollkommen homogen sind, werden durch Hammerschläge, durch Walzen in einer Richtung dichter als in der andern; wenn man sie zu Dräthen auszieht, oder erst stark erhitzt und dann plötzlich abkühlt, werden sie auch ungleich; die verschiedenen Metalle verhalten sich in dieser Hinsicht sehr verschieden; sie werden alle härter durch diese Behandlung, aber auch in sehr verschiedenem Grade. Weiches Eisen z. B. wird hart durch Hämmern, Walzen und Ausziehen zu Drath, aber nicht durch plötzliches Abkühlen; Stahl dagegen

wird durch plötzliches Abkühlen sehr hart. Messing wird durch Hämmern und Drathziehen bedeutend härter als Kupfer und Silber. Alle Metalle, die durch die genannten Operationen hart geworden sind, werden durch Ausglühen wieder weich. Wir werden nachher sehen, dass alle diese verschiedenen Zustände desselben Metalls einen bedeutenden Einfluss auf seine Elasticität und Nachwirkung ausüben.

Endlich giebt es noch eine Classe von festen Körpern, die Krystalle, deren Ungleichmässigkeit nach verschiedenen Richtungen eine so regelmässige äussere Form hervorgebracht hat, dass sie ein höchst interessanter Gegenstand der Geometer geworden sind; leider sind die Beobachtungsmethoden, die wir hier angewendet haben, auf sie nicht anwendbar; wir sind deshalb gezwungen gewesen, die Beobachtung ihrer elastischen Verhältnisse ganz aufzugeben.

Transversalschwingungen elastischer Stäbe.

Unter allen Schwingungen elastischer Körper sind die Transversalschwingungen prismatischer Stäbe am leichtesten zu erhalten und zu beobachten: ich habe mich also ausschliesslich solcher Stäbe bedient.

Wenn man einen prismatischen Stab (d. h. dessen Querschnitt ein Rechteck ist) an einem Ende einklemmt, und am anderen ablenkt, so macht er, sich selbst überlassen, eine Menge Schwingungen, die immer kleiner und kleiner werden, und am Ende ganz aufhören. Die Dauer dieser Schwingungen hängt von der Elasticität des Körpers und von der Einwirkung ab, die die Schwere auf ihn ausübt: deshalb ist sie auch sehr verschieden, je nach der Neigung des Stabes gegen die Richtung der Schwere. Hat der Stab eine senkrechte Stellung, so bleibt er, wenn er in Ruhe ist, grade, das freie Ende mag sich oben oder unten befinden, nur muss im ersten Falle die elastische Kraft desselben grösser sein, als der Einfluss der Schwere; sonst schlägt der Stab um; dies kommt daher, weil die Einwirkung der Schwere bei Umkehrung des Stabes negativ wird, während die Einwirkung der Elasticität immer dasselbe Zeichen behält; wenn das freie Ende des Stabes nach oben gerichtet ist, so strebt die Schwerkraft den abgelenkten Stab von seiner Gleichgewichtslage zu entfernen, während die Elasticität ihn immer derselben zu nähern strebt.

Es sei t die Dauer einer Schwingug in der Lage, wo sich das freie Ende unten befindet, und t_1 die Dauer einer Schwingung in der umgekehrten Lage, so sind die Grössen

$$\frac{1}{t^2} \text{ und } \frac{1}{t_1^2}$$

den Kräften proportional, die in beiden Lagen auf den Stab wirken. Es sei nun E die elastische Kraft des Stabes, und S die auf denselben wirkende Schwerkraft, so ist

$$\frac{1}{t^2} = c\,(E + S)$$
$$\frac{1}{t_1^2} = c\,(E - S),$$

wo c eine Constante bedeutet, die von den Dimensionen und dem Gewicht des Stabes abhängt.

Hieraus findet man leicht

$$\frac{E}{S} = \frac{t_1^2 + t^2}{t_1^2 - t^2}$$

und auch, wenn man die Schwingungsdauer, die der Stab haben würde, wenn seine elastische Kraft allein wirkte, mit T, und die Schwingungsdauer, die er haben würde, wenn seine Schwerkraft allein wirkte, mit T_1 bezeichnet

$$T^2 = \frac{1}{E}$$

$$T_1^2 = \frac{1}{S}$$

Es sei L, a, b, p die Länge, die Breite, die Dicke und das Gewicht des Stabes, δ' die Ausdehnung, die ein Stab, dessen Länge und Querschnitt der Einheit gleich sind, durch ein der Einheit gleiches Gewicht erleidet, g die Constante der Schwere (d. h. die Fallgeschwindigkeit am Ende der ersten Secunde) und endlich π das Verhältniss der Peripherie eines Kreises zu seinem Durchmesser, so ist nach Euler

$$\frac{1}{\delta'} = \frac{E \cdot \pi^2 L^3 p}{ab^3 \cdot g}$$

Ich brauche nicht erst zu sagen, dass Euler den Werth von $E = \frac{1}{T^2}$ ganz einfach aus der Schwingungsdauer T des Stabes bestimmte, in welcher Lage er sich auch befinde, indem er voraussetzte, dass die Schwingungen des Stabes so rasch sind, dass sie in den verschiedensten Lagen des Stabes immer denselben Werth behalten; er kannte unsere Methode nicht, den Einfluss der Schwere auf die Schwingungsdauer zu bestimmen und zu eliminiren.

Man kann diese Formel auf folgende Weise umwandeln:

Es sei λ die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungsdauer T_1 ist, so haben wir, wie bekannt

$$T_1^2 = \frac{\pi^2 \lambda}{g}$$

und hieraus, da $T_1^2 = \frac{1}{S}$

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{1}{\lambda \cdot S}$$

oder, da $\lambda = \frac{2}{3} L$

$$\frac{\pi^2}{g} = \frac{3}{2 L \cdot S}.$$

Wir können also auch schreiben

$$\frac{1}{\delta'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{E}{S} \cdot \frac{L^2 p}{ab^3}$$

Nun ist aber auch, wenn man mit I das Inertsmoment des Stabes bezeichnet

$$I = \frac{1}{3} L^2 p$$

woraus

$$L^2 = \frac{3 I}{p}$$

Ferner ist

$$\frac{E}{S} = \frac{t_1^2 + t^2}{t_1^2 - t^2}.$$

Wir haben also endlich

$$\frac{1}{\delta'} = \frac{9}{2} \cdot \frac{I}{ab^3} \cdot \frac{t_1^2 + t^2}{t_1^2 - t^2}.$$

Diese Formel findet noch ihre Anwendung wenn man, um die Schwingungsdauer zu vergrössern, ein Gewicht an das freie Ende des Stabes angeklemmt hat; man braucht in diesem Fall nur statt des Inertsmoments des Stabes allein, dasjenige des Stabes mit sammt dem Gewichte zu schreiben.

Wenn man aber diese Formel mit den Beobachtungen vergleicht, so findet man, dass sie denselben nicht entspricht. Wenn man denselben Stab an verschiedenen Stellen klemmt, und verschiedene Gewichte an sein freies Ende befestigt, so erhält man sehr verschiedene Werthe von $\frac{1}{\delta'}$; und wenn man den Werth von S berechnet, so findet man immer einen kleineren Werth, als den durch Beobachtung gefundenen.

Wenn man das gemeinschaftliche Moment des Stabes, wenn er allein schwingt, oder des Stabes und des Gewichtes, wenn ein Gewicht am freien Ende befestigt ist, mit m bezeichnet, so hat man bekanntlich

$$\lambda = \frac{I}{m}.$$

Man hat aber auch

$$l = \frac{g T_1^2}{\pi^2} = 2 \cdot \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{t^2 \cdot t_1^2}{(t_1^2 - t^2)}$$

wenn man mit l die Länge des einfachen Pendels bezeichnet, welche dem aus den Beobachtungen gefundenen Werthe von T_1 entspricht; es ist also leicht, sowohl λ als auch l zu finden. Nach der bisherigen Theorie müsste

$$\lambda = l$$

sein; das ist aber nie der Fall; man findet immer

$$\lambda > l$$

so dass $\frac{\lambda}{l}$ immer grösser als 1 ist.

Dies lässt sich wohl leicht daraus erklären, dass der Stab sich beim Schwingen biegt, also sein Inertsmoment ändert, indem seine Massentheile sich dem fixen Punkt nähern; er schwingt also ein wenig rascher, als es ohne diesen Umstand geschehen würde.

Durch Berechnung einer grossen Anzahl von Beobachtungen, mit verschiedenen Längen desselben Stabes, und mit verschiedenen an sein freies Ende geklemmten Gewichten angestellt, bin ich nach vielen vergeblichen Versuchen zu folgender Formel gelangt, die immer denselben Werth von $\frac{1}{\delta'}$ giebt

$$\frac{1}{\delta'} = \frac{9}{2} \cdot \frac{I}{ab^3} \cdot \frac{(t_1^2 + t^2)}{(t_1^2 - t^2)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{l}}.$$

Von den vielen Beobachtungen, die ich mit Stäben von verschiedenen Metallen und verschiedenen Dimensionen angestellt habe, führe ich hier nur die folgenden an.

Ein prismatischer Stab von gewalztem Stahl, wurde an einem Ende eingeklemmt; das freie Ende desselben wurde in Schwingung versetzt, bald so wie er war, bald nachdem man Gewichte verschiedener Art angeklemmt hatte. Dabei hatte der Stab eine genau senkrechte Stellung; das freie Ende befand sich erst oben, dann wurde der Klemmapparat umgekehrt, so dass sich das freie Ende des Stabes unten befand. Man wird weiterhin sehen, wie die Schwingungsdauer beobachtet wurde; wir werden dieselbe Beobachtungsmethode bei der Bestimmung des Einflusses der Wärme auf die Elasticität gebrauchen. Wir werden auch weiterhin sehen, wie die Gewichte an das freie Ende angeklemmt wurden, so dass sich dasselbe vollkommen frei bewegte, und welche Form sie hatten, und wie endlich die Entfernung des Schwerpunctes der Gewichte von der Oscillationsaxe mit Genauigkeit bestimmt werden konnte, was zur Bestimmung des jedesmaligen Inertsmomentes der Gewichte nothwendig war. Die eingeklemmten Gewichte mit ihren eigenen Inertsmomenten (in Bezug auf ihre Rotationsaxen, welche senkrecht auf die Ebene der Schwingungen sind, und durch die Schwerpunkte der Gewichte gehen) waren:

No.	Gewicht. (p')	Inertsmoment. q
1	0,68519	0,152
2	1,81730	1,308
3	3,29696	4,764
6	1,06441	0,431
7	4,05662	8,113

Ite Reihe.

Länge des schwingenden Theils des Stabes (L)	49,662
Gewicht des schwingenden Theils (p)	1,58481
Inertsmoment des schwingenden Theils $(\frac{1}{3}L^2p)$	1302,882
Schwerpunctsmoment des schwingenden Theils $(\frac{1}{2}Lp)$ . .	39,3525

a. Der Stab schwingt ohne Gewicht

$t_1 = 0\overset{''}{,}4045$ (gefunden aus der Dauer von 1000 Schwingungen)

$t = 0,3405$ (gefunden aus der Dauer von 1000 Schwingungen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1,06222$$

$$\delta' = 0,0000000299887$$

b. Der Stab schwingt mit einem am freien Ende angeklemmten Gewicht.

1. Mit dem Gewicht № 1.

Entfernung des Schwerpunktes des Gewichts vom Klemmpunkt am unbeweglichen Ende (L')	49,417
Inertsmoment des Gewichts in Bezug auf das unbewegliche Ende ($L'^2 . p'$)	1673,261
Eignes Inertsmoment des Gewichts (q)	0,152
Inertsmoment des Stabes ($\frac{1}{3}L^2p$)	1302,882
Totales Inertsmoment (I)	2976,295
Schwerpunctsmoment des Gewichts ($L'p'$)	33,8600
» des Stabes ($\frac{1}{2}Lp$)	39,3525
Totales Schwerpunctsmoment (m)	73,2125

t_1 = 0,7804 (gefunden aus der Dauer von 1200 Schwingungen)
t = 0,5170 (gefunden aus der Dauer von 1000 Schwingungen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1{,}08939$$

$$\delta' = 0{,}0000000296397$$

2. Mit dem Gewichte № 6.

$$L'^2p' = 2599{,}331$$
$$q = 0{,}431$$
$$\tfrac{1}{3}L^2p = 1302{,}882$$
$$I = 3902{,}646$$

$$L'p' = 52{,}6000$$
$$\tfrac{1}{2}Lp = 39{,}3525$$
$$m = 91{,}9525$$

t_1 = 1,0195 (gefunden aus der Dauer von 1000 Oscillationen)
t = 0,5763 (gefunden aus der Dauer von 2000 Oscillationen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1{,}10998$$

$$\delta' = 0{,}0000000296124$$

3. Mit dem Gewicht № 2.

$$L'^2p' = 4437,919$$
$$q = 1,308$$
$$\tfrac{1}{3}L^2p = 1302,882$$
$$I = 5742,109$$

$$L'p' = 89,8015$$
$$\tfrac{1}{2}Lp = 39,354$$
$$m = 129,1580$$

$t_1 = 1,8070$ (gefunden aus der Dauer von 800 Oscillationen)
$t = 0,6594$ (gefunden aus der Dauer von 2400 Oscillationen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1,13139$$
$$\delta' = 0,0000000295720$$

IIte Reihe.

Länge des schwingenden Theils des Stabes (L)	40,085
Gewicht desselben (p)	1,27919
Inertsmoment desselben ($\tfrac{1}{3}L^2p$)	685,1383
Schwerpunctsmoment ($\tfrac{1}{2}Lp$)	25,6382

a. Der Stab schwingt ohne Gewicht.

$t_1 = 0,2535$ (gefunden aus der Dauer von 1000 Oscillationen)
$t = 0,2315$ (gefunden aus der Dauer von 2000 Oscillationen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1,05686$$
$$\delta' = 0,0000000303490$$

b. Der Stab schwingt mit einem am freien Ende angeklemmten Gewicht.

1. Mit dem Gewicht № 1.

Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom unbeweglichen Ende (L')	39,840
Inertsmoment des Gewichts in Bezug auf das unbewegliche Ende (L'^2p')	1087,551
Eignes Inertsmoment des Gewichts (q)	0,152
Inertsmoment des Stabes ($\tfrac{1}{3}L^2p$)	685,138
	$I =$ 1772,841

Schwerpunctsmoment des Gewichts $(L'p')$	27,2980
» des Stabes $(\frac{1}{2}Lp)$	25,6382
	$m =$ 52,9362

$t_1 = 0{,}''4900$ (gefunden aus der Dauer von 1000 Oscillationen)

$t = 0{,}3850$ (gefunden aus der Dauer von 2000 Oscillationen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1{,}07850$$

$$\delta' = 0{,}0000000303413$$

2. Mit dem Gewicht № 6.

$$\begin{aligned} L'^2p' &= 1689{,}460 \\ q &= 0{,}431 \\ \tfrac{1}{3}L^2p &= 685{,}138 \\ \hline I &= 2375{,}029 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'p' &= 42{,}4061 \\ \tfrac{1}{2}L\,p &= 25{,}6382 \\ \hline m &= 68{,}0443 \end{aligned}$$

$t_1 = 0{,}''6063$ (gefunden aus der Dauer von 1200 Oscillationen)

$t = 0{,}4388$ (gefunden aus der Dauer von 2000 Oscillationen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1{,}10195$$

$$\delta' = 0{,}0000000297709$$

3. Mit dem Gewicht № 2.

$$\begin{aligned} L'^2p' &= 2884{,}464 \\ q &= 1{,}308 \\ \tfrac{1}{3}L^2p &= 685{,}138 \\ \hline I &= 3570{,}910 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'p' &= 72{,}4012 \\ \tfrac{1}{2}Lp &= 25{,}6382 \\ \hline m &= 98{,}0394 \end{aligned}$$

$$t_1 = 0{,}''8682$$

$$t = 0{,}5150$$

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1,13618$$

$$\delta' = 0,0000000298086.$$

4. Mit dem Gewicht № 3.

$$L'^2p' = 5233,020$$
$$q = 4,764$$
$$\tfrac{1}{3}L^2p = 685,138$$
$$I = 5922,922$$

$$L'p' = 131,3509$$
$$\tfrac{1}{2}Lp = 25,6382$$
$$m = 156,9891$$

t_1 = 1,8450 (gefunden aus der Dauer von 600 Oscillationen)
t = 0,″6087 (gefunden aus der Dauer von 3000 Oscillationen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1,15833$$

$$\delta' = 0,0000000297674.$$

5. Mit dem Gewicht № 7.

$$L'^2p' = 6438,770$$
$$q = 8,113$$
$$\tfrac{1}{3}L^2p = 685,138$$
$$I = 7132,021$$

$$L'p' = 161,6157$$
$$\tfrac{1}{2}Lp = 25,6382$$
$$m = 187,2539$$

t_1 = 5,3070 (gefunden aus der Dauer von 140 Oscillationen)
t = 0,6422 (gefunden aus der Dauer von 3000 Oscillationen),

woraus

$$\frac{\lambda}{l} = 1,16159$$

$$\delta' = 0,0000000298299.$$

Zusammenstellung der erhaltenen Werthe von δ′.

	I. Reihe. $L = 49{,}662$	II. Reihe. $L = 40{,}085$
Ohne Gewicht.	0,0000000299887	303490
Mit dem Gew. № 1.	296397	303413
» 6.	296124	297709
» 2.	295720	297674
» 7.		298299

Man sieht, dass diese Resultate sehr gut mit einander übereinstimmen, besonders wenn man bedenkt, dass wo die Schwingungsdauer in beiden Lagen des Stabs nur wenig verschieden ist, die Formel nicht im Stande ist ein genaues Resultat zu geben. Nimmt man in jeder Reihe nur die 3 letzten Werthe, so erhält man:

aus der I[ten] Reihe $\delta' = 0{,}0000000296080$
aus der II[ten] Reihe $\delta' = 0{,}0000000297891$

Um den gefundenen Werth von δ′ noch genauer zu prüfen, habe ich ihn noch durch Flexionsversuche zu erhalten gesucht, und habe mich dabei derselben Methode bedient, die ich schon oben beschrieben habe.

Derselbe prismatische Stab von gewalztem Stahl, dessen Queerschnitt ein Rechteck ist, (die längste Seite wurde mit a, die kürzeste mit b bezeichnet) wurde in der Mitte so zwischen 2 festen Spitzen geklemmt, dass die Endpuncte seiner der Seite a parallelen Axe eine horizontale Lage hatten, die beiden Hälften des Stabes also zu beiden Seiten ein wenig herabhingen; denn da der Stab ziemlich lang ist, so krümmte er sich durch sein eignes Gewicht. An die beiden freien Enden waren die Spiegel befestigt, deren Flächen senkrecht auf die Längenaxe des Stabes waren, so wie wir es schon oben beschrieben haben. An denselben Enden (gleich hinter den Spiegeln) hingen 2 Waagschalen, die man mit Gewichten beschweren konnte. Der Winkel, den die beiden Enden des Stabes mit einander machten (der Winkel zwischen den beiden Tangenten, welche man an diejenigen Puncte der Längenaxe des Stabes ziehen konnte, von welchen die Gewichte herabhingen) wurde also durch die gegenseitige Neigung der Spiegel gemessen; diese Neigung ist dem doppelten Flexionswinkel (φ) gleich; die Neigung der Spiegel gegen den Horizont wird durch zwei Verticalkreise, deren Fernröhre auf die Spiegel gerichtet sind, gemessen, wie wir oben gesehen haben. Der Collimationsfehler der Spiegel wurde durch Umkehren des Stabs eliminirt. Zugleich wurde die horizontale Entfernung der beiden Aufhängepuncte der Waagschalen gemessen; die Hälfte dieser Entfernung mit dem Gewicht multiplicirt, gab das Moment des Gewichts.

Mehrere, mit grosser Genauigkeit angestellte Versuche zeigten gleich, dass die Flexionswinkel dem Momente der Gewichte und der Länge des Stabes proportional sind; hieraus erhält man leicht die Formel

$$\delta' = \frac{1}{6} \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot \frac{ab^3}{Lp} \cdot \text{tang } 1',$$

wo φ den Flexionswinkel bedeutet, l die halbe Länge des Stabes, L die halbe Entfernung zwischen den beiden Aufhängepuncten der Gewichte (oder die Subtangente des Flexionswinkels), p das angehängte Gewicht, worunter natürlich nicht nur das in der Waagschale gelegene nebst der Waagschale selbst gemeint ist, sondern auch die auf denselben Punct (den Aufhängepunct) bezogenen Gewichte des Spiegels und der Hälfte des Stabs selbst. Da diese letzten Gewichte nicht bekannt sind, so kann man ihre Summe mit p' bezeichnen, das angehängte Gewicht aber mit p'', so dass man schreiben kann:

$$\delta' = \frac{1}{6} \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot \frac{ab^3}{L(p'+p'')} \cdot \text{tang } 1'$$

Da in dieser Gleichung zwei unbekannte Grössen sind, nämlich δ' und p', so sind zwei Beobachtungen hinreichend, um p' zu finden; mit diesem p' ist es dann leicht, den Werth von δ' für jede Beobachtung zu finden.

Auf diese Weise wurden die nachstehenden unmittelbar durch die Beobachtung gefundenen Werthe behandelt.

Länge des Stabes (d. h. Entfernung zwischen den beiden Aufhängepuncten der Gewichte, wenn keine Biegung statt fand) . . . . . $l = 51{,}8800$

No.	Aufgelegtes Gewicht auf jede Seite. p''	Horizontale Entfernung der beiden Aufhängepuncte. $2L$	Flexionswinkel. φ
1.	0	51,7532	306,5
2.	0,25	51,6828	402,5
3.	0,50	51,5702	498,0
4.	1,00	51,3080	686,5
5.	2,00	50,5544	1050,5
6.	3,00	49,5543	1398,5

Man findet nun

aus № 1. und 4. $p' = 0{,}7941$

» » 1. und 3. $p' = 0{,}7930$

oder im Mittel

$$p' = 0{,}7936$$

Mit diesem Werth von p' findet man folgende Werthe von δ'

aus №	1.	$\delta' =$	0,000000029634
» »	2.	$\delta' =$	29633
» »	3.	$\delta' =$	29643
» »	4.	$\delta' =$	29623
» »	5.	$\delta' =$	29537
» »	6.	$\delta' =$	29541
		Mittel	0,000000029602

Dieser Werth stimmt vollkommen mit demjenigen zusammen, den wir aus der I^ten Reihe unserer Schwingungsbeobachtungen gefunden haben; das Resultat der II^ten Reihe weicht nur sehr wenig von derselben ab.

Drehungsschwingungen.

Wenn man einen Drath an seinem oberen Ende befestigt, so dass er frei herabhängt, an sein unteres Ende aber ein Gewicht hängt, so kann man denselben in drehende Schwingungen versetzen, indem man das Gewicht nur einige Grade dreht und dann plötzlich loslässt. Die Dauer dieser Schwingungen hängt von der Elasticität des Draths ab, und ist desto geringer, je grösser diese ist. Bezeichnet man das Drehungsmoment des Draths (d. h. die in Gewicht ausgedrückte Kraft, welche dazu gehört um an einem Hebel, dessen Länge der Einheit gleich ist, angebracht, das freie untere Ende des Draths um einen Bogen = 1 zu drehen) mit n, so ist

$$\delta = \frac{\delta'}{\pi} = \frac{\rho^4}{8\,nl}$$

wo ρ der Radius des Draths (man setzt einen kreisförmigen Durchschnitt voraus) bedeutet, l dessen Länge.

Um den Werth von n zu finden dient folgende Formel:

$$n = \frac{\pi^2 k}{g\,t^2}$$

wo k das Trägheitsmoment des ans untere Ende des Draths gehängten Gewichts bedeutet, t die Dauer einer Oscillation, g die Schwere, oder das Doppelte des Raumes, den ein im luftleeren Raum fallender Körper in der ersten Secunde seines Falles durchläuft, und π das Verhältniss des Umfanges eines Kreises zu seinem Durchmesser.

Da die Bestimmung des Trägheitsmoments eines Gewichts, mit den Apparaten, die dazu dienen dasselbe an das Ende des Drathes anzuklemmen, und dessen Schwingungszeit mit Genauigkeit zu beobachten, viel Schwierigkeit hat, so thut man wohl, dieselbe zu umgehen, indem man an das untere Ende des Draths einen horizontalen Hebel befestigt, so dass die Verlängerung der Axe des Draths durch seinen Schwerpunct geht; an diesen Hebel hängt man in gleicher Entfernung vom Mittelpunct, zu beiden Seiten des Draths, zwei Gewichte, deren

Trägheitsmoment sich zu dem Trägheitsmoment des Hebels gesellt, und die Schwingungszeit desselben bedeutend vergrössert. Werden nun diese Gewichte erst in der Nähe des Draths, dann in grösserer Entfernung (an die beiden Enden des Hebels) aufgehängt, so erhält man zwei sehr verschiedene Schwingungszeiten, mithin zwei Bedingungsgleichungen, aus denen man das Trägheitsmoment des Hebels sowohl, als wie das der Gewichte eliminiren kann. Gauss hat bekanntlich schon diese Methode angewandt, um das Drehungsmoment eines Magnetstabes zu bestimmen.

Es seien:

p das angehängte Gewicht,

r die horizontale Entfernung seines Aufhängepunctes von der Axe des Draths,

i das eigene Trägheitsmoment jedes Gewichts in Bezug auf seine senkrechte durch den Schwerpunct des Gewichts gehende Axe,

I das Trägheitsmoment des Hebels in Bezug auf seine Drehungsaxe (die mit der Axe des Draths zusammenfällt),

A die Schwingungszeit des Hebels, so ist bekanntlich

$$n = \frac{\pi^2}{gA^2} \cdot (I + 2pr^2 + 2i).$$

Hängt man nun dieselben Gewichte in einer anderen Entfernung r_1 von der Axe des Drathes an, und bezeichnet die verminderte Schwingungszeit mit A_1, so hat man eben so

$$n = \frac{\pi^2}{gA_1^2} \cdot (I + 2pr_1^2 + 2i).$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminirt man leicht $I + 2i$, und erhält

$$n = 2p \cdot \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{r^2 - r_1^2}{A^2 - A_1^2}.$$

Diese Formel wurde auf folgende Weise von mir in Anwendung gebracht.

Der messingene Hebel glich vollkommen einem Waagebalken, hatte eine Länge von 70 Zoll, und war so stark gemacht, dass er ohne zu biegen eine Last von 200 Pfund an jedem Ende tragen konnte. Die nach unten gekehrte Schärfe des mittleren Prismas befand sich nahezu 2 Zoll über dem Schwerpunct des Hebels; mit dieser Schärfe ruhte der Hebel auf einer Stahlplatte (in einer sehr flachen Rinne oder Hohlkehle, um das Hin- und Herschieben zu verhindern), welche den horizontalen Theil eines Steigbügels bildete; in das obere Ende dieses Steigbügels, welcher oberhalb des Hebels lag, war das untere Ende des Drathes eingeklemmt. Der Hebel hatte noch an beiden Enden Prismen, deren Schärfe nach oben gerichtet war (ganz wie bei den Waagen), und die in einer Ebene mit der Schärfe des mittleren Prismas lagen; auf diesen Prismen lagen umgekehrte Steigbügel (ebenfalls mit Hohlkehlen), mit Haken am unteren Ende, an die man Gewichte hängen konnte. Die Entfernungen der beiden letzten Prismen von dem mittleren waren genau gleich, der Hebel vollkommen ajustirt wie ein Waagebalken, die Steigbügel der beiden Endprismen von gleichem Gewicht; der Hebel blieb also vollkommen

horizontal, und oscillirte um diese horizontale Lage herum, wenn man gleiche Gewichte an die beiden Endsteigbügel hing. Aehnliche Prismen waren in der Nähe des mittleren Prismas angebracht, deren Schärfen auch genau in derselben Ebene mit der Schärfe des mittleren Prismas lagen, und deren Entfernungen von der Axe des Draths ebenfalls je zwei und zwei gleich waren. Die Endprismen waren 36,012 von der Axe des Drathes entfernt; die der Axe zunächst liegenden Prismen nur 15,385 *); alle diese Prismen sind vollkommen ajustirt worden, wie es bei Waagen geschieht, und wenn an je zweien derselben, die eine gleiche Entfernung von der Axe des Drathes haben, gleiche Gewichte angehängt wurden, so hielt sich der Hebel vollkommen horizontal; auch konnte man die Gewichte verwechseln, ohne die Horizontalität des Hebels aufzuheben. Damit der Hebel, während er um die Axe des Drathes oscillirt, keine verticale Schwingungen machen könne, kann er durch zwei Schrauben an den oben beschriebenen Steigbügel, in welchem er hängt, angeklemmt werden. Um die Schwingungszeiten des Hebels mit grosser Genauigkeit beobachten zu können, ist zwischen dem unteren Ende des Drathes und dem Hebel ein senkrechter Spiegel eingeschaltet; um den Spiegel herum ist ein getheilter Kreis von 6 Fuss im Durchmesser so aufgestellt, dass der Spiegel sich etwas über dem Mittelpunct des Kreises befindet; die Theilung befindet sich in der innern Seite des Kreises, und wird vom Spiegel in ein Fernrohr reflectirt, welches ausserhalb des Kreises und etwas über dessen Horizontalebene aufgestellt und auf den Spiegel gerichtet ist; man sieht also die Theilung im Fernrohr und der senkrechte Faden im Brennpunct desselben schneidet irgend einen Strich der Theilung, so lange der Hebel in Ruhe ist; sobald aber der Hebel anfängt in einer horizontalen Ebene zu oscilliren, bewegt sich das reflectirte Bild der Theilung durch das Feld des Fernrohrs hin und her. Die Schwingungszeit des Hebels kann mit diesem Apparat mit grosser Genauigkeit beobachtet werden: man wartet erst, bis der Hebel in Ruhe kommt, dann macht man einen schwarzen senkrechten Strich (ein schwarzer, dicker Seidenfaden mit einem kleinen Gewicht am unteren Ende kann dazu dienen) über denjenigen Theilstrich, der grade vom senkrechten Faden des Fernrohrs geschnitten wird; darauf setzt man den Hebel in Bewegung, indem man ihn mit der Hand ablenkt und wieder loslässt, und beobachtet nun genau, vermittelst eines Chronometers, die successiven Durchgänge des Bildes des schwarzen Striches durch den senkrechten Faden im Fernrohr. Die Zeiten, welche zwischen den successiven Durchgängen verflossen sind, geben offenbar die Schwingungszeit des Hebels, mit desto grösserer Genauigkeit, je längere Zeit die Beobachtungen fortgesetzt werden können; sie dauern immer mehrere Stunden. Zugleich werden die Schwingungsweiten beobachtet, indem man aufzeichnet, welcher Theilstrich den senkrechten Faden im Fernrohr bei der grössten Elongation des Hebels rechts und links durchschneidet; dies ist um so leichter zu beobachten, da der Hebel bei seiner grössten Ausweichung nach der einen oder der andern Seite immer einige Augenblicke stehen bleibt, ehe er wieder umkehrt. Die Theilung des Kreises ist eine willkührliche (halbe Linien), da aber der Durch-

*) Es sind noch zwei der Axe näher liegende Prismen da, aber da ihre Entfernung von einander (10 Zoll) zu klein ist, um grössere Gewichte, die mehr als 10 Zoll Durchmesser haben, nebeneinander aufzuhängen, so werden sie selten gebraucht.



messer des Kreises bekannt ist, so ist es leicht die in halben Linien ausgedrückte Amplitudo in Grade zu verwandeln. In der ersten Beobachtung, welche mit sehr grossen Amplituden gemacht wurde, ging die Axe des Drathes, hinlänglich verlängert, nicht genau durch den Mittelpunct des getheilten Kreises, wodurch die unmittelbare Ablesung der Amplituden fehlerhaft wurde; um diesen Fehler zu eliminiren, wurde auf der Rückseite des Spiegels ein ähnlicher, dem ersten paralleler Spiegel befestigt, auf den ebenfalls ein Fernrohr gerichtet wurde, welches dem ersten gegenüber lag; auf diese Art wurde jedesmal durch das eine Fernrohr eine zu grosse, durch das andere eine zu kleine Amplitudo beobachtet; das Mittel aus beiden Beobachtungen gab die richtige Amplitudo. Bei kleineren Amplituden erwies sich diese doppelte Beobachtung, die zwei Beobachter erfordert, als unnütz, und ich beobachtete nur mit einem Fernrohr.

Nachdem man 11 Durchgänge des schwarzen Strichs durch den verticalen Faden des Fernrohrs beobachtet hat, nimmt man die Mittel aus den aufeinander folgenden Beobachtungen, um den Einfluss einer nicht vollkommen richtigen Einstellung des schwarzen Striches aufzuheben, 10 an der Zahl, und zieht das erste Mittel vom letzten ab, wodurch man die Dauer von 9 Schwingungen erhält. Diese Zahl durch 9 dividirt, giebt schon eine ziemlich genaue Schwingungszeit, und man braucht nicht mehr jede einzelne Schwingung zu zählen, sondern man kann das Fernrohr verlassen und den Hebel fortschwingen lassen, bis die Zeit, wo der 101te Durchgang eintreffen muss, herannaht; diese Zeit findet man mit hinreichender Genauigkeit aus dem oben gefundenen annähernden Werth einer Schwingung. Nun beobachtet man wieder 11 Durchgänge, und so fort, bis die Schwingungen zu klein werden, um noch mit Sicherheit beobachtet werden zu können; vor und nach jedem Durchgange wird die Weite der Schwingungen mit aufgezeichnet.

Zieht man nun die 10 Mittel der aufeinander folgenden Durchgänge der ersten Beobachtungsreihe von den 10 Mitteln der zweiten Beobachtungsreihe ab, und dividirt die erhaltene Zahl durch 100, so hat man einen sehr genauen Werth der Schwingungszeit. Um die mittlere Amplitudo, die zu dieser Schwingungszeit gehört, zu berechnen, nimmt man das arithmetische Mittel aus den aufeinander folgenden Amplituden der ersten Reihe, und das arithmetische Mittel aus den aufeinander folgenden Amplituden der zweiten Reihe, und aus diesen beiden Mitteln das geometrische Mittel, da die Amplituden eine geometrische Reihe bilden; dieses letzte Mittel kann als diejenige Amplitudo angesehen werden, welche der aus dem Unterschiede der ersten und zweiten Reihe berechneten mittlern Schwingungszeit entspricht. So geht es dann fort mit den übrigen Beobachtungsreihen. So erhält man eine Reihe von immer mehr abnehmenden Werthen der Schwingungszeit, welcher ebenfalls immer mehr abnehmende mittlere Amplituden entsprechen. Um nun diese Schwingungszeiten auf unendlich kleine Bögen (oder wenn man lieber will, auf die Amplitudo $= 0$) zu reduciren, muss man vor allen Dingen wissen, in welchem Verhältniss die Zunahme der Schwingungszeit zu der Zunahme der Amplituden steht. Sehr zahlreiche Beobachtungen haben mir bewiesen, dass die folgende Gleichung sehr gut das obige Verhältniss ausdrückt:

$$A' = A\left(1 - \varkappa\rho\sqrt{\frac{a}{l}}\right)$$

wo A' die auf unendlich kleine Bogen reducirte, A die beobachtete Schwingungszeit ist, a die Amplitudo (in Graden ausgedrückt), ρ der Radius, l die Länge des Drathes; $\varkappa$ ist eine Constante, die für jedes Metall, und selbst für verschiedene Zustände desselben Metalls, verschiedene Werthe hat.

Zwei Beispiele von Metallen genommen, die in dieser Hinsicht sehr verschiedene Eigenschaften besitzen, werden das Gesagte erläutern.

Drath von rothem Kupfer.

Radius (ρ) 0,1194
Länge 187,842

1. Die Gewichte von 200 Pfund sind in der Entfernung von 36,0120 von der Axe des Drathes zu beiden Seiten desselben aufgehängt.

Barometerstand: 30,160 Zoll bei 14,7° R.

(*a*) Anzahl der Schwingungen.	(*b*) Mittlerer Durchgang.	(*c*) Mittlere Amplitudo, den Durchgängen entsprechend.	(*d*) Temperatur.	(*e*) Schwingungszeit.	(*f*) Mittlere Amplitudo, den Schwingungszeiten entsprechend.	(*g*) Mittlere Temperatur.	(*h*) Schwingungszeit auf 16,0° reducirt.
0	0^h 0′ 0″,00	41,963°	16,7				
100	0 59 1,00	28,739	16,3	35,4100	34,727	16,5	35,4051
300	2 56 59,13	14,057	16,3	35,3906	20,100	16,3	35,3877
500	4 54 53,53	7,227	16,3	35,3720	10,080	16,3	35,3691

Die Zahlen, die in der Colonne (*c*) enthalten sind, sind die arithmetischen Mittel aus den 9 Amplituden, welche zwischen den zehn Mitteln aus den 11 Durchgängen der ersten, zweiten etc. Reihe enthalten sind; die Colonne (*f*) enthält die geometrischen Mittel aus jenen arithmetischen Mitteln, d. h. die jeder Schwingungsdauer entsprechende Amplitudo.

Wenn man die Schwingungzeiten und Amplituden, welche diese Beobachtungen geben, in die obige Formel setzt, so erhält man 3 Bedingungsgleichungen, nämlich:

$$A' = 35'',4051 - A\,.\,\varkappa\rho\sqrt{\frac{1}{l}}\,.\sqrt{34,727}$$

$$A' = 35'',3877 - A\,.\,\varkappa\rho\sqrt{\frac{1}{l}}\,.\sqrt{20,100}$$

$$A' = 35'',3691 - A\,.\,\varkappa\rho\sqrt{\frac{1}{l}}\,.\sqrt{10,080}$$

Diese drei Gleichungen, nach der Methode der kleinsten Quadrate combinirt, geben:

$$A \,.\, \varkappa\varrho \sqrt{\frac{1}{l}} = 0{,}01323$$

$$A' = 35''{,}3275 \text{ bei } 16{,}0^\circ$$

Diese Werthe in die obigen Gleichungen gesetzt, geben

	Berechnete Werthe.	Beobachtete Werthe.	Unterschied.
A =	35,4055	35,4051	+ 0,0004
	35,3868	35,3877	— 0,0009
	35,3695	35,3691	+ 0,0004

Da nun

$$A = 35{,}3$$

$$\varrho = 0{,}1194$$

$$l = 187{,}842$$

so ist

$$\varkappa = 0{,}04302.$$

II. Die Gewichte von 200 Pfund befinden sich in der Entfernung von 15,3825 von der Axe des Drathes, auf beiden Seiten desselben.

Barometerstand: 30,175 bei 14,5°

(a) Anzahl der Schwingungen.	(b) Mittlerer Durchgang.	(c) Mittlere Amplitudo, den Durchgängen entsprechend.	(d) Temperatur.	(e) Schwingungszeit.	(f) Mittlere Amplitudo, den Schwingungzeiten entsprechend.	(g) Mittlere Temperatur.	(h) Schwingungszeit auf 16,0° reducirt.
1	0^h $0'$ $0'',00$	42,323°	16,5				
100	0 27 38,62	29,129	16,5	16,5862	35,116	16,5	16,5839
300	1 22 53,85	14,719	16,5	16,5711	20,709	16,5	16,5688
500	2 18 7,45	7,947	16,5	16,5680	10,815	16,5	16,5657

Diese Beobachtungen, nach der Methode der kleinsten Quadrate combinirt, geben

$$A \,.\, \varkappa\varrho \sqrt{\frac{1}{l}} = 0{,}006957$$

$$A = 16{,}5409 \text{ bei } 16^\circ$$

Diese Werthe, in die Bedingungsgleichungen gesetzt, geben:

	Berechnete Werthe.	Beobachtete Werthe.	Unterschied.
$A =$	16,5821	16,5839	— 0,0018
	16,5725	16,5688	+ 0,0037
	16,5637	16,5657	— 0,0020

Hieraus findet man:

$$\varkappa = 0,04828$$

Dieser Werth ist freilich etwas grösser, als der vorhergehende; wenn man aber bedenkt, wie sehr klein die Unterschiede sind, aus denen der Werth von $A \,.\, \varkappa\rho \sqrt{\frac{1}{l}}$ abgeleitet wird, so wird man keine grössere Uebereinstimmung verlangen.

Jetzt wurde der Drath vermittelst einer schicklichen Vorrichtung in der Mitte seiner Länge angeklemmt, so dass die oscillirende Länge desselben auf die Hälfte reducirt war, oder genauer auf 93,842. Nun gab er folgende Resultate, wobei sich die 200 Pfundgewichte auf der Entfernung 36,0120 von der Axe des Drathes zu beiden Seiten desselben befanden.

Barometerstand: 29,885 bei 15,0°

(a) Anzahl der Schwingungen.	(b) Mittlerer Durchgang.	(c) Mittlere Amplitudo, den Durchgängen entsprechend.	(d) Temperatur.	(e) Schwingungszeit.	(f) Mittlere Amplitudo, den Schwingungszeiten entsprechend.	(g) Mittlere Temperatur.	(h) Schwingungszeit auf 16,6° reducirt.
0	0^h 0′ 0″,00	33,620	16,5				
300	1 23 19,40	16,138	16,5	24,9970	23,293	16,5	
400	2 46 35,08	8,521	16,5	24,9784	11,727	16,5	
600	4 0 48,33	4,624	16,5	24,9663	6,306	16,5	

Wenn man die erste dieser Beobachtungen mit der letzten combinirt, so erhält man:

$$A \,.\, \varkappa\rho \sqrt{\frac{1}{l}} = 0,01327$$

$$A = 24,9330 \text{ bei } 16,5°$$

$$A = 24,9295 \text{ bei } 16,0°$$

Der Werth von $A \,.\, \varkappa\rho \sqrt{\frac{1}{l}}$ ist genau derselbe wie derjenige, welcher vor der Anklemmung des Drathes statt gefunden hatte; dabei verhalten sich die Werthe von A wie die Quadratwurzeln aus der Länge l; der Werth von $\varkappa$ hat also keine Aenderung erlitten.

Um die Abhängigkeit des Werthes der Reduction auf unendlich kleine Bögen von den Werthen von ρ zu beweisen, mussten nicht nur Dräthe von verschiedenem Durchmesser und von demselben Metall gebraucht werden, sondern das Metall, aus dem sie gefertigt worden,

musste auch soviel wie möglich dieselbe Beschaffenheit haben: denn die Härte des Metalls, welche durch die Bearbeitung hervorgebracht wird, hat einen sehr grossen Einfluss auf jenen Reductionscoefficienten. Ich suchte diese Gleichmässigkeit dadurch zu erreichen, dass ich die Dräthe, die ich verglich, beide stark glühte, wodurch sie beide sehr weich wurden, und so wohl ziemlich genau dieselbe Beschaffenheit erhielten. Beide Dräthe waren von rothem Kupfer und von gleicher Länge; der eine hatte einen Radius von 0,11776 eines Zolles, der andere einen Halbmesser von 0,07674.

Der erste gab: $\varkappa\rho \sqrt{\frac{1}{l}} = 0{,}002033$

Der andere: $\varkappa\rho \sqrt{\frac{1}{l}} = 0{,}001372$

Diese Werthe verhalten sich zu einander wie die Werthe von ρ *). Die Richtigkeit des Coefficienten ist also durch diese Versuche bewiesen.

Aehnliche Versuche wurden mit einem Stahldrath angestellt. Ich halte es für überflüssig, diese Versuche hier mit derselben Ausführlichkeit anzugeben; ich habe im Vorhergehenden nur zeigen wollen, welcher Genauigkeit dieser Gegenstand fähig ist, und wie sehr das Hauptresultat dieser Versuche, von denen sogleich die Rede sein wird, begründet ist. Der Stahldrath hatte einen Radius von 0,072203 des engl. Zolls; er gab:

$$\varkappa = 0{,}007122$$

Dieser Werth ist von dem vorhergehenden für das Kupfer ausserordentlich verschieden. Man sieht hieraus deutlich, dass der Widerstand der Luft nicht daran Schuld sein kann, dass die Schwingungen nicht isochron sind, sondern dass eine in der individuellen Natur jedes Metalls begründete Eigenschaft derselben die Ursache davon sein muss. Es scheint, dass sich die kleinsten Theilchen der Metalle bis zu einem gewissen Grade übereinander wegschieben können, so wie die Flüssigkeiten; deshalb schlage ich vor, den Coefficienten $\varkappa$ den Flüssigkeitscoefficient der Metalle zu nennen, indem man die Metalle, bei denen dieser Coefficient sehr gross ist, mit sehr dicken Flüssigkeiten vergleichen kann. Man sieht leicht ein, dass diese Eigenschaft der Metalle einen bedeutenden Einfluss auf die Dauer ihrer Drehungsschwingungen ausüben muss; Dräthe, die diese Eigenschaft in einem hohen Grade besitzen, müssen verhältnissmässig langsamer schwingen, wenn sie sich drehend schwingen, als wenn sie solche Schwingungen ausführen, wo die Metallfibern sich bloss wechselseitig ausdehnen und zusammenziehen ohne über einander wegzuglitschen, wie z. B. bei den Transversalschwingungen; diese Metalle müssen also einen sehr verschiedenen Elasticitätscoefficienten geben, je nachdem man denselben durch Torsionsschwingungen, oder durch Transversalschwingungen bestimmt;

*) Der erste dieser Werthe giebt:

$$\varkappa = 0{,}2365$$

der zweite:

$$\varkappa = 0{,}2450$$

Man sieht, um wieviel der Werth von $\varkappa$ bei dem geglühten Kupferdrath grösser ist, als beim ungeglühten.

und dieser Unterschied muss desto grösser sein, je grösser der Unterschied zwischen den Flüssigkeitscoefficienten der beiden Metalle ist.

Setzt man die oben für den dicken Kupferdrath gefundenen Werthe der Schwingungszeiten A, A_1 in die Formel

$$n = \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{r^2 - r_1^2}{(A^2 - A_1^2)}$$

so findet man:

$$n = 11{,}5663$$

und da

$$\delta = \frac{\rho^4}{5nl}$$

$$\delta = 0{,}0000000187048$$

Hier ist δ der gesuchte Ausdehnungscoefficient, d. h. die Ausdehnung, die ein Cylinder von 1 Höhe und 1 Radius, durch ein der Einheit gleiches Gewicht, erleidet.

Als ich den elastischen Ausdehnungscoefficienten desselben Drathes aus Transversalschwingungen bestimmte, fand ich:

$$\delta = 0{,}000000013525$$

Das ist nur wenig mehr, als $^2/_3$ des obigen Werthes. Der Stahldrath, von dem oben die Rede gewesen ist, und dessen Flüssigkeitscoefficient so gering ist, gab

Durch Torsionsschwingungen:

$$\delta = 0{,}000000009845$$

Durch Transversalschwingungen:

$$\delta = 0{,}000000009805$$

Diese beiden Werthe sind nur wenig von einander verschieden.

Ich könnte noch mehrere ähnliche Beispiele anführen, aber die angegebenen werden hinreichen, zu zeigen, welche Rolle der Coefficient $\varkappa$ in den Torsionsschwingungen spielt.

Wenn nun der Coefficient $\varkappa$ den elastischen Ausdehnungscoefficienten einiger Metalle so sehr zu vermehren im Stande ist, so erklärt es sich von selbst, warum der Einfluss der Temperatur auf die Schwingungszeiten drehender Dräthe, bei gewissen Metallen, viel grösser ist, als bei den Transversalschwingungen derselben Dräthe; es ist also nicht hinreichend, den Einfluss der Temperatur auf Transversalschwingungen allein zu beobachten, sondern dieser Einfluss auf drehende Schwingungen muss noch besonders bestimmt werden, was denn auch in Folgendem geschehen ist.



Einfluss der Temperatur auf die elastische Kraft der festen Körper.

Die Wärme kann auf zweierlei Art auf die elastischen Körper wirken; die Elasticität kann sich verändern, während der Einwirkung der Wärme, und wieder auf ihren früheren Werth zurückkommen, sobald die Wärmeerhöhung anfgehört hat; sie kann aber auch, nachdem die Wärme wieder aufgehört hat zu wirken, und die Temperatur wieder auf ihren früheren Stand zurückgekehrt ist, dennoch eine bleibende Veränderung zeigen. Diese beiden Arten der Wärmeeinwirkung sollen in dem Folgenden besonders untersucht werden. Beide Arten der Einwirkung, besonders aber die erste, erfordern eine Beobachtungsmethode, die sehr kleine Unterschiede nicht nur bemerkbar, sondern auch messbar macht; die Transversalschwingungen verticaler Stäbe mit angeklemtem Gewichte, so dass das Gewicht nach oben gerichtet ist, geben uns ein treffliches Mittel dazu an die Hand. Wenn das freie Ende mit dem Gewicht nach oben gerichtet ist, so ist, wie wir in der Einleitung gesehen haben, die oscillirende Kraft der Differenz der Elasticität und der Schwere proportional; da nun die Wärme auf die Schwerkraft keinen Einfluss hat, und nur durch Vergrösserung der Dimensionen das Trägheitsmoment ein klein wenig ändert, die elastische Kraft aber bei Erhöhung der Temperatur bedeutend abnimmt, so sieht man leicht ein, dass wenn die Differenz zwischen Schwerkraft und Elasticität eine sehr geringe ist, dieselbe sich dabei in einem sehr starken Verhältniss ändern kann.

In der That bemerkt man in diesem Falle, dass die Schwingungsdauer sich schon bei geringen Temperaturerhöhungen bedeutend ändert; diese Aenderungen können also mit grosser Sicherheit beobachtet werden. Um dahin zu gelangen, braucht man nur den Stab so lang zu nehmen, oder ein so grosses Gewicht an das Ende desselben anzuklemmen, dass seine Schwingungen sehr langsam werden, und dann denselben abwechselnd in der Kälte und in der Wärme, oder auch vor und nach der Erwärmung schwingen zu lassen, je nachdem man die erste oder die zweite Art der Einwirkung der Wärme auf die Elasticität studiren will.

Die Beobachtungsmethode bestand also darin, dass prismatische Stäbe oder Dräthe von verschiedenen Metallen an einem Ende zwischen zwei viereckigen starken, gusseisernen Platten,

vermittelst starker Schrauben geklemmt wurden (siehe die Tafel II, Fig. 3); dann wurde der Apparat so gestellt, dass der Stab oder der Drath senkrecht stand, mit dem freien Ende nach oben. In dieser Stellung wurden die gusseisernen Platten in einen besonderen Klemmapparat eingeschoben, welcher sehr schwer war und 3 Fussschrauben hatte, so dass man den Stab vollkommen senkrecht stellen konnte. Nun wurde aus einer Reihe von Gewichten (siehe Fig. 4), die allmählig von $\frac{1}{2}$ bis 10 Pfund steigen, dasjenige ausgesucht, welches, an das freie Ende des Stabes geklemmt, die langsamsten Schwingungen gab, ohne den Stab zum Ueberschlagen zu bringen. Der ganze Apparat war in einem sehr geräumigen Kasten aufgestellt; dieser Kasten konnte abwechselnd mit dem Beobachtungszimmer und mit der Strasse in Verbindung gesetzt werden, so dass er sich (im Winter) bald mit warmer, bald mit kalter Luft füllte; die Temperatur erhielt sich fast immer mehr als eine Stunde vollkommen auf demselben Stand, wenn man die Verbindung lange genug (d. h. mehrere Stunden) hatte fortwähren lassen. Um die Schwingungen vom geheizten Zimmer aus beobachten zu können, hatte der Kasten an einer Seite Fenster mit doppelten Spiegelgläsern. In einer Entfernung von etwa 15 Fuss von dem Apparat, dem genannten Fenster gegenüber, war ein kleines tragbares Passageinstrument aufgestellt, dessen Fernrohr sich in einer Verticalebene bewegte; Klemmapparat und Passageinstrument hatten eine solche gegenseitige Lage, dass sich der Stab seiner grössten Breite nach in der Verticalebene des Fernrohrs befand, im Fernrohr also nur seine schmale Seite sichtbar war, welche vom verticalen Faden des Fernrohrs halbirt wurde; geschah diess in der ganzen Länge des Stabes, so stand der Stab richtig, d. h. senkrecht; eine geringe Abweichung von dieser senkrechten Lage wurde sogleich merklich, weil das Gewicht sich alsdann auf die eine Seite hinneigte, welches sorgfältig vermieden wurde. Ich brauche wohl nicht zu sagen, dass die Gewichte immer so angeklemmt wurden, dass ihr Schwerpunct so genau als möglich mit der Längenaxe des Stabes zusammenfiel. Ein dreieckigter, vorn offener Kasten schützte den Stab vor dem Winde, der oft zum offenen Fenster eindrang (siehe Fig. 2). Um nun die Transversalschwingungen des Stabes zu beobachten, wurde an das Ende desselben eine gradlinigte Theilung (halbe Linien) horizontal befestigt, so dass sie in der Schwingungsebene lag; auf diese Theilung wurde das Fernrohr gerichtet, und der verticale Faden des letztern auf die mittlere Linie der Theilung eingestellt; diese mittlere Linie halbirte gerade die schmale dem Fernrohr zugewandte Seite des Stabes. Wurde nun das obere freie Ende des Stabes abgelenkt, so machte er Schwingungen, und die Theilung ging von rechts nach links, und dann wieder von links nach rechts durch das Feld des Fernrohrs; dabei ging der Faden des Fernrohrs, sobald der Stab seine grösste Elongation erreicht hatte, durch irgend einen Theilstrich, den man leicht beobachten konnte, links oder rechts von der Mittellinie; die Entfernung dieser Theilstriche von der Mittellinie gab offenbar ein Maass der Schwingungsweite. In den folgenden Tabellen muss man unter Elongation eben diese Entfernung (in halben Linien ausgedrückt) des Theilstrichs von der Mittellinie verstehen. Die Schwingungen dauerten zu kurze Zeit, als dass es möglich gewesen wäre, die Reduction auf unendlich kleine Schwingungen aus den Beobachtungen selbst abzuleiten; man fing deshalb immer, in der Wärme sowohl als in der Kälte, mit

derselben Schwingungsweite an, und setzte die Beobachtung fort, bis sie sich auf dieselbe Grösse vermindert hatte; es lässt sich also annehmen, dass die Reduction auf unendlich kleine Schwingungen für beide Beobachtungen dieselbe war, so dass sie aus dem Endresultat, dem Quotient der Kräfte, verschwindet.

Nachdem die Schwingungsdauer des Stabes, in aufrechter Stellung (das Gewicht oben), in beiden Temperaturen beobachtet worden war, wurde er mit sammt den gusseisernen Platten aus dem Klemmapparat herausgenommen, dieser auf einen hohen, festen, dreifüssigen Tisch gestellt, welcher in der Mitte eine Oeffnung hatte, durch welche man den Stab durchstecken konnte, und nun die gusseisernen Platten in solcher Lage eingeklemmt, dass der Stab wieder eine senkrechte Stellung hatte, aber mit dem freien Ende und dem Gewicht nach unten gerichtet. Er wurde nun wieder vermittelst des Passageinstruments recht genau senkrecht gestellt, und nun beobachtete man wieder die Dauer seiner Schwingungen. Da die Wärme nur einen ganz unbedeutenden Einfluss auf diese Dauer hat, so wurde diese Beobachtung nur in der gewöhnlichen Temperatur gemacht.

Es sei nun, wie oben, t_1 die Dauer einer Schwingung in der höhern Temperatur (hier bei der Temperatur des Zimmers), t_1' dieselbe Dauer bei der niedrigeren, beide bei aufrechter Stellung des Stabes (das freie Ende oben); ferner t die Dauer einer Schwingung, wenn das freie Ende sich unten befindet, so haben wir, da im Allgemeinen:

$$\delta' = \frac{9}{2} \cdot \frac{l}{ab^3} \cdot \frac{(t_1^2 + t^2)}{(t_1^2 - t^2)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{l}}$$

und sich die Werthe von t, l, a, b, λ und l nur ganz unbedeutend ändern, wenn die Temperatur sich ändert:

$$\beta\,(\theta - \theta') = \frac{(t_1'^2 + t^2)}{(t_1'^2 - t^2)} \cdot \frac{(t_1^2 - t^2)}{(t_1^2 + t^2)} - 1$$

wo θ, θ' die höhere und niedrigere Temperatur bedeuten, β aber der Coefficient des Einflusses der Temperatur auf die elastische Kraft des Stabes ist, so dass, wenn man diese bei der niedrigern Temperatur der Einheit gleich setzt, sie bei der höheren $= 1 - \beta\,(\theta' - \theta)$ wird.

Um die Einwirkung vorübergehender Erwärmung zu studiren, wurde die Schwingungsdauer des zu untersuchenden Stabes eben so beobachtet; dann wurde derselbe, ohne ihn aus den gusseisernen Platten herauszunehmen*) (mit Ausnahme einiger Versuche, wo der Stab sehr lang war, und sehr hohe Temperaturen angewendet wurden, wo also die Einwirkung der Wärme sehr gross war), mehr oder weniger stark erhitzt, und die Dauer seiner Schwingungen nach völliger Erkaltung nochmals beobachtet.

---

*) Diese Vorsichtsmaassregel ist sehr nöthig, wenn der Stab nicht sehr lang ist, weil alsdann die geringste Aenderung in der Entfernung des Klemmpunctes vom Schwerpunct des Gewichts eine bedeutende Aenderung in der Schwingungsdauer t_1 hervorbringen kann.



Beobachtungen über den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität der Metalle.

Silber.

Dicke des Stabes 0,114
Breite des Stabes 0,895
Länge vom fixirten Puncte bis zum Klemmpuncte . . 44,5
Approximativer Werth von δ' 0,00000008038

A. Gewicht nach oben gekehrt:

	In der Wärme		In der Kälte.	
	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 13,6	7″,0000	— 0,6	5″,8000
	13,8	7,0500	— 0,5	5,8070
	13,8	7,0400	— 0,7	5,7708
Mittel	+ 13,7	7″,0300 (t_1)	— 0,6	5″,7926 (t_1')

Gewicht nach unten gerichtet:

In der Wärme.	In der Kälte.
0″,66181 (t)	0″,66059 (t')

Berechnet man nach der Formel:

$$\beta\,(\theta - \delta') = \frac{(t_1'^2 + t'^2)}{(t_1'^2 - t'^2)} \cdot \frac{(t_1^2 - t^2)}{(t_1^2 + t^2)} - 1$$

so findet man:

$$\beta = 0{,}000582$$

Wäre der Werth von t in der Kälte nicht beobachtet worden, so hätten wir $t' = t =$ 0,66181 setzen müssen, und wir hätten gefunden:

$$\beta = 0{,}000589$$

Dieser Werth weicht sehr wenig vom obigen ab; es ist also unnöthig die Schwingungsdauer in der Kälte bei nach unten gekehrtem Gewichte zu beobachten.

B. Derselbe Stab wurde ein wenig kürzer genommen:

Gewicht nach oben:

	In der Wärme.		In der Kälte.	
	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 13,55	6″,900	+ 1,55	5″,860
		6,925	1,60	5,900
		6,900	1,60	5,875
		6,875		
Mittel	+ 13″,55	6″,900	+ 1,58	5″,912

Gewicht nach unten:

Schwingungsdauer in der Wärme . . . . . . 0",66143

woraus: $\beta = 0,000558.$

C. Der Stab wurde noch viel kürzer genommen, so dass die Entfernung vom Schwerpunt des Gewichts bis zum fixen Punct 31 Zoll betrug.

Da die Schwingungsdauer bedeutend mit der Amplitudo abnahm, so wurde mit derselben Amplitudo angefangen und mit derselben geendet, so dass man annehmen konnte, dass die Reduction auf unendlich kleine Bögen in allen Beobachtungen, die verglichen wurden, dieselbe blieb, also im Resultat so ziemlich vollständig verschwand.

Gewicht nach oben, 3,30 Pfund:

Grösste Amplitudo . . . . 3° 42'
Kleinste Amplitudo 11

	In der Wärme.		In der Kälte.	
	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 15,7	5",133	— 0,6	4,3468
		5,125	— 0,8	4,3594
		5,125	— 0,9	4,3583
	15,5	5,125		
Mittel	+ 15,6	5,1270	— 0,8	4",3548

Der Stab machte in der Wärme 30 Oscillationen von der grössten bis zur kleinsten Amplitudo, in der Kälte 62.

Diese Beobachtungen geben:

$$\beta = 0,000563$$

Wir haben also, im Mittel aus den drei gefundenen Werthen:

$$\beta = 0,000568$$

Messing.

Es wurden 9 verschiedene Messingstäbe untersucht; wir wollen sie mit 1, 2, 3, u. s. w. bezeichnen.

№ 1 war von geschlagenem Messing.
» 2 war von gegossenem Messing.
» 3 war von geschlagenem Messing.
» 4 war von gegossenem Messing.
» 5, » 6 } Hartgezogenes englisches Tafelmessing.

№ 7 war von gegossenem Messing.
» 8 war von demselben gegossenen Messing, aber stark gehämmert.
» 9 war von demselben gegossenen Messing, aber nach dem Hämmern noch gewalzt.

№ 7, 8, 9 waren aus demselben Gussstück verfertigt worden. Sie waren sehr genau von Repsold in Hamburg verfertigt worden, d. h. sie waren in ihrer ganzen Länge und Breite genau gleich oder vollkommene Parallelepipeda, so dass die aus den Versuchen abgeleiteten Werthe von δ' als sehr genau angesehen werden können.

Alle 9 hatten fast genau dieselbe Breite und Länge, waren aber von verschiedener Dicke. Die nachstehende Tabelle enthält die Dimensionen.

No.	Dicke.	Breite.	Länge.	Spec. Gew.
1	0,09713	0,99742	51,4340	8,5598
2	0,09642	0,99729	51,4330	8,2167
3	0,18648	0,99964	51,4370	8,4977
4	0,19029	0,99917	51,4390	8,2675
5	0,18224	0,98954	52,332	8,4465
6	0,09332	0,98100	52,314	8,4930
7	0,19109	0,99137	51,250	8,3089
8	dito	dito	dito	8,6045
9	dito	dito	dito	8,5746

Messingstab № 2.

Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Puncte 39,5 Zoll, Gewicht 1,8 Pf.

a. Gewicht nach oben:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 13,4	4″,8167	— 10,2	4″,1214
13,8	4,8033	10,2	4,1167

b. Gewicht nach unten:

$$1 \text{ Oscil.} = 0'',63012,$$

woraus:

$$\beta = 0{,}0005341$$
$$\beta = 0{,}0005217$$
$$\text{Mittel} = 0{,}0005279$$

Als der Stab noch kürzer gemacht wurde:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 15,5	3″,6200	— 10,5	3″,2660

Gewicht nach unten:

1 Oscil. = 0",6220

woraus: β = 0,0005231

Messingstab № 1.

a. Gewicht nach oben:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 15,60	11",0100	— 5,05	7",3630

b. Gewicht nach unten:

1 Oscil. = 0",6807

woraus: β = 0,0004596

Der Stab wurde etwas tiefer eingesteckt, so dass er kürzer wurde, dabei aber etwas an Gewicht zugegeben.

a. Gewicht nach unten:

1 Oscil. = 0",6764

b. Gewicht nach oben:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 13,7	12",0882 (40 Osc.)	— 11,4	7",0938 (45 Osc.)
	13,7	12,1575 (34 Osc.)	11,2	7,1000 (50 Osc.)
Mittel	+ 13,7	12",1229	— 11,3	7",0969

woraus: β = 0,00047956

Messingstab № 4.

1. Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Punct . . . 36,2684
Angeklemmtes Gewicht 12,32476

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 15,6	6",5000	— 2,1	5",2708
	15,9	6,5391	2,0	5,2698
	14,5	6,4455		
Mittel	+ 15,33		— 2,05	5",2703

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0",61864

woraus: β = 0,00054421

2. Länge des schwingenden Theils des Stabes 47,8063
Gewicht desselben 2,9890
Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Punct . . . 47,5594
Angeklemmtes Gewicht 6,35629
Eignes Inertsmoment des Gewichts 18,351

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 15,6	2,"9928	+ 0,5	2,"8821
	14,0	2,9768	— 3,4	2,8547
Mittel	+ 14,80	2,"9848	— 1,45	2,"8684

b. Gewicht nach unten gerichtet:

$$1 \text{ Oscil.} = 0,''682521$$

woraus:

$$\beta = 0,0005368$$

Man findet aus der in der Einleitung angegebenen Formel:

$$\delta' = 0,0000000767831$$

Messingstab № 3.

Länge des schwingenden Theils des Stabes 47,3785
Gewicht desselben 2,99986
Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Punct 47,1316
Angeklemmtes Gewicht 9,29767
Eignes Inertsmoment des Gewichts 41,840

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 10,9	6,"2760 (135 Osc.)	+ 12,5	8,"3796 (40 Osc.)
	9,9	6,3384 (133 Osc.)	12,5	8,4000 (54 Osc.)
Mittel	— 10,4	6,"3072	+ 12,5	8,"3898

b. Gewicht nach unten gerichtet:

$$1 \text{ Oscil.} = 0,''7019704$$

woraus:

$$\beta = 0,00047306$$

Man findet auch, nach der Formel der Einleitung:

$$\delta' = 0,000000057545$$

Man sieht, dass der Werth von β für geschlagenes Messing entschieden kleiner ist, als für gegossenes; man hat im Mittel:

für geschlagenes Messing $\beta = 0{,}0004708$
für gegossenes » $\beta = 0{,}0005330$

Dabei ist der Werth von β grösser, wenn der von δ' grösser ist; mit dem specifischen Gewicht aber stehen beide Werthe im umgekehrten Verhältniss.

Hartgezogenes englisches Tafelmessing № 5.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 12,10	1″,97308 (650 Osc.)	— 7,6	1″,92929 (700 Osc.)
	13,15	1,97461 (650 Osc.)		
Mittel	+ 12,625	1″,97385		

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,66583

woraus: $\beta = 0{,}0005363$

Hartgezogenes englisches Tafelmessing № 6 (andere Sorte).

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 11,1	4″,5458 (120 Osc.)	+ 14,0	5″,3062
	10,9	4,5417 (120 Osc.)	14,0	5,3063
Mittel	— 11,0	4″,54375	+ 14,0	5″,30625

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,67625

woraus: $\beta = 0{,}00047566$

Stab № 7. Von gegossenem Messing.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 12,05	4″,9687 (160 Osc.)	— 14,2	4″,2925 (200 Osc.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,6925 (1000 Oscil.)

woraus: $\beta = 0{,}0005067$

Ein zweiter Versuch gab:

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 14,1	3″,3850 (200 Osc.)	— 12,7	3″,1420 (2500 Osc.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0,″6920 (1000 Oscil.)

woraus: $\beta = 0{,}0005055$

Stab № 8. Von demselben, aber vorher sehr stark gehämmerten Messing.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 15,8	2,″6550 (400 Osc.)	− 7,9	2,″5481 (400 Osc.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0,″68175 (2000 Oscil.)

woraus: $\beta = 0{,}0004813$

Platina.

Dicke des Stabes	0,193
Breite des Stabes	0,875
Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Punct .	49,4865
Gewicht.	12,32

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 13,15	7,″5764	− 1,0	7,0365

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0,″714593

woraus: $\beta = 0{,}00020074$

Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Punct, dieselbe.
Gewicht 9,30

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 13,4	1,″8750	− 3,8	1,″8625

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0,″6673

woraus: $\beta = 0{,}00020145$

Für einen Platinadrath fand ich:

$\delta' = 0{,}000000039867$

Spiegelglas.

Breite	1,00	sehr ungleich.
Dicke	0,15	
Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Ende	32,853	
Angeklemmtes Gewicht	6,25	

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 11,3	3",9000	— 8,0	3",7917
		— 12,3	3,7750
		— 4,8	3,8167

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0",56871.

Aus den beiden Beobachtungen, die den grössten Temperaturunterschied geben, findet man:

$$\beta = 0,00012389.$$

Mit einem kleineren Gewicht erhielt ich folgende Resultate:

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 12,4	1",6650	— 6,3	1",6583
	13,7	1,6659	— 3,9	1,6589
Mittel	+ 13,6	1",6655	— 5,1	1",6586

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0",61605

woraus: $\beta = 0,0001245.$

Gusseisen.

Gusseisen (№ 4) Spec. Gew. 7,130.

Länge des schwingenden Theils	45,7295
Breite	0,99662
Dicke	0,20675
Gewicht	2,68483
Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Puncte	45,4848
Gewicht	12,32476
Eignes Inertsmoment des Gewichts	60,183

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Die Schwingungen nahmen sehr rasch ab, rascher als bei allen bisher behandelten Metallen, besonders in der höheren Temperatur, bei welcher nicht mehr als 36 Schwingungen beobachtet werden konnten.

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 3,6	2,″1666	+ 13,2	2,″3529
	— 3,6	2,1528		
Mittel	— 3,6	2,″1597		

b. Gewicht nach unten gerichtet:

$$1 \text{ Oscil.} = 0,''66875$$

woraus:

$$\beta = 0,0018399$$

$$\delta' = 0,000000056422$$

Gusseisen № 3, halb so dick, sonst dieselben Dimensionen. Spec. Gew. 7,124

Angeklemmtes Gewicht 9,30

Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Ende . 47,1264

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 8,7	1,″4545 (44 Osc.)	+ 12,5	1,″5500 (40 Osc.)
		1,4688 (48 Osc.)		1,5521 (48 Osc.)
		1,4712 (52 Osc.)		
Mittel		1,″4648		1,″5511

b. Gewicht nach unten gerichtet:

$$1 \text{ Oscil.} = 0,''640625$$

woraus:

$$\beta = 0,0019267$$

Zweiter Versuch, mit geringen Abänderungen.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 3,3	1,″6705 (44 Osc.)	+ 13,5	1,″7500 (44 Osc.)
		1,6667 (48 Osc.)	13,8	1,7500 (44 Osc.)
Mittel	— 3,3	1,″6686	+ 13,65	1,″7500

b. Gewicht nach unten gerichtet:

$$1 \text{ Oscil.} = 0,''6375$$

woraus:

$$\beta = 0,001618$$

Stahl.

Stahl № 5, gewalzt, weich. (Derselbe Stahl, von dem in der Einleitung die Rede war.)

Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Ende . . 48,06
Angeklemmtes Gewicht 1,817
Specifisches Gewicht 7,83

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temperatur am Anfang — 8,5
» am Ende — 8,7
Mittel — 8,6

Barometerstand: 30,58 bei 13,3° R.

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
30	(0) 12′ 16″,0	7,5	(500) 25′ 19″,0		(1000) —
25	(50) 13 34,0	6,8	(550) 26 37,0	2,1	(1050) 39′ 40″,0
21	(100) 14 52,5	6,0	(600) 27 55,5	2,0	(1100) 40 58,0
18	(150) 16 11,0	5,2	(650) 29 13,5	1,7	(1150) 42 16,5
16	(200) 17 29,0	4,8	(700) 30 32,0	1,5	(1200) 43 34,5
14	(250) 18 47,5	4,2	(750) 31 50,0	1,3	(1250) 44 52,5
12	(300) 20 5,5	3,9	(800) 33 8,5	1,1	(1300) 46 11,0
11	(350) 21 24,0	3,4	(850) 34 26,5	1,0	(1350) 47 29,5
9,5	(400) 22 42,5	3,0	(900) 35 45,0		
8,5	(450) 24 0,8	2,8	(950) 37 3,0		

1350 Oscillationen in 35′ 13″,5
1 Oscil. = 1″,56556

Temperatur am Anfang + 12,10
» am Ende + 12,20
Mittel + 12,15

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
30,0	(0) 55′ 4″,5	8,0	(250) 1′ 40″,0	2,5	(500) 8′ 15″,5
22,0	(50) 56 23,5	6,0	(300) 2 59,5	2,0	(550) 9 34,5
17,0	(100) 57 43,0	5,0	(350) 4 18,5	1,5	(600) 10 53,5
13,2	(150) 59 2,0		(400) 5 37,5	1,1	(650) 12 12,5
10,0	(200) 0 21,0	3,0	(450) 6 56,5	1,0	(700) 13 32,0

700 Oscil. in 18′ 27″5

1 Oscil. = 1″,58214

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1500 Oscil. in 15′ 59″,5

1 Oscil. = 0″,639667

woraus: $\beta = 0{,}00034446$

Derselbe Stab mit einem Gewicht von ungefähr 3 Pfund.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 15,35	7″,1850	+ 13,7	11″,0166
	— 15,35	7,1875	+ 13,6	10,9688
	— 15,70	7,1888		
Mittel	— 15,47	7″,1871	+ 13,65	10″,9927

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,67808

woraus: $\beta = 0{,}00035097$

Wir fanden in der Einleitung:

$\delta' = 0{,}00000002960$

Englischer Schmiedestahl № 15 mit einem Gewicht von beiläufig 15 Pfund.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.		Temp.	Schwingungsdauer.
— 13,90	2″,2892 (600 Osc.)		+ 13,6	2″,34625
			+ 13,5	2,34375
		Mittel	+ 13,55	2″,34500

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,6950

woraus: $\beta = 0{,}0003198$

Weicher Gussstahl № 6.

Breite 0,99430
Dicke 0,09583
Entfernung des Schwerpuncts des Gewichts vom fixen Puncte . 49,200
Gewicht 1,8173

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
— 11,7	3,″2733 (450 Osc.)	+ 14,1	3,″4000 (300 Osc.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0,″6935

woraus: $\beta = 0{,}00025582$

Derselbe Stab von weichem Gussstahl № 6 wurde tiefer eingesteckt, so dass die Länge des schwingenden Theils des Stabes 34,845 betrug.

Entfernung der fixen Puncte vom weichsten Ende . 17,5000
Gewicht 4,06

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temperatur am Anfang + 13,50
» am Ende + 13,50
Barometer 30,38

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
28	(0) 15′41″	7	(250) 25′39,″0	2,5	(500) 35′36,″5
21	(10) 17 40,5	6	(300) 27 38,5	2,0	(550) 37 . . . .
15	(100) 19 40,5	5	(350) 29 38,0	1,8	(600) 39 35,0
12	(150) 21 40,0	4	(400) 31 37,5	1,5	(650) 41 34,5
9	(200) 23 39,5	3,5	(450) 33 37,0	1,0	(700) 43 34,0

700 Oscil. in 1673,″0
1 Oscil. = 2,″3900

Temperatur am Anfang — 11,0
» am Ende — 10,3
Barometer 30,14

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
35,0	(0) 32′ 3,″5	10	(300) 43′42,″5	3,0	(600) 55′22,″5
. . .	(50) 34 0,0	8	(350) 45 39,0	2,5	(650) 57 19,0
21	(100) 35 56,5	. . .	(400) 47 36,5	2,0	(700) 59 15,5
16	(150) 37 53,0	4,5	(450) 49 32,5	. . .	(750) . . . . . .
13	(200) 39 50,0	4,0	(500) 51 29,0	1,3	(800) 3 8,5
12	(250) 41 46,0	3,5	(550) 53 26,0	1,0	(850) 5 5,0

850 Oscil. in 1981″,5

1 Oscil. = 2″,3312

Temperatur am Anfang — 9,9

» am Ende — 9,6

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
31	(0) 26′ 54″,0	7,0	(350) 40′ 30″,5	2,5	(700) 54′ 7″,5
24	(50) 28 50,5	5,8	(400) 42 27,5	2,0	(750) 56 4,0
19	(100) 30 47,0	5,0	(450) 44 24,0	1,8	(800) 58 1,0
15	(150) 32 43,5	4,0	(500) 46 20,5	1,4	(850) 59 57,0
12	(200) 34 40,5	3,5	(550) 48 17,5	1,4	(900) 1 54,0
10	(250) 36 37,5	3,0	(600) 50 14,0	1,0	(950) 3 50,5
8,2	(300) 38 34,0	3,0	(650) 52 10,5		

950 Oscil. in 2216″,5

1 Oscil. = 2″,3433

b. Gewicht nach unten gerichtet:

3050 Oscil. in 1782″,5

1 Oscil. = 0″,58442

woraus: $\beta = 0,0002310$

Derselbe weiche Gussstahl № 6 länger herausgezogen, so dass die Länge des schwingenden Theils 36,194 betrug, und mit einem um 0,103 vermehrten Gewicht, gab folgende Resultate:

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temperatur am Anfang + 13,8

» am Ende + 13,6

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
26,0	(0) 0′ 15″,0	8,5	(80) 8′ 20″,0	2,0	(160) 16′ 25″,0
18	(20) 2 16,0	6,0	(100) 10 21,0	2,0	(180) 18 26,0
13	(40) 4 17,0	4,5	(120) 12 22,5	2,0	(200) 20 28,0
10	(60) 6 18,5	2,3	(140) 14 23,5		

200 Oscil. in 1213″,0

1 Oscil. = 6″,0650

Temperatur am Anfang — 10,2
» am Ende — 10,2

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
30	(0) 8′ 25″,5	11	(80) 15′ 34″,5		(160) 22′ 43″,5
23	(20) 10 12,5	8	(100)		(180) 24 31,0
14	(40) 12 0,0		(120) 19 9,0		(200) 26 18,0
14	(60) 13 47,5		(140) 20 56,5		

200 Oscil. in 1072″,5

1 Oscil. 5″,3625

b. Gewicht nach unten gerichtet:

4000 Oscil. in 2445″,0

1 Oscil. = 0″,61125

woraus: $\beta = 0{,}00023900$

also im Mittel: $\beta = 0{,}0002350$

Durch eine Reihe sorgfältiger Versuche wurde der Werth von δ', sowohl vermittelst Querschwingungen als durch Flexion bestimmt und gefunden:

$$\delta' = 0{,}000000030106$$

Weicher Gussstahl № 7 (andere Sorte).

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 13,75	9″,3000 (45 Osc.)	— 13,4	7″,1357 (70 Osc.)
	+ 13,80	9,2750	— 13,4	7,1500 (80 Osc.)
Mittel	+ 13,78	9″,2875	— 13,4	7″,1429

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,7110

woraus: $\beta = 0{,}00029882$

Englischer Schmiedestahl № 14.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temperatur am Anfang — 13,9
» am Ende — 14,2

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
28,0	(0) 0′27″,0	8,5	(140) 12′49″,5	3,0	(280) 25′ 1″,0
23,0	(20) 2 11,5	7,5	(160) 14 34,0	2,5	(300) 26 45,0
19,0	(40) 3 56,0	6,0	(180) 16 18,5	2,0	(320) 28 29,5
16,0	(60) 5 40,5	5,2	(200) 18 3,0	2,0	(340) 30 14,0
14,0	(80) 7 25,0	4,5	(220) 19 47,3	...	(360) ......
12,0	(100) 9 10,0	4,0	(240) 21 32,0	1,5	(380) 33 42,5
10,0	(120) 10 54,5	3,8	(260) 23 16,5	1,0	(400) 35 27,0

400 Oscil. in 35′ 00″,0

1 Oscil. = 5″,2500 bei — 14,05

Temperatur am Anfang + 15,4
» am Ende + 15,3

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
26,0	(0) 51′31″,0	7,0	(100) 1′24″,5	2,2	(200) 11′17″,0
19,0	(20) 53 29,5	5,5	(120) 3 23,0	2,0	(220) 13 15,8
15,0	(40) 55 28,5	4,2	(140) 5 21,5	2,0	(240) 15 14,5
11,5	(60) 57 27,0	3,0	(160) 7 20,0	1,5	(260) 17 12,0
9,0	(80) 59 25,5	2,5	(180) 9 18,5	1,0	

260 Oscil. in 25′ 41″,0

1 Oscil. = 5″,9280 bei + 15,35

b. Gewicht nach unten gerichtet:

3000 Oscil. in 34′ 34″,5

1 Oscil. = 0″,6915

woraus: $\beta = 0{,}0002555$

Man sieht, dass der Werth von β für verschiedene Stahlsorten ziemlich verschieden ausfällt.

Eisen.

Schwedisches Schmiedeeisen № 10.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 12,95	1″,4800 (400 Osc.)	— 0,1	1″,4690 (500 Osc.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,644995

woraus: β = 0,0004555

Englisches gewalztes Bandeisen № 12.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 12,4	2″,8050 (300 Osc.)	+ 13,5	2″,9450 (100 Osc.)
	— 12,1	2,8040 (250 Osc.)	+ 13,6	2,9400 (50 Osc.)
Mittel	— 12,25	2″,8045	+ 13,55	2″,9425

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. 0″,69575

woraus: β = 0,00044158

Englisches gewalztes Bandeisen № 13.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
— 3,4	5″,9667 (60 Osc.)	+ 15,2	7″,2155 (30 Osc.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0,69475 (2000 Oscil.)

woraus: β = 0,0004625

Englisches Schmiedeeisen № 9.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 13,4	2″,3375 (200 Osc.)	— 9,3	2″,2850
	+ 13,1	2,3390 (200 Osc.)	— 9,15	2,2840
Mittel	+ 13,35	2″,3383	— 9,23	2″,2845



b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,6940 (2000 Oscil.)

woraus: $\beta = 0{,}00037607$

Stab von gewalztem Eisenblech № 1, der Breite der Walzung nach ausgeschnitten.

Breite ein Zoll.
Dicke zwei Drittheil einer Linie.
Länge des schwingenden Theils . . 32,240
Angeklemmtes Gewicht 1,75384

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 14,95	5″,0939 (80 Osc.)	— 7,35	4″,4750 (100 Osc.)
+ 14,90	5,0900 (80 Osc.)		
Mittel + 14,93	5″,0920		

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,5815 (1000 Oscil.)

woraus: $\beta = 0{,}0003533$

Stab von gewalztem Eisenblech № 2, der Länge der Walzung nach herausgeschnitten.

Breite 1 Zoll.
Dicke wie oben.
Länge des vibrirenden Theils. . . . 34,50
Gewicht. 1,1680

a. Gewicht nach oben gerichtet:

I. Temp. am Anfang — 15,0 » am Ende — 15,0		II. Temp. am Anfang — 15,0 » am Ende — 14,8		III. Temp. am Anfang + 15,1 » am Ende + 15,2		IV. Temp. am Anfang + 15,2 » am Ende + 15,2	
Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
15,0	(0) 9′ 25″,0	19,0	(0) 33′ 14″,5	19	(0) 33′ 33″,0	20	(0) 46′ 23″,0
10,0	(100) 12 15,0	11,0	(100) 36 4,5	7	(100) 36 28,5	8	(100) 49 18,5
6,0	(200) 15 5,5	7,0	(200) 38 55,0	3	(200) 39 24,0	3,2	(200) 52 14,0
4,5	(300) 17 55,5	5,0	(300) 41 45,0	1,5	(300) 42 19,0	1,5	(300) 55 9,0
	(400) 20 45,5	3,5	(400) 44 35,0	0,9	(400) 45 14,0	0,9	(400) 58 4,0
	(500) 23 35,5	3,0	(500) 47 25,5				
	(600) 26 25,5	2,0	(600) 50 15,5				
	(700) 29 15,5	1,5	(700) 53 5,5				
	(800) 32 6,0	1,2	(800) 55 55,5				

I.	800 Oscil. in	22′ 41″,0	bei	— 15,00
II.	800 Oscil. in	22 41,0	bei	— 14,90
Mittel	800 Oscil. in	22′ 41″,0	bei	— 14,95

1 Oscil. = 1″,70125

III.	400 Oscil. in	11′ 41″,0	bei	+ 15,15
IV.	400 Oscil. in	11 41,0	bei	+ 15,20
Mittel	400 Oscil. in	11′ 41″,0	bei	+ 15,18

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1000 Oscil. in 9′ 22″,5

1 Oscil. = 0″,56250

woraus: $\beta = 0{,}0004252$

Durch sorgfältig angestellte Beobachtungen über die Dauer von Transversalschwingungen, bei verschiedenen Belastungen, fand ich:

In dem Eisenblech № 1 ... $\delta' = 0{,}000000036012$
» » » № 2 ... $\delta' = 0{,}000000033151$

Rothes Kupfer.

Stab von gewalztem Kupfer, roh gearbeitet, von 1 Zoll Breite, 1½ Linien Dicke und 52 Zoll Länge.

Entfernung vom fixen Punct bis zum Schwerpunct des Gewichts 48,6
Gewicht 9,3

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 13,05	1″,5800 (400 Osc.)	— 8,0	1″,5544 (450 Osc.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,6535

woraus: $\beta = 0{,}00055995$

Derselbe Stab mit einem Gewicht von 12,3 Pfund.

a. Das Gewicht nach oben gerichtet:

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 6,75	3,2938 (160 Osc.)	+ 14,0	3,5313
	— 6,70	3,3043 (138 Osc.)		3,5250
Mittel	— 6,725	3,2991	+ 14,0	3,5282

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0,7025

woraus: $\beta = 0,00055394$

Zink.

Stab von gewalztem Zink, roh bearbeitet, 1 Zoll breit, 1½ Linien dick.

Entfernung des fixen Punctes vom Mittelpunct des Gewichts 32 Zoll.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Die Schwingungsbögen nehmen sehr rasch ab, so dass die nachstehenden Werthe keine grosse Genauigkeit haben konnten.

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	— 12,3	1,0600 (200 Osc.)	+ 13,6	1,0800
	— 12,3	1,0600 (100 Osc.)	+ 13,9	1,0850
			+ 13,9	1,0780
			+ 13,9	1,0750
Mittel	— 12,3	1,0600	+ 13,8	1,0785

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. 0,5110

woraus: $\beta = 0,0006444$

Gold.

Ein Stab von reinem Golde (so rein als man es aus der Münze haben kann), von beiläufig 45¾ Zoll Länge, 1 Zoll Breite und 1 Linie Dicke, gab ohne Gewicht folgende Resultate:

− 15°,3		+ 15°,3	
Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
16,0	(0) 3′ 39″,0	17,0	(0) 0′ 35″,0
13,0	(50) 5 22,5	13,0	(50) 2 23,0
11,0	(100) 7 6,5	9,0	(100) 4 11,0
9,0	(150) 8 50,5	7,0	(150) 5 58,5
7,0	(200) 10 34,5	5,0	(200) 7 46,5
5,5	(250) 12 18,5	4,0	(250) 9 4,5
4,5	(300) 14 2,5	3,1	(300) 11 22,0
4,0	(350) 15 46,0	2,5	(350) 13 10,0
3,0	(400) 17 30,0	2,0	(400) 14 58,0
2,5	(450) 19 14,0	1,4	(450) 16 45,5
2,0	(500) 20 53,5	1,0	(500) 18 33,5
1,8	(550) 22 41,5		
1,5	(600) 24 25,5	+ 15,2	
1,1	(650) 26 9,0	1 Osc. = 2″,1570	
− 14,9			
1 Osc. = 2″,0769			

Umgekehrt

1 Osc. = 0″,5905

woraus:

$\beta = 0{,}0003937$

Der Werth von δ' ist bei Gold nur um ein Weniges grösser als bei Silber.

Blei.

Stab von gewalztem Blei, von 40 Zoll Länge, 1 Zoll Breite und 0,11 Dicke; ohne Gewicht.

a. Das frei schwingende Ende befindet sich oberhalb des fixen Punctes.

	Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
	+ 13,6	1″,1500 (40 Osc.)	− 8,8	1″,0600 (50 Osc.)
		1,1300 (50 Osc.)		1,0600 (50 Osc.)
		1,1400 (50 Osc.)		
Mittel		1″,1400		1″,0600

b. Das frei schwingende Ende befindet sich unterhalb des fixen Punctes.

1 Oscil. = 0″,5100 (200 Osc.)

woraus: $\beta = 0.003035$

Zusammenstellung der erhaltenen Resultate:

	β	Mittel.
Silber	0,000582	0,000563
	558	
	563	
Messing, geschlagenes	0,000460	0,000471
	480	
	473	
» gegossenes	528	0,000533
	523	
	544	
	537	
Tafelmessing, 1ste Sorte	536	
» 2te Sorte	476	
Platina	0,000201	0,000201
	201	
Spiegelglas	0,000124	0,000125
	125	
Gusseisen (weiches)	0,001840	0,001795
	1927	
	1618	
Stahl, weich. gewalzt.	0,000344	0,000348
	351	

	β	Mittel.
Englischer Schmiedestahl	0,000320	
» » andere Sorte	256	
Weicher Gussstahl	256	0,000242
	231	
	239	
» » andere Sorte	299	
Schwed. Schmiedeeisen	456	
Gewalztes Bandeisen	442	
» » andere Sorte	463	
Englisches Schmiedeeisen	376	
Gewalztes Eisenblech, der Breite der Walzung nach ausgeschnitten	353	
Dasselbe, der Länge der Walzung nach ausgeschnitten	425	
Kupfer	560	
Zink (gewalzt)	644	
Blei (gewalzt)	0,003035	
Gold	0,000394	

Einfluss der Temperatur auf die Elasticität der Metalle bei höhern Temperaturen.

I. Bei Transversalschwingungen.

Die im vorhergehenden Abschnitt enthaltenen Versuche über den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität metallischer Stäbe sind in freier Luft angestellt worden; der Beobachter musste also die Temperaturen nehmen, wie sie waren, und konnte nur bei einem strengen Winter grössere Temperaturunterschiede erhalten; der Unterschied der höchsten und niedrigsten Temperatur betrug gewöhnlich nicht viel über 20° R. Obwohl nun die angewandte Beobachtungsmethode der Art ist, dass sie selbst geringe Einflüsse der Temperatur mit grosser Sicherheit angiebt, und bei allen Versuchen, die an mehreren Temperaturen angestellt worden sind, die Abnahme der Elasticität sich proportional der Zunahme der Wärme gezeigt hat, so wäre es doch, wegen der Kleinheit der Temperaturunterschiede, gewagt, behaupten zu wollen, diese Abnahme der Elasticität sei der Zunahme der Wärme immer genau proportional; um ein solches Gesetz aufstellen zu können, sind Versuche, die bis zu höhern Temperaturen hinauf-

steigen, nothwendig. Da aber die Stäbe frei schwingen müssen, so muss der ganze Raum, in dem die Stäbe schwingen, gleichmässig erhitzt werden, welches seine Schwierigkeiten hat, wie jedem praktischen Physiker bekannt ist. Der Apparat, den ich angewandt habe, um diesen Zweck zu erreichen, ist *Tab. III* abgebildet, und ein Blick auf diese Figur wird die Einrichtung desselben leicht errathen lassen.

Fig. 1 und *2* ist ein Hohlcylinder von Kupfer, der doppelte Wände hat; es sind zwei Cylinder von dickem Kupferblech, von verschiedenem Durchmesser und gemeinschaftlicher Axe; der Zwischenraum zwischen beiden Wandungen beträgt ungefähr 2 Zoll. Der Zwischenraum zwischen beiden Cylindern ist oben und unten geschlossen, der innere Cylinder ist ebenfalls unten und oben geschlossen, unten durch eine starke Platte von Gusseisen, oben durch einen Deckel *g* von demselben Kupferblech, mit einer starken Korkholzplatte gefüttert. Der Raum zwischen den beiden Cylindern hängt durch Röhren *a*, *b* mit einem Kessel *A Fig. 3* zusammen, in welchem Wasser bis zum Kochen erhitzt wird; die Dämpfe erfüllen alsbald den genannten Zwischenraum, condensiren sich zum Theil, und fliessen als Wasser durch die Röhre *b* in das Gefäss *d*, aus welchem sie von Zeit zu Zeit wieder in den Kessel zurückgegossen werden können, wenn es in demselben an Wasser fehlen sollte. Da der innere Raum des innern Cylinders von allen Seiten von der hohlen Wandung umgeben ist, so wird die Luft in demselben bald, wenigstens nahezu, auf die Temperatur des kochenden Wassers gebracht, und in dieser Temperatur erhalten; der obere Deckel mit einer Fütterung von Korkholz hindert vollkommen, dass die Wärme oben hinausgehe; unter dem untern Verschluss von Gusseisen lässt man eine Spirituslampe brennen, damit die Temperatur der Luft durch die Berührung mit dem Gusseisen nicht variire. Das Gefäss *Fig. 1* ist vermittelst der Schrauben *c*, *c* und zweier gabelförmiger, in die Wand des Zimmers eingesetzter eiserner Stützen stark befestigt, so dass man den auf der *Tafel II Fig. 3* abgebildeten Apperat hineinstellen kann, welches theilweise durch die Thüre *f* und durch den obern Deckel *g* geschieht. Damit die Thüre *f* keine Abkühlung des innern Raumes hervorbringen könne, ist sie ebenfalls, wie der Deckel *g*, mit einer starken Korkplatte gefüttert. Der Wasserkessel steht in der untern Etage, die Röhren *a*, *b* sind durch die Decke der untern Etage (oder durch die Diele der obern) durchgeführt, so dass das Heitzen des Kessels und das Kochen des Wassers keine Störung in den Beobachtungen hervorbringen kann.

Um das am obern Ende des zu untersuchenden Stabes befestigte Gewicht (siehe *Tafel II*) und den Stab selbst von Aussen sehen zu können, hat die Wand des Cylinders an drei Stellen, in *k*, *k*, *k* (*Tafel III Fig. 3*) runde Oeffnungen, deren jede von zwei runden parallelen Spiegelgläsern verschlossen wird. Durch diese Gläser sieht man nicht nur die Theilung, die am oben angeklemmten Gewicht befestigt ist (siehe *Fig. 2 Taf. II*), sondern man kann auch die drei Thermometer ablesen, die im Innern des Cylinders aufgehängt sind und welche die Temperatur der Luft im Cylinder angeben. Sobald man den Apparat *Fig. 3 Taf. II* in den Cylinder gestellt hat (versteht sich fällt dabei der hölzerne Dreifuss in *Fig. 2* weg, der dazu diente, den

oscillirenden Stab vor den im erkalteten Raum stattfindenden Luftzügen zu bewahren), giebt man dem Stabe erst vermittelst der Fussschraube und des Fernrohrs des tragbaren Passage-instruments (siehe oben die Beschreibung der bei niedern Temperaturen angestellten Beobachtungen) eine senkrechte Stellung, und beobachtet die Dauer einer möglichst grossen Anzahl von Schwingungen, erst bei der gewöhnlichen Temperatur des Zimmers, dann bei der Temperatur des kochenden Wassers (oder nahezu) und auch wohl nach Erkaltung des Apparats nochmals bei der gewöhnlichen Temperatur. Die Berechnung der Beobachtungen geschieht auf dieselbe Weise, wie bei der niedern Temperatur.

Messing.

Messingstab № 6. Hartgezogenes englisches Tafelmessing.

A. Gewicht nach oben.

a. Bei gewöhnlicher Temperatur:

Temp. 14,0.			Temp. 14,0.		
Halbe Ampl.	Durchgänge.	Differenz.	Halbe Ampl.	Durchgänge.	Differenz.
45,0	(0) 0ʰ43′ 17″,5		6,5	(300) 1ʰ 2′ 14″,5	1′ 16″,0
40,0	(20) 44 33,0	1′ 15″,5	6,0	(320) 3 30,0	15,5
35,0	(40) 45 49,0	16,0	5,5	(340) 4 45,5	15,5
30,0	(60) 47 5,0	16,0	5,0	(360) 6 1,5	16,0
25,0	(80) 48 20,5	15,5	4,5	(380) 7 17,0	15,5
20,0	(100) 49 36,5	16,0	4,0	(400) 8 33,0	16,0
18,0	(120) 50 52,5	16,0	3,8	(420) 9 48,5	15,5
16,0	(140) 52 8,0	15,5	3,5	(440) 11 4,5	16,0
14,0	(160) 53 24,0	16,0	3,0	(460) 12 20,0	15,5
12,0	(180) 54 39,5	15,0	2,8	(480) 13 35,5	15,5
11,0	(200) 55 55,5	16,0	2,8	(500) 14 51,5	16,0
10,0	(220) 57 11,0	15,5	2,5	(520) 16 17,0	15,5
9,0	(240) 58 27,0	16,0	2,2	(540) 17 23,0	16,0
8,0	(260) 59 43,0	16,0	2,0	(560) 18 38,5	15,5
7,0	(280) 1 0 58,5	15,5			

+ 14,1

also 560 Oscil. in 35′ 21″,0

1 Oscil. = 3″,7875

b. Bei höherer Temperatur:

Mittl. Temp. 75,9.		Temp. 76,7.	
Halbe Ampl.	Durchgänge.	Halbe Ampl.	Durchgänge.
30	(0) 6′ 30″,0	35	(0) 16′ 12″,5
—	(20) 8 12,0	20	(20) 17 56,0
—	(40) 9 54,5	—	(40) 19 40,0
4,0	(60) 11 37,5	—	(60) 21 24,5
3,0	(80) 13 20,5	2,5	(80) 23 9,0
80 Oscil. in 6′ 50″,5		80 Oscil. in 6′ 56″,5	
1 Oscil. = 5″,1313		1 Oscil. = 5″,2063	

c. Bei gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 13°,5.

22	(0) 4′ 36″,5		(240) 19′ 40″,5
	(20) 5 52,0		(260) 20 55,5
	(40) 7 7,0		(280) 22 11,0
	(60) 8 22,5		(300) 23 26,5
	(80) 9 38,0		(320) 24 41,5
12,5	(100) 10 53,0		(340) 25 57,0
	(120) 12 8,5	3,5	(360) 27 12,0
	(140) 13 24,0		(380) 28 27,5
	(160) 14 39,0	3,0	(400) 29 42,5
	(180) 15 54,5		(420) 30 58,0
	(200) 17 10,0		(440) 32 13,5
7,0	(220) 18 25,0	2,2	(460) 33 28,5

Temp. 13°,4

460 Oscil. in 28′ 52″,0

1 Oscil. = 3″,6635

B. Gewicht nach unten.

2000 Oscil. in 22′ 14″,0

1 Oscil. = 0″,6670

Man findet hieraus: $\beta = 0,00050044$

In niedrigen Temperaturen haben wir

$$\beta = 0{,}00047566$$

gefunden; der Einfluss der Temperatur auf die Elasticität nimmt also mit der Temperatur zu. Auch hier bemerkt man wieder, dass die Schwingungsweiten in der höhern Temperatur viel schneller abnehmen, als in der niedrigern.

Messingstab № 1. Geschlagenes Messing.

A. Gewicht nach oben.

a. In gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 14,5.

Halbe Ampl.	Durchgänge.	Halbe Ampl.	Durchgänge.
20	(0) 8′ 4″,5	5	(600) 26′ 13″,5
15	(100) 11 6,0	4	(700) 29 15,0
12	(200) 14 7,5	3,5	(800) 32 16,5
9	(300) 17 9,0	3,0	(900) 35 17,5
7	(400) 20 10,5	2,5	(1000) 38 19,0
6	(500) 23 12,0	2,0	(1100) 41 20,5

Temp. + 14,5

1100 Oscil. in 33′ 16″,0

1 Oscil. = 1″,8146

b. In erhöhter Temperatur:

Temp. + 80,0

28	(0) 36′ 55″,0		(400) 49′ 50″,0
	(100) 40 9,0		(500) 53 4,0
	(200) 43 22,5		(600) 56 18,0
	(300) 46 36,5		(700) 59 32,0

700 Oscil. in 22′ 37″,0

1 Oscil. = 1″,9386

c. In gewöhnlicher Temperatur:

Halbe Ampl.	Durchgänge.	Halbe Ampl.	Durchgänge.
22	(0) 19′ 25″,5	5,0	(600) 37′ 34″,0
16	(100) 22 26,5	4,0	(700) 40 35,5
12	(200) 25 28,0	3,5	(800) 43 37,0
10	(300) 28 29,5	3,0	(900) 46 38,5
7,5	(400) 31 31,0	2,2	(1000) 49 40,0
6,0	(500) 34 32,5		

1000 Oscil. in 30′ 14″,5

1 Oscil. = 1″,8145

B. Gewicht nach unten.

2000 Oscil. in 21′ 7″,0

1 Oscil. = 0″,6335

woraus: $\beta = 0,0004764$

d. h. wieder grösser als in niedriger Temperatur, für welche wir oben

$$\beta = 0,0004596$$

gefunden haben.

Messingstab № 2. Gegossenes Messing, weiches.

A. Gewicht nach oben.

a. In gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 14°,1.

35	(0) 0′ 56″,5	
20	(50) 3 52,5	
13	(100) 6 49,5	
9	(150) 9 46,0	350 Oscil. in 20′ 23″,5
6	(200) 12 42,0	1 Oscil. = 3″,4957
5	(250) 15 38,0	
3,5	(300) 18 34,5	
2,5	(350) 21 20,0	

b. Bei erhöhter Temperatur:

Temp. + 79°,1.

30	(0) 5′ 31″,0	100 Oscil. in 8′ 6″,5
5	(50) 9 34,0	
1,5	(100) 13 37 5	1 Oscil. = 4″,8650

B. Das Gewicht nach unten.

2000 Oscil. in 21′ 43″0

1 Oscil. = 0″,6515

woraus:
$$\beta = 0,0005258$$

Derselbe Stab gab für die niedrige Temperatur

$$\beta = 0,0005255,$$

d. h. genau dasselbe, woraus folgt, dass der Einfluss der Temperatur auf die Elasticität bei weichem gegossenen Messing nicht mit der Temperatur zunimmt.

Um zu beweisen, dass die eben entdeckten Unterschiede im Verhalten des harten und weichen Messings gegen die Temperatur im Zustande des Messings ihren Grund haben, und nicht etwa in der Mischung, liess ich eine Stange von gegossenem Messing in drei Stücke zersägen, von welchen das eine (№ 7) so blieb, wie es war, und nur behobelt wurde, um eine regelmässige Form zu erhalten; das zweite (№ 8) stark gehämmert und dann behobelt; das dritte (№ 9) stark gewalzt und dann ebenfalls behobelt wurde. Diese drei Stücke zeigten eine sehr verschiedene Härte und ein verschiedenes specifisches Gewicht; auch waren ihre Elasticitäts-Coefficienten sehr verschieden. Ich fand nämlich:

Für № 7... Spec. Gew. = 8,309 (auf Wasser $13^{\circ 1}/_{3}$ R. bezogen)
$\delta = 0,000000062095$
» № 8... Spec. Gew. = 8,604
$\delta = 0,000000054643$
» № 9... Spec. Gew. = 8,575
$\delta = 0,000000057088$

Diese drei Stäbe verhalten sich in Bezug auf den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität, wie folgt:

Messing № 7. Gegossen, weich.

A. Das Gewicht nach oben.

a. Bei gewöhnlicher Temperatur:

+ 14,6

Halbe Ampl.	Durchgänge.	Halbe Ampl.	Durchgänge.	
14,0	(0) 5′ 5″,5	3	(400) 15′ 47″,5	600 Oscil. in 16′ 3″,0
9	(100) 7 46,0	2	(500) 18 28,0	1 Oscil. = 1″,6050
6	(200) 10 26,5	1,4	(600) 21 8,5	
4	(300) 13 7,0			

b. In höherer Temperatur:

Temp. + 79,0.

Halbe Ampl.	Durchgänge.	
13	(0) 2′ 59″,0	400 Oscil. in 11′ 17″,5
7	(100) 5 8,0	1 Oscil. = 1″,6925
4	(200) 7 57,5	
3,5	(300) 10 47,0	
1,5	(400) 13 36,0	

Wiederholt:

Temp. 79°,5.

19	(0) 4′ 47″,0	
11	(100) 7 36,0	
6,5	(200) 10 25,5	500 Oscil. in 14′ 7″,0
4	(300) 13 15,0	1 Oscil. = 1″,6940
2,5	(400) 16 4,5	
1,5	(500) 18 54,0	

c. Bei gewöhnlicher Temperatur:

Temp. 14,3.

20	(0) 11′ 6″,0	
13	(100) 13 46,5	
9	(200) 16 27,0	
6	(300) 19 7,5	700 Oscil. in 18′ 43″,0
4	(400) 21 48,0	1 Oscil. = 1″,6033
3	(500) 24 28,5	
2	(600) 27 9,0	
1,5	(700) 29 49,0	

B. Das Gewicht nach unten.

2000 Oscil. in 21′ 32″,0

1 Oscil. = 0″,6460

woraus: $\beta = 0{,}0005396$

Messingstab № 8. Stark gehämmert.

A. Das Gewicht nach oben.

a. Bei gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 14,8.

Halbe Ampl.	Durchgänge.	
12	(0) 8′ 34″,5	
8	(50) 11 1,5	300 Oscil. in 14′ 40″,0
5	(100) 13 28,5	1 Oscil. = 2″,9333
3,5	(150) 15 55,0	
2,5	(200) 18 21,5	
2,0	(250) 20 48,0	
1,2	(300) 23 14,5	

Eine zweite Beobachtung gab genau dasselbe.

b. Bei erhöhter Temperatur:

Temp. 79,5.

13	(0) 5′ 31″,0	
6	(50) 8 22,5	150 Oscil. in 8′ 35″,0
2,8	(100) 11 14,0	1 Oscil. = 3″,4333
1,2	(150) 14 6,0	

Als ich die Beobachtung wiederholte, machte der Stab

150 Oscil. in 8′ 37″,0

also: 1 Oscil. = 3″,4467

c. Bei gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 15,4.

14	(0) 25′ 57″,0	
9,5	(50) 28 24,0	
6,5	(100) 30 51,0	300 Oscil. in 14′ 41″,5
4,5	(150) 33 18,0	1 Oscil. = 2″,9383
...	(200) 35 45,0	
2,5	(250) 38 11,5	
1,5	(300) 40 38,5	

B. Das Gewicht nach unten:

1200 Oscil. in 13′ 46″,0

1 Oscil. = 0″,6883

Hieraus findet man: $\beta = 0{,}0004716$

Messingstab № 9.

A. Das Gewicht nach oben.

a. Bei gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 15,3.

Halbe Ampl.	Durchgänge.	
16,0	(0) 1′ 36″,5	200 Oscil. in 10′ 59″,5
8,5	(50) 4 22,0	1 Oscil. = 3″,2975
4,5	(100) 7 7,0	
2,5	(150) 9 51,5	
1,6	(200) 12 36,0	

b. In höherer Temperatur:

Temp. + 78,7.

14	(0) 21′ 10″,0	100 Oscil. in 6′ 48″,0
3	(50) 24 34,0	1 Oscil. = 4″,0800
1	(100) 27 58,0	

B. Das Gewicht nach unten.

1000 Oscil. in 11′ 29″,0

1 Oscil. = 0″,6890

woraus: $\beta = 0{,}0004855$

Man sieht also, dass der Einfluss der Temperatur auf die Elasticität des weichen gegossenen Messings allerdings grösser ist als beim gehämmerten und gewalzten harten Messing. Wir werden weiterhin eine Bestätigung dieser Thatsachen finden bei einem Messingdrath, der vor und nachdem er durchgeglüht worden, untersucht wurde; auch bei diesem war der Einfluss der Temperatur auf die Elasticität nach dem Glühen grösser, als vor demselben.

Eisen.

Eisenstab № 11. Schwedisches Schmiedeeisen. Spec. Gew. 7,791.

A. Das Gewicht nach oben.

a. In der gewöhnlichen Temperatur:

Temp. + 14,6.

Halbe Ampl.	Durchgänge.	
25	(0) 3′ 33″,0	
16	(100) 6 18,0	
10	(200) 9 3,0	800 Oscil. in 21′ 59″,0
7,5	(300) 11 48,0	1 Oscil. = 1″,6488
5,5	(400) 14 33,0	
4,0	(500) 17 18,0	
3,0	(600) 20 3,0	
2,0	(700) 22 47,5	
1,5	(800) 25 32,0	

b. In der erhöhten Temperatur:

Temp. + 77,8.

25	(0) 2′ 57″,5	
14	(100) 5 49,0	
8,5	(200) 8 40,5	500 Oscil. in 14′ 17″,5
4,5	(300) 11 32,0	1 Oscil. = 1″,7150
3,0	(400) 14 23,5	
1,5	(500) 17 15,0	

B. Das Gewicht nach unten.

2000 Oscil. in 21′ 32″,5

1 Oscil. = 0″,6463

woraus: $\beta = 0,0003809$

Eisenstab № 13. Englisches gewalztes Bandeisen. Spec. Gew. 7,647.

A. Das Gewicht nach oben.

a. In der gewöhnlichen Temperatur:

Temp. + 15,5.

Halbe Ampl.	Durchgänge.	
30	(0) 20′ 16″,0	
15	(100) 22 42,5	500 Oscil. in 12′ 11″,5
7,5	(200) 25 9,0	1 Oscil. = 1″,4630
4,5	(300) 27 35,0	
2,5	(400) 30 1,5	
1,5	(500) 32 27,5	

b. In höherer Temperatur:

+ 79,1.

30	(0) 34′ 5″,0	
16	(100) 36 37,5	
9,0	(200) 10,0	600 Oscil. in 15′ 14″,0
...	(300) 42,0	
4,0	(400) 14,5	1 Oscil. = 1″,5233
2,5	(500) 46,5	
1,5	(600) 49 19,0	

B. Das Gewicht nach unten.

1000 Oscil. in 10′ 38″,5

1 Oscil. = 0″,6385

woraus: $\beta = 0{,}0004884.$

Die Elasticität des dichten Eisens, wie die des dichten Messings, ändert sich also weniger durch den Einfluss der Wärme, als die Elasticität der weniger dichten Sorten.

Für die niedrigen Temperaturen wurde der Werth von

$$\beta = 0{,}0004625$$

gefunden; der Einfluss der Temperatur nimmt also beim Eisen ein wenig mit der Temperatur zu.

Gusseisen № 3. Sehr weich.

a. Das Gewicht nach oben gerichtet:

50 Oscillationen in 1′ 24″,5	1 Oscil. = 1,690	bei 14°,5
40 Oscillationen in 1′ 8″,5	1 Oscil. = 1,710	
	Mittel... 1,700	

b. In höherer Temperatur:

20 Oscillationen in 43″,5	1 Oscil. = 2,175	bei 76°,5
30 Oscillationen in 65″,0	1 Oscil. = 2,167	
	Mittel... 2,171	

c. Umgekehrt das Gewicht nach unten:

1 Oscil. = 0″,6375

woraus:

$$\beta = 0{,}001880$$

Für niedrige Temperaturen, war:

$$\beta = 0{,}001618$$

Drath von rothem Kupfer № 1.

a. Das Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 13,2	0″,89525 (1000 Osc.)	+ 78,2	0″,91540 (700 Osc.)

b. Das Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,5505

woraus:

$$\beta = 0{,}0005983$$

Als der Drath nach der oben angeführten Beobachtung bei 78°,2 wieder erkaltet war, fand sich, dass seine elastische Kraft bedeutend zugenommen hatte, so dass also der Werth von β für die zurückgehende Temperatur bedeutend geringer ausfiel.

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp.	Schwingungsdauer.	Temp.	Schwingungsdauer.
+ 10,8	1″,0560 (500 Osc.)	+ 78,0	1″,0860 (500 Osc.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0″,57875

woraus:

$$\beta = 0{,}0005422$$

II. Bei Torsionsschwingungen.

Wir haben in der Einleitung gesehen, dass die Torsionsschwingungen bei vielen Metallen, und insbesondere bei den weichen, einen grössern Werth von δ' geben, als die Transversalschwingungen, und diese Verschiedenheit aus einer besondern Eigenschaft zu erklären gesucht, welche darin besteht, dass die kleinsten Theilchen derselben sich über einander wegschieben, ohne ihre respective Entfernung zu ändern, so dass also bei der Drehung die Torsionswinkel grösser werden, als sie der Elasticität des Drathes gemäss werden sollten. Hiernach konnte man vermuthen, dass der Einfluss der Temperatur auf den Werth von δ' bei Torsionsschwingungen auch ein anderer sein möchte, als bei den Transversalschwingungen. Es mussten also über den Einfluss der Temperatur auf die Dauer der Torsionsschwingungen besondere Versuche angestellt werden, und das ist in Folgendem geschehen:

Der Apparat, der zu diesen Versuchen diente, ist auf der *Taf. IV* abgebildet. *a Fig.* 1 ist der Drath, für den der Einfluss der Temperatur auf seine Elasticität bestimmt werden soll, und der an seinem obern Ende befestigt wird, während das untere Ende eine schwere Scheibe von Messing *b, b* trägt, die in drehende Schwingung versetzt werden kann. Oberhalb der Scheibe befindet sich ein sehr leichter Reif *cc*, auf dessen Umfang eine Kreistheilung verzeichnet ist. Dieser Reif wird durch drei Radien *d, d, d* (siehe *Fig.* 2 Ansicht von oben) in seiner zirkelförmigen Gestalt erhalten, und vermittelst der drei Schrauben *e, e, e* an das untere Ende des Draths befestigt, so dass er mit der schweren Scheibe *b, b* zugleich schwingt. Dieser Apparat wird in dem Raume des Kupfer-Cylinders *Taf. III* aufgehängt, so dass die auf den Reif *cc* aufgetragene Theilung gerade vor dem untern Fensterchen *k* zu stehen kommt. Auf diese Theilung wird ein Fernrohr mit Fadenkreuz gerichtet und der Theilstrich bemerkt, durch welchen der verticale Faden des Fernrohrs geht. Hierauf wird die Scheibe *b, b* in eine drehende Bewegung gesetzt, und die Zeiten der Durchgänge des angemerkten Theilstrichs durch den Verticalfaden des Fernrohrs beobachtet; man erhält so, ganz wie es schon oben beschrieben worden, nicht nur die Dauer der einzelnen Schwingungen, sondern auch die Schwingungsweiten.

Es sei t die bei der gewöhnlichen Temperatur beobachtete Schwingungsdauer, t' die Schwingungsdauer bei erhöhter Temperatur, n der Temperaturunterschied, β' aber die Abnahme der Elasticität für die Einheit der elastischen Kraft und für 1° R., so ist

$$\beta' = \frac{1}{n}\left(\frac{t'^2}{t^2} - 1\right)$$

Drath von rothem Kupfer. Durchmesser = 0,"0393.

Vor der Erhitzung	500 Oscillationen	in 41′ 5,"5	1 Osc. = 4,"9310	bei 15°,0
Nach der Erhitzung	500 »	» 40 48,5	1 Osc. = 4,8970	bei 14°,0
			Mittel 4,"9140	bei 14°,5

In einer Temperatur von 79°,5; 150 Oscil. in 12′ 37,"5; 1 Oscil. = 5,"0500;

woraus: $\beta' = 0{,}0008634$



Stahldrath № 6. (Beste Wiener Klaviersaite.) Durchmesser $1^{mm}0,45 = 0,04114$ Zoll.

a. In gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 15,0.

Ganze Ampl. Grade.	Durchgänge.	Ganze Ampl. Grade.	Durchgänge.
...	(0) 6′ 21″,0	31	(300) 32′ 41″,5
125	(50) 10 45,0	..	(350) 37 4,0
93	(100) 15 9,0	16	(400) 41 27,0
70	(150) 19 32,0	..	(450) 45 49,5
55	(200) 23 55,5	..	(500) 50 11,5
41	(250) 28 18,5		

500 Oscil. in 43′ 50″,5

1 Oscil. = 5″,2610

b. In höherer Temperatur:

	Temp. + 79,0.		Temp. + 79,5.
..	(0) 24′ 56″,0	..	(0) 0′ 41″,5
73	(50) 29 25,0	86	(50) 5 11,0
39	(100) 33 54,0	44	(100) 9 40,0
20	(150) 38 21,5	24	(150) 14 8,0
..	(200) 42 49,0	14	(200) 18 35,5
8	(250) 47 16,5	9	(250) 23 3,0

250 Osc. in 22′ 20″,0 250 Osc. in 22′ 21″,5

1 Osc. = 5″,3600 1 Osc. = 5″,3660

Mittel 1 Oscil. = 5″,363.

c. Wieder bei gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 15,0.

186	(0) 13′ 16″,0	..	(250) 35 15,0
134	(50) 17 40,5	29	(300) 39 38,0
99	(100) 22 5,0	..	(350) ......
73	(150)	18	(400) 48 23,5
54	(200) 30 52,5	15	(450) 52 46,5

450 Osc. in 39′ 30″,5

1 Oscil. = 5″,2678

Man sieht, dass die Schwingungszeit mit den Schwingungsweiten sehr abnimmt; der Werth des Coefficienten *k* (siehe die Einleitung) kann also nicht unbedeutend sein.

Nimmt man das Mittel aus den beiden Beobachtungen je 2 und 2, so findet man:

$$\beta = 0{,}0005885.$$

Keine einzige der Stahlsorten, die in niedern oder höhern Temperaturen untersucht wurden, mit Anwendung der auf Transversalschwingungen beruhenden Methode, hat einen so grossen Werth von β gegeben; es muss also eine ganz besonders weiche Sorte sein, was sie eben zu Klaviersaiten so geschickt macht.

Der Stahldrath № 4, der einen so kleinen Werth von *k* gegeben hat, war leider zu dick um ähnlichen Versuchen unterworfen werden zu können, man hätte ihn denn sehr lang nehmen müssen, wozu die Höhe des Erwärmungsapparats nicht ausgereicht hätte.

Messingdrath, sehr weicher; Durchmesser $= 2^{mm}15$.

a. In gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 15,5.

Halbe Ampl. Grade.	Durchgänge.'	Halbe Ampl. Grade.	Durchgänge.
..	(0) 5′ 16″,5	24	(300) 15′ 14″,5
53	(100) 8 36″,0	19	(400) 18 33,5
..	(200) 11 55,5	..	(500) 21 52,0

500 Oscil. in 16′ 35″,5

1 Oscil. = 1″,991.

b. In höherer Temperatur:

Temp. + 79,5.

	(0) 19′ 45″,0		(300) 29′ 55″,0
	(100) 23 8,0		(400) 33 19,0
	(200) 26 31,5		(500) 36 42,5

500 Oscil. in 16′ 57″,5

1 Oscil. = 2″,0350

c. Nach der Abkühlung, bei + 15,5, genau dasselbe wie oben.

Aus diesen Beobachtungen findet man:

$$\beta = 0{,}0006982$$

Messingdrath, sehr harter; Durchmesser = 1^{mm}50.

a. Bei gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 15,8.

Halbe Ampl. Grade.	Durchgänge.	Halbe Ampl. Grade.	Durchgänge.
..	(0) 0′ 10″,0	48	(450) 30′ 25,0
..	(50) 3 32,0	43	(500) 33 46,5
..	(100) 6 54,0	38	(550) 37 8,0
..	(150) 10 15,5	34	(600) 40 29,5
84	(200) 13 37,0	32	(650) 43 51,0
72	(250) 16 58,5	29	(700) 47 12,0
65	(300) 20 20,0	27	(750) 50 34,0
58	(350) 23 41,5	24	(800) 53 55,0
53	(400) 27 3,5	..	(850) 57 16,5

Temp. + 16,0.

850 Oscil. in 57′ 6″,5

1 Oscil. = 4″,0312

b. In höherer Temperatur:

Temp. + 78,5.

...	(0) 2′ 17″,0	45	(400) 29′ 31″,5
...	(50) 5 41,0	40	(450) 32 55,5
100	(100) 9 5,5	35	(500) 36 20,0
88	(150) 12 30,0	32	(550) 39 44,5
75	(200) 15 54,5	29	(600) 43 8,5
66	(250) 19 15,5	26	(650) 46 32,5
58	(300) 22 42,5	24	(700) 49 56,5
50	(350) 26 7,0		

Temp. + 79,5.

700 Oscil. in 47′ 39″,5

1 Oscil. = 4″,0850

woraus: $\beta = 0,0004258$

Man sieht, dass für die weiche Messingsorte der Werth von β viel grösser ist, als für die harte, und dass das für den weichen Messingdrath durch Torsionsschwingungen gefundene Resultat viel grösser ist, als das für dieselbe Sorte durch Transversalschwingungen gefundene.

Der harte Messingdrath wurde, ohne aus den Klemmungen herausgenommen zu werden, vermittelst einer Spirituslampe geglüht. Nach dem Erkalten gab er folgende Resultate:

a. In gewöhnlicher Temperatur:

Temp. + 16,0.

Halbe Ampl. Grade.	Durchgänge.	Halbe Ampl. Grade.	Durchgänge.
..	(0) 8′ 41″,5	55	(200) 21 29,0
..	(50) 11 53,0	52	(250) 24 41,0
64	(100) 15 5,0	48	(300) 27 52,5
60	(150) 18 17,0		

300 Oscil. in 19′ 11″,0

1 Oscil. = 3″,837

b. In höherer Temperatur:

Temp. + 79,0.

..	(0) 0′ 40″,5	46	(450) 29′ 53″,0
..	(50) 3 55,0	44	(500) 33 8,0
..	(100) 7 9,5	41	(550) 36 22,5
68	(150) 10 24,0	38	(600) 39 37,5
63	(200) 13 39,0	35	(650) 42 52,5
60	(250) 16 54,0	34	(700) 46 7,0
..	(300) 20 9,0	32	(750) 49 22,0
52	(350) 23 23,5	30	(800) 52 36,5
48	(400) 26 38,0		

Temp. + 79,5

800 Oscil. in 51′ 56″,0

1 Oscil. = 3″,895

woraus: $\beta = 0,0004861$

Der Werth von β hat also durch das Glühen, wobei der Messing weicher ward, zugenommen, wenn er auch immer noch hinter dem für den ganz weichen Messingdrath gefundenen Werth zurückgeblieben. Merkwürdig ist noch, dass die elastische Kraft des Drathes durch das Glühen zugenommen hat, worüber wir weiterhin noch einige Versuche anführen werden.

Beobachtungen über den Einfluss vorübergehender Temperaturerhöhungen auf die Elasticität der Metallstäbe.

Es bleibt uns noch zu untersuchen übrig, ob vorübergehende Temperaturerhöhungen einen Einfluss auf den Werth des Elasticitätscoefficienten ausüben. Wir haben in dem Vorhergehenden gesehen, dass der Einfluss der Temperatur auf den Elasticitätscoefficienten sehr verschieden sein kann je nach dem Agregatzustande des Metalls, je nachdem es unmittelbar aus dem Guss kommt, oder gehämmert, gewalzt, oder gehärtet wurde. Da die Wärme den Agregatzustand des gehämmerten, oder gewalzten, oder gehärteten Metalls bleibend ändert, so ist zu vermuthen, dass der Elasticitätscoefficient sich ebenfalls durch vorübergehende Temperaturänderung bleibend ändert.

Um dieses mit grosser Schärfe zu ermitteln, wurde wieder dieselbe Methode angewandt, nämlich Beobachtung der Dauer der Transversalschwingungen von Metallstäben, die man in senkrechter Stellung an ihrem untern Ende eingeklemmt und an ihrem obern mit einem Gewicht beschwert hatte.

Platina.

Die Versuche wurden mit demselben Platinastab, der zu den Versuchen pag. 437 (41) gedient hatte, gemacht. Er wurde bis auf $^1/_{10}$ Linie an derselben Stelle eingeklemmt, wo er bei dem angeführten mitgetheilten Versuche eingeklemmt war.

In dieser Stellung, das freie Ende nach oben gerichtet, machte er 2000 Oscillationen in 12′ 43″,0, oder 1 Oscil. in 0″,38150; war aber das freie Ende nach unten gerichtet, so machte er dieselbe Anzahl von Osillationen in 11′ 1″,5 oder 1 Oscil. in 0″,33075.

Mit dem Gewichte № 8 gab er folgende Resultate:

a. Gewicht nach oben gerichtet:

Temp. + 14,7.

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
21,0	(0) 29′ 5″,5	2,5	(250) 36′ 54″,5
11,0	(50) 30 39,5	2,0	(300) 38 28,5
7,0	(100) 32 13,5	1,5	(350) 40 2,0
5,0	(150) 33 47,5	1,0	(400) 41 35,5
3,8	(200) 35 21,0		

1 Oscil. = 1″,8750

b. Gewicht nach unten gerichtet:

2000 Oscil. in 22′ 21″,0

1 Oscil. = 0″,6705.

Mit dem Gewicht № 5 endlich:

a. Gewicht nach oben gerichtet:

1 Oscil. = 8,"3258 (36 Oscil.)

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1 Oscil. = 0,"71775 (2000 Oscil.).

Nun wurde der Stab, ohne ihn aus seiner Klemmung herauszunehmen, der ganzen Länge nach mit einer Berzelius'schen Spirituslampe erhitzt, indem man die Lampe allmälig von einem Ende zum andern fortschob; dabei kam der Stab indessen nicht bis zum Glühen.

Nach völligem Erkalten gab er folgende Schwingungsdauer:

Ohne Gewicht, das freie Ende nach oben gerichtet:

1 Oscil. = 0,"3800 (2000 Oscil.).

Mit dem Gewicht №. 8, das Gewicht nach oben gerichtet:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
20	(0) 55′ 3,"0	4,0	(400) 7′ 20,"5
19	(50) 56 35,5	3,5	(450) 8 52,5
15	(100) 58 8,0	3,0	(500) 10 25,0
11	(150) 59 40,0	2,3	(550) 11 57,0
9,5	(200) 1 12,5	2,0	(600) 13 29,0
7,5	(250) 2 44,5	1,6	(650) 15 1,0
6,0	(300) 4 16,5	...	(700) ......
5,0	(350)	1,8	(750) 18 5,0

1 Oscil. = 1,"8427.

Mit dem Gewicht № 5:

15,0	(0) 42′44,"5	2,8	(80) 51′12,"5
9,0	(20) 44 52,0	1,8	(100) 53 19,0
5,5	(40) 46 59,5	0,4	(120) 55 24,5
3,0	(60) 49 6,0	0,8	(140) 57 31,0

1 Oscil. = 6,"3320.

Man sieht, dass die elastische Kraft des Stabes bedeutend zugenommen hat, d. h. dass der Werth von δ' kleiner geworden ist. Dabei hatte die ganze Länge des Stabes um 0,005 abgenommen.

Derselbe Platinastab wurde, nachdem er stark ausgeglüht worden war, zwischen zwei Cylindern von polirtem Stahl durchgelassen, so dass er mit einem Male um $^1/_3$ dünner und um $^1/_3$ länger wurde; die Breite des Stabes hatte nur sehr wenig, kaum um $^1/_4$ Linie zugenommen; er hatte vor dem Walzen eine Totallänge von 55,8 gehabt; nach dem Walzen war er 71,8 lang; er war vor dem Walzen 0,193 dick gewesen: nach dem Walzen hatte er eine Dicke von 0,140. Um erfahren zu können, ob der Einfluss der Erwärmung eine Aenderung in der Länge des Stabes hervorbringt, wurden zwei feine Querstriche auf demselben gezogen, deren Entfernung = 50,665 war.

Am untern Ende festgeklemmt, gab der Stab folgende Schwingungsdauer:

a. Ohne Gewicht am freien obern Ende:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge
35,0	(0) 35′ 3″,0	2,8	(500) 49′ 18″,5
17,0	(100) 37 54,5	1,8	(600) 52 9,0
10,0	(200) 40 45,5	1,2	(700) 55 0,0
6,0	(300) 43 36,5	0,8	(800) 57 50,5
4,0	(400) 46 27,5		

800 Oscil. in 22′ 47″,5

1 Oscil. = 1″,7094.

b. Mit dem Gewicht № 1 am freien obern Ende:

27,0	(0) 26′ 13″,5	2,0	(150) 35′ 57″,0
9,0	(50) 29 28,5	1,0	(200) 39 10,5
4,0	(100) 32 43,0		

200 Oscil. in 12′ 57″,0

1 Oscil. = 3″,8850.

Nun wurde der Stab wieder mit einer Berzelius'schen Spirituslampe, mit Schornstein, durchgewärmt, indem die Lampe bei horizontaler Lage der Stange vom geklemmten bis zum freien Ende nach und nach weiter geschoben wurde; dabei kam es nirgends bis zum Glühen.

Nach dem völligen Erkalten wieder senkrecht gestellt, mit dem geklemmten Ende nach unten, gab er folgende Resultate:

a. Ohne Gewicht:

Elon-gation.	Durchgänge.	Elon-gation.	Durchgänge.
35,0	(0) 4′ 33″,0	4,5	(700) 23′ 50″,5
23,0	(100) 7 18,5	3,8	(800) 26 35,5
17,0	(200) 10 4,0	3,0	(900) 29 21,0
12,5	(300) 12 49,5	2,3	(1000) 32 6,0
9,5	(400) 15 34,5	2,0	(1100) 34 51,5
7,5	(500) 18 20,0	1,5	(1200) 37 36,5
6,0	(600) 21 5,0	1,1	(1300) 40 22,0

1300 Oscil. in 35′ 49″,0

1 Oscil. = 1″,6531.

b. Mit dem Gewicht № 1:

37,0	(0) 4′ 16″,5	4,5	(350) 24′ 25″,0
23,0	(50) 7 9,5	3,5	(400) 27 17,5
16,5	(100) 10 2,5	2,8	(450) 30 10,0
12,0	(150) 12 55,0	2,0	(500) 33 2,5
9,2	(200) 15 47,5	1,8	(550) 35 55,0
7,0	(250) 18 40,0	...	(600) 38 ...
5,5	(300) 21 32,5	1,1	(650) 41 40,0

650 Oscil. in 37′ 23″,5

1 Oscil. = 3″,4515.

Die elastische Kraft des Stabes hatte also wieder zugenommen.

Derselbe Platinastab, nochmals mit der Berzelius'schen Lampe wie oben der Länge nach von Zoll zu Zoll erhitzt, gab nun nach dem Erkalten:

a. Ohne Gewicht:

37,0	(0) 4′ 33″,5	4,5	(800) 26′ 32″,0
26,3	(100) 7 18,5	3,5	(900) 29 17,0
20,0	(200) 10 3,5	3,0	(1000) 32 1,5
15,2	(300) 12 48,0	2,2	(1100) 34 46,5
....	(400) 15 ...	1,8	(1200) 37 31,0
9,0	(500) 18 17,5	1,5	(1300) 40 16,0
7,0	(600) 21 2,5	1,1	(1400) 43 0,5
6,0	(700) 23 47,5		

1400 Oscil. in 38′ 27″,0

1 Oscil. = 1″,6478.

b. Mit dem Gewicht № 1:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
40,0	(0) 34′ 2″,0	4,1	59′ 43″,5
29,0	(50) 36 53,5	3,5	(500) 2 34,5
22,0	(100) 39 45,0	2,8	5 25,5
17,0	42 36,0	2,2	(600) 8 16,5
13,0	(200) 45 27,5	1,8	11 7,5
10,3	48 18,5	1,5	(700) 13 58,5
8,0	(300) 51 9,5	1,2	16 49,5
6,5	54 1,0	1,0	(800) 19 40,5
5,2	(400) 56 52,0		

800 Oscil. in 45′ 38″,5

1 Oscil. = 3″,4234

Die Elasticität des Stabes hat also wieder um ein Weniges zugenommen.
Dabei fand sich die Entfernung der beiden feinen Querstriche um 0,005 geringer.

Ein Platinadrath wurde platt gehämmert und noch mehrere Male durch zwei Cylinder durchgelassen: er hatte 21,32 Länge, 0,220 Breite und 0,37 Dicke. An einem Ende eingeklemmt in einer Entfernung von 19,48 vom freiem Ende, und an diesem Ende mit einem kleinen Gewicht beschwert, gab er folgende Resultate:

20,0	(0) 41′ 36″,5	
4,5	(100) 43 59,0	300 Oscil. in 7′ 5″,5
...	(200)	1 Oscil. = 1″,4183
1,0	(300) 48 42,0	

Wiederholt: 300 Oscil. zwischen der Elongation 18,0 und 1,0

in 7′ 5″,0

300 Oscil. zwischen der Elongation 28,0 und 1,0

in 7′ 6″,0.

giebt im Mittel ebenfalls: 1 Oscil. = 1″,4183

Derselbe Drath wurde, ohne herausgenommen zu werden, vermittelst der **Berzelius**'schen Lampe mit dem Schornstein durchgeglüht (schwach rothglühend), indem man die Lampe von Zoll zu Zoll unter dem Drath, dem man eine horizontale Lage gegeben hatte, fortführte. Er gab nun folgende Schwingungsdauer:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
40,0	(0) 14′ 58″,5	3,5	(700) 30′ 38″,5
21,0	(100) 17 12,7	2,8	(800) 32 52,5
14,0	(200) 19 27,0	2,2	(900) 35 7,0
10,0	(300) 21 41,5	1,8	(1000) 37 21,0
7,0	(400) 23 56,0	1,4	(1100) 39 35,5
5,5	(500) 26 10,0	1,1	(1200) 41 49,5
4,2	(600) 28 24,5		

1200 Oscil. in 26′ 51″,0

1 Oscil. = 1″,3425

Umgekehrt, mit dem Gewicht nach unten, machte der Drath:

1000 Oscil. in 6′ 57″,5

1 Oscil. = 0″,3575

Hieraus folgt, dass die Elasticität des Draths im Verhältniss von

1 : 1,01488

zugenommen hat.

Ein Platinadrath von 0,11 Dicke und 17,60 Länge wurde so geklemmt, dass die Länge des schwingenden Theils 16,2 betrug. Mit dem Gewicht № 6 beschwert, gab er folgende Schwingungsdauer:

Gewicht nach oben gerichtet:

400 Oscil. zwischen 5,0 und 0,5 Elongation

in 245″,0

also: 1 Oscil. = 0″,6125

Mit der Berzelius'schen Lampe erhitzt (ohne herausgenommen zu werden), bis zum Schwachglühen in der Nähe des fixen Punktes, bis zum Rothglühen am Ende, gab er:

a. Gewicht nach oben gerichtet:

zwischen 5,0 und 1,5 Elongation

400 Oscil. in 242″,5

giebt: 1 Oscil. = 0″,6063

b. Gewicht nach unten gerichtet:

1000 Oscil. in 338,″0

1 Oscil. = 0,″3380

Das giebt eine Zunahme im Verhältniss von

1 : 1,01393

Derselbe Drath wurde nun dünner gezogen bis zu einer Dicke von 0,088. Er machte nun, ohne Gewicht, mit dem fixen Puncte unten:

400 Oscil. in 7′ 51,″0

1 Oscil. = 1,″1775

wobei er indess viel elliptische Oscillationen machte.

Mit der Berzelius'schen Lampe wie oben erhitzt, ohne herausgenommen zu werden, machte er nach dem Erkalten

400 Oscil. in 7′ 41,″5

1 Oscil. = 1,″1538

Eine neue Bearbeitung hatte ihm also die Eigenschaft, seine elastische Kraft durch eine vorübergehende Temperaturerhöhung zu vermehren, wiedergegeben.

Derselbe Drath wurde nun platt gehämmert; er gab folgende Schwingungsdauer:

Mit dem fixen Punct unten:

Elongation.	Durchgänge.	
35	(0) 0′ 16,″0	
13,0	(100) 1 55,0	500 Oscil. in 8′ 5,″5
6,0	(200) 3 34,0	1 Oscil. = 0,″9910
3,5	(300) 5 13,5	
2,0	(400) 6 52,5	
1,0	(500) 8 31,5	

Nachdem er, ohne herausgenommen zu werden, mit einer kleinen Spirituslampe erhitzt worden war, wobei es nicht bis zum Glühen kam:

35,0	(0) 21′ 7,″5	
14,0	(100) 22 44,5	
7,0	(200) 24 22,0	600 Oscil. in 9′ 42,″5
4,0	(300) 25 59,0	
2,2	(400) 27 36,0	1 Oscil. = 0,″9708
1,5	(500) 29 13,0	
1,0	(600) 30 50,0	

Vermittelst der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein erhitzt, wobei er stark roth glühte:

Elongation.	Durchgänge.	
35,0	(0) 15′ 37″,0	500 Oscil. in 8′ 1″,0
12	(100) 17 13,0	1 Oscil. = 0″,9620
6	(200) 18 49,5	
3,5	(300) 20 25,5	
1,8	(400) 22 1,5	
1,0	(500) 23 38,0	

Die elastische Kraft des Stabes hat also immer mehr zugenommen, je stärker er erhitzt worden war.

Noch wurden folgende Metalle untersucht:

Rothes Kupfer.

Ein Drath von rothem Kupfer von beiläufig 22 Zoll Länge und 0,04 Dicke wurde so in senkrechter Lage an einem Ende geklemmt, dass das andere freie Ende oben war; er machte

500 Oscil. in 5′ 7″,5

1 Oscil. = 0″,615

Er wurde nun, ohne ihn abzunehmen, mit einer in der Mitte durchbohrten fünfdochtigen Spirituslampe ausgeglüht, indem man mit der Lampe langsam von dem obern freien Ende nach dem untern eingeklemmten herabging; dabei konnte das untere Ende, bis etwa 3 Zoll hinauf, nicht ausgeglüht werden, da man die Lampe, des Klemmapparats wegen, nicht soweit herabbewegen konnte.

Nachdem der so ausgeglühte Drath vollkommen erkaltet, gab er folgende Schwingungsdauer:

300 Oscil. in 3′ 29″,5

1 Oscil. = 0″,6983

Die Schwingungsdauer hatte also bedeutend zugenommen, und also auch der Werth von δ'; oder die elastische Kraft des Drathes hatte abgenommen.

Ein anderes Stück von demselben Drath gab:

vor der Erwärmung 1000 Oscil. in 3′ 25″,0

1 Osc. = 0″,325

als es aber über einer Spiritusflamme erhitzt worden war, doch nicht bis zum Glühen, so gab es

600 Oscil. in 222,"5

1 Oscil. = 0,"3708

Von demselben Kupferdrath wurde ein anderes Stück eingeklemmt und dessen Schwingungsdauer beobachtet; ich erhielt:

1000 Oscil. in 6′ 9,"25

1 Oscil. = 0,"36925

Der Drath wurde nun ganz abgenommen und von einem Ende zum andern durchgeglüht über fünfdochtige Spirituslampen; als er nach dem Glühen wieder mit demselben Ende und an derselben Stelle eingeklemmt worden war, gab er

400 Oscil. in 2′ 52,"0

1 Oscil. = 0,"4310

Bei allen diesen Versuchen hatte sich allerdings der Kupferdrath beim Glühen mit einer zwar dünnen, doch an ihrer fast schwarzen Farbe kenntlichen Oxydschicht bedeckt; doch glaube ich nicht, dass diese Schicht einen merklichen Einfluss auf die Schwingungsdauer hat ausüben können; auch meine ich, dass, wenn so ein Einfluss stattfand, er die Schwingungsdauer vermindern, aber nicht vermehren müsste.

Ein Drath von rothem Kupfer von 53,0 Länge (vom fixen Punct bis zum freien Ende) und 0,138 Dicke gab mit einem Gewicht von etwa $^1/_8$ Pfund beschwert:

a. Vor dem Erhitzen, das freie Ende mit dem Gewicht nach oben gerichtet:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
40	(0) 43′ 1,"5	4,0	(500) 53′ 33,"5
23	(100) 45 8,0	2,5	(600) 55 40,0
14	(200) 47 14,5	1,8	(700) 57 46,0
9	(300) 49 21,0	1,0	(800) 59 52,0
5,5	(400) 51 27,5		

800 Oscil. = 16′ 50,"5

1 Oscil. = 1,"2631

b. Nachdem er mit der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein von Zoll zu Zoll so stark als möglich, fast bis zum Glühen, erhitzt worden war, das freie Ende mit dem Gewicht nach oben:



Halbe Ampl.	Durchgänge.	
40,0	(0) 7′ 27″,5	400 Oscil. in 9′ 40″,0
9,0	(100) 9 53,0	1 Oscil. = 1″,4500
4,0	(200) 12 18,5	
2,0	(300) 14 43,0	
1,0	(400) 17 7,5	

Als der Drath umgekehrt worden, so dass das freie Ende mit dem Gewicht nach unten gerichtet war, wurden

1000 Oscil. in 10′ 39″,0

gemacht, also 1 Oscil. = 0″,6390

Man findet daraus, dass die elastische Kraft des Stabes im Verhältniss von

1 : 0,87802

abgenommen hat.

Ein Stab von gewalztem rothen Kupfer, roh gearbeitet, von beiläufig 48 Zoll Länge (zwischen dem eingeklemmten und freien Ende), 1 Zoll Breite und $1\frac{1}{2}$ Lin. Dicke (derselbe, der zu den Versuchen über den Einfluss einer bleibenden Temperaturerhöhung auf die Elasticität gedient hatte, siehe pag. 448 (52)), gab, mit dem Bleigewicht beschwert, folgende Schwingungsdauer:

Gewicht oben:

1ste Beobachtung.		2te Beobachtung.	
Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
30	(0) 30′ 38″,5	40	(0) 17′ 35″,5
7	(50) 33 9,5	9	(50) 20 7,7
3,2	(100) 35 39,5	4	(100) 22 38,0
1,6	(150) 38 9,0	1,8	(150) 25 7,5
1,0	(200) 40 38,0	1,0	(200) 27 36,5
200 Osc. in 599″,5		200 Osc. in 601″,0	
1 Osc. = 2″,9975		1 Oscil. = 3″,0050	

also im Mittel: 1 Oscil. = 3″,0013

Der Stab wurde vermittelst der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein von Zoll zu Zoll durchgewärmt, so dass die Lampe auf jeder Stelle 3′ lang verweilte; es kam nicht bis zum Glühen. Er gab nun folgende Schwingungsdauer:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
35	(0) 1′ 10″,0	3,0	(350) 17′ 34″,0
20	(50) 3 31,0	2,2	(400) 19 54,5
13	(100) 5 52,0	2,0	(450) 22 14,5
9	(150) 8 12,5	1,5	(500) 24 35,0
6,2	(200) 10 33,0	1,2	(550) 26 55,0
5,0	(250) 12 53,5	0,9	(600) 29 15,0
3,6	(300) 15 13,5		

600 Oscil. in 28′ 5″,0

1 Osc. = 2″,8083

Die elastische Kraft des Stabes hatte also sehr zugenommen.

Der Stab wurde nun nochmals und auf dieselbe Art erhitzt, doch nur von 2 zu 2 Zoll, aber auf jeder Stelle 5′ lang. Er gab nun:

40,0	(0) 7′ 25″,5	3,5	(350) 23′ 32″,0
22,0	(50) 9 44,0	3,0	(400) 25 49,5
14,0	(100) 12 2,5	2,5	(450) 28 7,0
10,0	(150) 14 20,5	2,0	(500) 30 25,0
7,2	(200) 16 38,5	...	(550) 32 ...
6,0	(250) 18 56,0	1,3	(600) 35 0,5
4,5	(300) 21 14,0	1,0	(650) 37 18,0

650 Oscil. in 29′ 52″,5

1 Oscil. = 2″,7577

Die elastische Kraft des Stabes hatte also noch zugenommen.

Nun wurde der Stab abermals mit derselben Lampe erhitzt, von 5 zu 5 Zoll, indem an jeder Stelle 10′ verweilt wurde. Er gab nun folgende Resultate:

40,0	(0) 30′ 38″,5	2,5	(350) 46′ 42″,0
20,0	(50) 32 56,5	2,0	(400) 48 59,5
12,0	(100) 35 14,5	1,6	(450) 51 16,5
7,8	(150) 37 32,5	1,3	(500) 53 34,0
5,5	(200) 39 50,0	1,0	(550) 55 51,0
4,0	(250) 42 7,5	0,9	(600) 58 8,5
3,0	(300) 44 25,0		

600 Oscil. in 27′ 30″0

1 Oscil. = 2″,7500

Die elastische Kraft des Stabes hatte also nur unbedeutend zugenommen.

Umgekehrt, mit dem Gewichte unten, machte der Stab:

3000 Oscil. in 34′ 54″,5

1 Oscil. = 0″,6982

Berechnet man hiernach die Zunahme an Kraft, so findet man, dass sie vom ersten Versuche, wo die Schwingungsdauer 3″,001, bis zum letzten, wo sie 2″,750 betrug, sich im Verhältniss von

1 : 1,02095

vermehrt hatte.

In den vorhergehenden Versuchen war der Stab immer in der Klemme geblieben, so dass der fixe Punct sich nicht verändern konnte. Nun wurde er aber herausgenommen, in ausgebrannte Steinkohlen eingehüllt, stark durchgeglüht und nach dem Erkalten wieder eingeklemmt, wobei so viel als möglich darauf gesehen wurde, dass er wieder genau an derselben Stelle eingeklemmt wurde. Als er aufrecht stehend (die Klemmung unten) mit demselben Gewichte beschwert wurde, das in den vorhergehenden Versuchen gedient hatte, schlug der Stab um: er war also durch das Glühen zu weich geworden, um noch im Stande zu sein, dasselbe Gewicht zu tragen.

Ein anderer Stab von gewalztem rothen Kupfer, von 44 Zoll Länge (vom fixirten bis zum freien Ende), 0,95 Breite und 0,15 Dicke, gab, mit dem Gewichte № 3 beschwert, das freie Ende nach oben gerichtet:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
40,0	(0) 26′ 56″,0	3,0	(400) 34′ 14″,5
16,0	(100) 28 46,0	2,0	(500) 36 3,5
8,0	(200) 30 35,5	1,2	(600) 37 53,0
4,2	(300) 32 25,0		

600 Oscil. in 10′ 57″,0

1 Oscil. = 1″,0950

Vermittelst der Berzelius'schen Lampe mit Schornstein erhitzt, gab er:

40	(0) 8′ 36″,5	4,0	(600) 19′ 26″,0
24	(100) 10 25,0	3,0	(700) 21 14,0
15	(200) 12 13,5	2,5	(800) 23 2,0
10,2	(300) 14 2,5	2,0	(900) 24 50,0
7,5	(400) 15 50,0	1,5	(1000) 26 38,0
5,5	(500) 17 38,0	1,0	(1100) 28 26,0

1100 Oscil. in 19′ 49″,5

1 Oscil. = 1″,0814

Umgekehrt machte der Stab 1000 Oscil. in 9′ 29″,5

1 Oscil. = 0″,5695

Die elastische Kraft desselben hatte also im Verhältniss von

1 : 1,01491

zugenommen.

Messing.

Ein Messingstab von 41,492 Länge (vom freien Ende bis zur Klemmung), 0,924 Breite und 0,115 Dicke, mit dem Gewicht № 2, gab aufrecht folgende Schwingungsdauer:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
39,0	(0) 38′ 2″,5	3,0	(700) 50′ 54″,5
21,0	(100) 39 52,7	2,5	(800) 52 44,5
13,0	(200) 41 43,0	...	(900) ......
9,0	(300) 43 33,5	1,8	(1000) 56 24,5
6,5	(400) 45 23,5	1,4	(1100) 58 14,5
5,0	(500) 47 14,0	1,1	(1200) 60 4,8
4,0	(600) 49 4,0		

1200 Oscil. in 22′ 2″,3

1 Oscil. = 1″,1020

Und mit dem Gewicht unten: 1000 Oscil. in 8′ 56″,0

1 Oscil. = 0″,5360

Dieser Stab wurde mit der Berzelius'schen Lampe (mit dem Schornstein) der Länge nach von Zoll zu Zoll durchgehitzt, denn bis zum Glühen kam es nicht, und gab nun folgende Resultate:

40,0	(0) 6′ 45″,5	5,0	(1100) 26′ 38″,0
31,0	(100) 8 34,0	4,3	(1200) 28 26,5
....	(200) 10 22,5	3,6	(1300) 30 15,0
20,0	(300) 12 11,0	3,0	(1400) 32 3,0
16,0	(400) 13 59,5	2,6	(1500) 33 51,0
14,0	(500) 15 47,5	2,2	(1600) 35 40,0
11,5	(600) 17 36,0	2,0	(1700) 37 28,5
9,5	(700) 19 24,5	1,5	(1800) 39 17,0
8,5	(800) 21 13,0	1,4	(1900) 41 5,0
7,0	(900) 23 1,5	1,0	(2000) 42 53,5
6,0	(1000) 24 49,5		

2000 Oscil. in 36′ 8″,0

1 Oscil. = 1″,0840

Die ersten 1200 Oscillationen wurden in 21′41″,0 gemacht, welches 1 Osc. = 1″,0842 giebt.

Den andern Morgen wurde die Beobachtung wiederholt; die zwischen der Elongation 40,0 und 1,1 enthaltenen 2100 Oscil. wurden in 37′ 56″,5 gemacht, welches 1,0841 giebt.

Die Länge des Stabes hatte sich durch das Erhitzen nicht merklich geändert.

Die elastische Kraft des Stabes war also nach dem Erhitzen bedeutend grösser geworden. Setzt man die elastische Kraft des Stabes vor der Erhitzung der Einheit gleich, so war sie nach der Erhitzung gleich

1,01696.

Ein anderer Stab von gehämmertem Messing, dünner und schmäler als der vorhergehende, wurde am freien Ende mit einem kleinen Gewicht beschwert, und gab folgende Schwingungsdauer.

Mit dem freien Ende nach oben gekehrt:

a. Vor dem Erhitzen:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
50,0	(0) 3′ 52″,5	4,0	(700) 22′ 43″,0
23,0	(100) 6 34,0	3,0	(800) 25 24,5
17,5	(200) 9 15,5	2,2	(900) 28 6,0
12,0	(300) 11 57,0	2,0	(1000) 30 47,5
9,0	(400) 14 38,5	1,5	(1100) 33 26,0
7,0	(500) 17 20,0	1,0	(1200) 36 10,5
5,0	(600) 20 1,5		

Zwischen der Elongation 17,0 und 1,0 machte also der Stab

1000 Oscil. in 26′ 55″,0

woraus: 1 Oscil. = 1″,6150

b. Nach dem Erhitzen:

Eine geringe Temperaturerhöhung, bis zum Kochpunct des Wassers, brachte keine Aenderung hervor, als der Stab aber beinahe bis zum Glühen erhitzt worden war (ohne jedoch herausgenommen worden zu sein), gab er folgende Schwingungsdauer:

25,0	(0) 21′ 54″,5	4,0	(600) 37′ 20″,5
16,0	(100) 24 29,0	3,0	(700) 39 54,5
....	(200) 27 3,0	2,2	(800) 42 29,0
8,3	(300) 29 37,5	1,9	(900) 45 3,0
4,5	(400) 32 12,0	1,5	(1000) 47 37,0
5,0	(500) 34 46,0	1,0	(1100) 50 11,5

Zwischen der Elongation 16,0 und 1,0 machte also der Stab

1000 Oscil. in 25′ 42,″5

woraus: 1 Oscil. = 1,″5425

Umgekehrt, d. h. mit dem Gewicht nach unten, machte der Stab

1000 Oscil. in 6′ 25,″5

woraus: 1 Oscil. = 0,″3855

Also auch hier war die elastische Kraft des Stabes nach dem Erhitzen grösser, und zwar im Verhältniss von

1 : 1,01106

Ein **Messingdrath** von 0,152 Dicke wurde so eingeklemmt, dass die Länge des schwingenden Theils 52,9 betrug, und mit einem kleinen Gewichte ($^1/_8$ Pfund) beschwert. Er gab folgende Schwingungsdauer:

Mit dem Gewicht nach oben, vor der Erhitzung:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
40	(0) 18′ 53,″5	4,1	(500) 28 7,″0
22	(100) 20 44,0	3,0	(600) 29 58,0
13	(200) 22 35,0	2,0	(700) 31 48,0
8,8	(300) 24 25,5	1,5	(800) 33 39,0
6,0	(400) 26 16,5	1,0	(900) 35′ 29,5

900 Oscil. in 16′ 36,″0

1 Oscil. = 1,″1067

Vermittelst einer kleinen Spirituslampe erhitzt, wobei es nirgends bis zum Glühen kam:

40,0	(0) 18′ 46,″5	4,0	(600) 29′ 35,″5
25,0	(100) 20 34,5	3,0	(700) 31 23,5
16,0	(200) 22 22,5	2,2	(800) 33 11,5
11,0	(300) 24 11,0	1,5	(900) 35 0,0
8,0	(400) 25 59,0	1,0	(1000) 36 48,0
5,5	(500) 27 47,5		

1000 Oscil. in 18′ 1,″5

1 Oscil. = 1,″0815

Mit der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein erhitzt, bei jedem Zoll 2′ verweilend:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
40,0	(0) 9′ 45″,0	5,2	(600) 20′ 54″,0
26,0	(100) 11 36,5	4,0	(700) 22 45,5
17,5	(200) 13 28,0	3,0	(800) 24 37,0
17,5	(300) 15 19,5	2,5	(900) 26 28,0
....	(400) 17 11,5	1,8	(1000) 28 19,5
7,0	(500) 19 2,5		

1000 Oscil. in 18′ 34″,5

1 Oscil. = 1″,1145

Nochmals erhitzt mit derselben Lampe, alle 2 Zoll 5 Minuten verweilend:

40	(0) 4′ 29″,5	...	(700) 17′ 31″,5
27	(100) 6 21,0	3,0	(800) 19 23,0
18	(200) 8 13,0	2,5	(900) 21 15,0
12,5	(300) 10 5,0	2,0	(1000) 23 6,5
9,0	(400) 11 56,5	1,5	(1100) 24 58,5
7,0	(500) 13 48,0	1,0	(1200) 26 50,0
5,2	(600) 15 40,0		

1000 Oscil. in 18′ 36″,0

1 Oscil. = 1″,1166

Nochmals erhitzt mit einer fünfdochtigen Lampe, die in der Mitte durchbohrt war, so dass der Drath in seiner senkrechten Lage bleiben und, durch die Mitte der Lampe durchgehend, in seiner ganzen Länge erhitzt werden konnte, indem man die Lampe sehr langsam von unten nach oben bewegte*). Die fünf Dochte, deren Flammen rings um den Drath spielen, geben eine sehr grosse Hitze; der Drath wurde an mehreren Stellen sehr weich und bog sich auf die Seite.

40,0	(0) 8′ 18″,5	5,0	(600) 19′ 33″,0
26,0	(100) 10 11,0	4,0	(700) 21 25,5
17	(200) 12 3,5	3	(800) 23 17,5
12	(300) 13 56,0	2	(900) 25 10,0
9	(400) 15 48,0	1,5	(1000) 27 2,5
6,5	(500) 17 41,5	1,2	(1100) 28 54,5

*) Es war eine Lampe, wie man sie gewöhnlich zum Auskochen des Quecksilbers in der Barometerröhre braucht. Siehe Poggendorf's Annalen der Physik.

1000 Oscil. in 18′ 44″,0

1 Oscil. = 1″,1240

Umgekehrt, mit dem Gewicht nach unten gerichtet, gab derselbe Drath:

600 Oscil. in 6′ 0″,0

1 Oscil. = 0″,6000

Unterwirft man alle diese Zahlen der Berechnung, und setzt die elastische Kraft des Drathes vor der Erhitzung der Einheit gleich, so findet man folgende Werthe für seine elastische Kraft nach den verschiedenen Arten der Erhitzung, der er unterworfen worden ist:

1) Nach Erhitzung mit der kleinen Spirituslampe:

1,03094

2) Nach Erhitzung vermittelst der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein, auf jedem Zoll 2 Minuten verweilend. Der Drath kam an mehreren Stellen zum Glühen:

0,99105

3) Nach nochmaliger Erhitzung mit derselben Lampe, alle 2 Zoll 5 Minuten lang verweilend:

0,98872

4) Nach Erhitzung mit der fünfdochtigen Lampe der ganzen Länge nach, wobei es bei vielen Stellen zum Glühen kam:

0,98041

Die elastische Kraft des Drathes hatte also erst, bei einer Erhitzung, die nicht bis zum Glühen ging, zugenommen, dann aber bei einer Erhitzung, die wenigstens auf vielen Stellen bis zum Glühen gegangen war, abgenommen.

Ein anderer Messingdrath gab:

Vor dem Erhitzen, mit dem Gewicht № 6, nach oben gerichtet:

900 Oscillationen, durch die Elongation 30 und 1,0

in 15′ 7″,5

1 Oscil. = 1,0083

Nach dem Erhitzen mit einer kleinen Spirituslampe, von Zoll zu Zoll, auf jeder Stelle 1′ lang, zwischen denselben Elongationen:

900 Oscil. in 15′ 0″,5

1 Oscil. = 1″,0005

Der Drath wurde nochmals von Zoll zu Zoll erhitzt mit derselben kleinen Spirituslampe, aber indem an jeder Stelle längere Zeit, nämlich 3′, verweilt wurde. Er gab nun:

1000 Oscil. in 16′ 37″,0

also: 1 Oscil. = 0″,9970

Nun wurde er mit der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein erhitzt, so dass er bis zum Glühen kam, besonders am freien Ende. Er machte nun:

1000 Oscil. in 17′39″,0

also: 1 Oscil. = 1″,0590

Eine geringe Erwärmung brachte also auch hier eine Erhöhung der elastischen Kraft hervor, eine bis zur Glühhitze gehende aber eine Verminderung derselben.

Silber.

Ein prismatischer Stab von reinem Silber (so rein als ich es von dem Münzhof auf meine besondere Bitte erhalten konnte), derselbe, der zu den vorhergehenden Versuchen gedient hatte, von 44,920 Länge vom fixen Punct bis zum freien Ende gerechnet, gab mit diesem nach oben gerichtet:

Ohne Gewicht:

1000 Oscil. in 9′ 49″,0

also: 1 Oscil. = 0″,5890

Mit dem Gewicht № 6:

Elongation.	Durchgänge.	
40,0	(0) 13′ 9″,0	200 Oscil. in 8′ 50″,5
18,0	(50) 15 22,0	1 Oscil = 2″,6525
5,0	(100) 17 35,0	
2,2	(150) 19 47,5	
1,0	(200) 21 59,5	

Nachdem der Stab, ohne herausgenommen zu werden, über der Berzelius'schen Lampe erhitzt worden:

Ohne Gewicht:

1000 Oscil. in 9′ 45″,5

1 Oscil. = 0″,5855

Mit dem Gewicht № 6:

Elongation.	Durchgänge.	
30,0	(0) 49′ 35″,5	82 Oscil. in 3′ 32″,0
2,5	(50) 51 45,5	1 Oscil. = 2,5854
1,0	(82) 53 7,5	

Umgekehrt:

Ohne Gewicht: 1000 Oscil. in 7′ 1″,0

1 Oscil. = 0″,4210

Mit dem Gewicht: 1000 Oscil. in 10′ 38″,5

1 Oscil. = 0″,6385

Aus den Beobachtungen mit dem Gewicht findet man leicht, dass die elastische Kraft des Stabes im Verhältniss von

1 : 1,00613

zugenommen hat.

Zink.

Ein prismatischer Stab von gewalztem Zink, von 0,166 Dicke und 0,970 Breite, wurde so eingeklemmt, dass die Länge des schwingenden Theils 31,74 betrug und mit dem Gewicht № 8 beschwert; die Entfernung des fixen Punctes vom Mittelpunct des Gewichts betrug 31,22. Das Gewicht des ganzen Stabes war 1,7 Pfund, seine ganze Länge 35,80.

Mit dem Gewicht nach oben:

6,0	(0) 23′ 2″,0	
1,0	(50) 23 53,5	150 Oscil. in 2′ 35″,0
0,5	(100) 24 45,5	1 Oscil. = 1″,0333
0,2	(150) 25 37,0	

Nachdem der Stab, ohne herausgenommen zu werden, mit der kleinen Spirituslampe erhitzt worden war:

5,0	(0) 8′ 55,5	
1,0	(50) 9 47,0	150 Oscil. in 2′ 34″,0
...	(100) 10 38,0	1 Oscil = 1″,0267
0,3	(150) 11 29,5	

Umgekehrt machte er: 400 Oscil. in 3′ 22″,0

welches 1 Oscil. = 0″,5050 giebt.

Er wurde nun mit der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein erbitzt, während 1′ auf jedem Zoll, wobei seine Temperatur dem Schmelzpunct sehr nahe kam.

Elongation.	Durchgänge.	
5,0	(0) 2′ 9″,5	200 Oscil. in 3′ 21″,0
...	(50) 3 0,0	1 Oscil. = 1″,0050
...	(100) 3 50″,0	
...	(150) 4 40,5	
0,1	(200) 5 30,5	

Dabei schien der Stab um etwa 0,02 kürzer geworden zu sein, doch lässt sich das nicht recht verbürgen, da sich der Stab beim Erbitzen ein wenig gebogen hatte.

Die elastische Kraft des Zinkstabes hat also ebenfalls in dem Maasse zugenommen, als die Temperatur, bis zu welcher der Stab vorübergehend erbitzt worden, höher war. Man findet leicht, dass die Zunahme der elastischen Kraft des Stabes vom ersten Versuche, wo die Schwingungsdauer 1″,0333 war, bis zum letzten, wo sie zu 1″,0050 herabsank,

0,02916

betrug, wenn man die Kraft des Stabes im ersten Versuche der Einheit gleich setzt.

Ein Stab von gegossenem Zink zeigte nach einer schwachen Erbitzung sowohl, als nach einer starken, die bis zum Schwachgelbanlaufen getrieben wurde, keine Aenderung in seiner elastischen Kraft.

Stahl.

Ein prismatischer Stab von weichem Gussstahl, von beiläufig 36 Zoll Länge (vom fixen Punct bis zum freien Ende), gab mit dem Gewicht № 7:

25,0	(0) 28′ 27″,0	
14,0	(50) 32 51,0	
8,0	(100) 37 15,5	300 Oscil. in 26′ 26″,0
4,6	(150) 41 40,0	
2,8	(200) 46 4,5	1 Oscil. = 5″,2867
1,8	(250) 50 29,0	
1,0	(300) 54 53,0	

Der Stab wurde aus der Klemmung herausgenommen, in ein gusseisernes prismatisches Gefäss gelegt und, in unschmelzbaren Thon und Kupferfeile gehüllt, einer solchen Hitze ausgesetzt, dass das gusseiserne Gefäss zu schmelzen anfing.

Nachdem der Stab vollkommen und langsam erkaltet, wurde er herausgenommen; er war um 0,002 kürzer geworden, und gab nun, an derselben Stelle eingeklemmt:

Elongation.	Durchgänge.	
25,0	(0) 7′ 56″,0	100 Oscil. in 8′ 23″,5
5,0	(50) 12 7,5	1 Oscil. = 5″,035
1,0	(100) 16 19,5	

Da der Stab zwischen den beiden Beobachtungen ganz aus der Klemme herausgenommen worden war, so schien es mir nothwendig, zu untersuchen, ob ein geringes Verrücken der Klemmung einen grossen Einfluss auf die Schwingungsdauer haben könnte; ich klemmte also den Stab so, dass er um 0,02 mehr aus der Klemmung hervorragte, d. h. so dass der vibrirende Theil des Stabes um 0,02 länger wurde; der Stab gab nun:

100 Oscil. in 8′ 36″,5

1 Oscil. = 5″,165

Wenn sich gleich nicht läugnen lässt, dass die Sicherheit der Beobachtung sehr dadurch beeinträchtigt wurde, dass man den Stab, um ihn zu erhitzen, aus der Klemmung herausnahm, so steht es doch fest, dass die elastische Kraft des Stabes nach dem Glühen zugenommen hatte.

Ein anderer Stab von Gussstahl, schmäler und dünner als der vorhergehende, gab mit dem Gewicht № 6:

30,0	(0) 2′ 56″,5	
12,0	(50) 5 21,0	200 Oscil. in 9′ 39″,0
5,5	(100) 7 46,0	
2,5	(150) 10 11,0	1 Oscil. = 2″,8950.
1,4	(200) 12 35,5	

Nachdem der Stab, ohne herausgenommen zu werden, vermittelst der Berzelius'schen Lampe mit Schornstein beinahe bis zum Glühen erhitzt worden war:

30,0	(0) 5′ 36″,5	
9,0	(50) 7 59,5	150 Oscil in 7′ 9″,5
3,0	(100) 10 23,0	1 Oscil. = 2″,8630
1,0	(150) 12 46,0	

Umgekehrt machte der Stab:

1000 Oscil. in 7′ 36″,0

1 Oscil. = 0″,4560

Dies giebt eine Zunahme der elastischen Kraft des Stabes im Verhältniss von:

1 : 1,01122

Ein so stark als möglich gehärteter Stahlstab (derselbe war beim Härten etwas krumm geworden) von 37,5 Zoll Länge (vom fixen Punct bis zum freien Ende), 1 Zoll Breite und $1\frac{1}{2}$ Linien Dicke, gab mit dem Gewicht № 8 folgende Schwingungsdauer:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge
36,0	(0) 8′ 28″,0	3,0	(300) 20′ 18″,5
16,0	(100) 12 25,0	1,5	(400) 24 15,5
7,0	(200) 16 22,0	0,8	(500) 28 12,0

500 Oscil. in 19′ 44″,0

1 Oscil. = 2″,3680.

Nachdem er vermittelst der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein von Zoll zu Zoll erhitzt worden war, wobei die Lampe auf jedem Zoll 3′ lang verweilte (es kam nicht bis zum Glühen, der Stab lief erst gelb und blau und endlich dunkelblau an), gab er:

40,0	(0) 6′ 46″,5	5,0	(500) 23′ 24″,0
25,0	(100) 10 5,5	3,8	(600) 26 43,0
16,0	(200) 13 25,5	2,5	(700) 30 2,5
11,0	(300) 16 45,0	1,8	(800) 33 22,0
7,0	(400) 20 4,5	1,1	(900) 36 41,5

900 Oscil. in 29′ 55″,0

1 Oscil. = 1″,9950.

Umgekehrt: 1000 Oscil. in 10′ 1″,5

1 Oscil. = 0″,6015

Wir haben also eine Zunahme der elastischen Kraft im Verhältniss von:

1 : 05452

Ein anderer Stab von Stahl, von derselben Dimension, noch mehr gehärtet als der vorhergehende (er war dabei sehr krumm geworden), gab folgende Schwingungsdauer:

1) Vor dem Erhitzen:

30,0	(0) 38′ 5″,0	2,0	(300) 50′ 9,0
11,5	(100) 42 6,5	1,0	(400) 54 10,5
5,0	(200) 46 8,0		

400 Oscil. in 16′ 5″,5

1 Oscil. = 2″,4138

2) Nachdem er mit der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein von Zoll zu Zoll, auf jedem Zoll 3′ lang, erhitzt worden:

Elongation.	Durchgänge.	Elongation.	Durchgänge.
31,0	(0) 2′ 9″,0	3,8	(500) 19′ 40″,0
18,5	(100) 5 39,0	2,5	(600) 23 10,0
12,0	(200) 9 9,5	1,8	(700) 26 40,5
8,0	(300) 12 39,5	1,1	(800) 30 10,0
5,3	(400) 16 10,0		

800 Oscil. in 28′ 1″,0

1 Oscil. = 2″,1013

Umgekehrt machte der Stab:

1000 Oscil. in 10′ 5″,5

1 Oscil. = 0″,6055.

Die elastische Kraft des Stabes hatte also im Verhältniss von:

1 : 1,06551

zugenommen.

Eisen.

Ein Stab von weichem Eisen, von 18,55 Zoll Länge (vom geklemmten Ende bis zum freien), 0,25 Breite und 0,056 Dicke, gab mit dem Gewichte № 1 beschwert:

90 Oscil. zwischen der Elongation 16,0 und 1,0:

in 4′ 59″,0

1 Oscil. = 3″,3222.

Der Stab wurde, ohne herausgenommen zu werden, vermittelst der Berzelius'schen Lampe mit dem Schornstein von Zoll zu Zoll erhitzt, wobei er erst gelb, blau und endlich dunkelgrau (mit einem Stich ins Bläuliche) wurde. Er machte nun

zwischen den Elongationen 20 und 1:

40 Oscil. in 2′ 14″,0

1 Oscil. = 3″,3500

Nachdem er bis zum Glühen erhitzt worden war:

16 Oscil. in 53″,0

1 Oscil. = 3″,316

Gold.

Ein Stab von reinem Golde gab ohne Gewicht:

400 Oscil. in 14′ 57″,0

1 Oscil. = 2″,2425

Mit der Berzelius'schen Lampe mit Schornstein erhitzt, gab er nach dem Erkalten:

30 Oscil in 1′ 13″,1

1 Oscil. = 2″,440

Die elastische Kraft hatte also bedeutend abgenommen; dabei war der Stab ganz weich geworden und konnte sich kaum aufrecht erhalten.

Einfluss der Temperatur auf die elastische Nachwirkung.

Wir haben in der Einleitung gesehen, dass die Schwingungsweiten bei verschiedenen Metallen in sehr verschiedenem Verhältniss abnehmen, und dass diese Abnahme auch im luftleeren Raume stattfindet, und haben diese Erscheinung der elastischen Nachwirkung zugeschrieben.

Man kann daraus schliessen, dass die Abnahme der Schwingungsweiten ein Mittel an die Hand giebt, die Aenderung, die die elastische Nachwirkung durch den Einfluss der Temperatur erleidet, zu beobachten: deshalb wurde diese Abnahme immer mit beobachtet; es bleibt uns also nur noch übrig, die Aenderung, die diese Abnahme durch bleibende oder vorübergehende Temperaturerhöhungen erlitt, aus den Beobachtungen abzuleiten.

Da alle Beobachtungen im lufterfüllten Raume gemacht wurden, und überdies die Stäbe immer eine sehr breite Fläche dem Widerstande der Luft entgegensetzten, so war der Einfluss dieses Widerstandes auf das Verhältniss der Abnahme der Schwingungsweiten gewiss sehr gross, und um die Grösse der elastischen Nachwirkung aus diesen Beobachtungen zu finden, wäre vor allen Dingen nöthig, die Gesetze des Widerstandes der Luft genau zu kennen; diese sind uns aber nur sehr unvollkommen bekannt; es ist also unmöglich, die genauen Werthe der elastischen Nachwirkung aus den vorliegenden Beobachtungen zu berechnen, und wir müssen uns mit allgemeinen Folgerungen aus denselben begnügen.

Wenn ein Stab zwischen denselben Elongationen, bei verschiedener Temperatur, eine verschiedene Anzahl von Schwingungen macht, so war der Einfluss der Temperatur auf die

elastische Nachwirkung bewiesen; nahm die Anzahl der Schwingungen zu, so hatte die Nachwirkung abgenommen, und umgekehrt.

1) *Silber.* Der Stab macht zwischen denselben Elongationen in der Wärme 30 Schwingungen, in der Kälte 62; die elastische Nachwirkung nimmt also durch Erhöhung der Temperatur bedeutend zu.

Derselbe Stab von Silber, mit einem andern Gewicht beschwert, macht bei der gewöhnlichen Temperatur 175 Schwingungen zwischen der Elongation 30 und 1; nachdem er bis nahe an die Glühhitze erhitzt worden, macht er nach dem Erkalten zwischen nahe denselben Elongationen an 82 Schwingungen; dabei hat seine Elasticität im Verhältniss von

$$1 : 1{,}00613$$

zugenommen.

Man sieht also, dass die elastische Nachwirkung durch Erhöhung der Temperatur zunimmt, während die Elasticität selbst abnimmt; wenn man aber den Stab bis zu einer ziemlich hohen Temperatur (in welcher er weicher wurde) erhitzte und wieder erkalten liess, so fand sich, dass sowohl Nachwirkung als Elasticität zugenommen hatten.

2) *Messing.* Die Nachwirkung nimmt ebenfalls bei Erhöhung der Temperatur zu, doch in weit geringerem Grade, als bei Silber. Nach vorübergehendem Einfluss einer bedeutenden Hitze hatte bei einem Stabe die Nachwirkung abgenommen; bei einem Drath, der nacheinander immer mehr erhöhten Hitzgraden ausgesetzt worden war (von welchen der letzte bis zum Glühen ging), hatte die Nachwirkung immer mehr abgenommen; die Elasticität hatte erst zu-, dann abgenommen.

3) *Kupfer.* Bei einem dünnen Drath von Kupfer, welcher der Glühhitze ausgesetzt worden war, hatte die Nachwirkung nach dem Erkalten bedeutend zugenommen, während die Elasticität abgenommen hatte; dasselbe fand bei einem dicken Drath statt. Bei einem Stabe von Kupfer hatte nach geringer Erhitzung die Nachwirkung bedeutend abgenommen, während die Elasticität zugenommen hatte; bei noch höhern Hitzgraden, die aber noch nicht die Glühhitze erreichten, nahm die Nachwirkung noch ein wenig ab, und die Elasticität noch ein wenig zu; nachdem aber der Stab bis zum Glühen erhitzt worden war, schlug er, mit demselben Gewicht beschwert, um; die Elasticität desselben hatte also gewiss bedeutend abgenommen; von der Veränderung der Nachwirkung lässt sich aber nichts sagen, da keine Schwingungsbeobachtungen angestellt werden konnten.

4) *Zink.* Bei gewalztem Zink brachte eine vorübergehende Temperaturerhöhung, die fast bis zum Gelbanlaufen ging, eine kleine Veränderung in der Nachwirkung hervor, und dabei eine grosse Vermehrung in der Elasticität.



5) *Platina.* Nach vorübergehender Erhitzung hat die Nachwirkung abgenommen und die Elasticität zugenommen; dies fand auch statt, wenn die Erhitzung bis zum Glühen getrieben worden war.

6) *Gusseisen.* Die Nachwirkung nimmt sehr bedeutend mit der Temperatur zu; über die Einwirkung vorübergehender Hitze sind keine Versuche gemacht worden.

7) *Stahl.* Bei Erbitzung der Temperatur nimmt die Nachwirkung bei weichem Stahl zu; nach vorübergehender Erhitzung, die noch über das Blauanlaufen hinausgegangen ist, hat die Nachwirkung bei stark gehärtetem Stahl abgenommen, während die Elasticität zugenommen hat; bei weichem Stahl dagegen hat die Nachwirkung nach der Erhitzung zugenommen, wenn die Erhitzung beinahe bis zum Glühen ging, obgleich die Elasticität ebenfalls zugenommen hatte.

8) *Eisen.* Die Nachwirkung nimmt, wie bei allen Metallen, mit der Temperaturerhöhung zu.

9) *Gold.* Die Nachwirkung nimmt mit der Erhöhung der Temperatur zu; nach vorübergehender Erhitzung findet sich ebenfalls, nach dem Erkalten, dass sie bedeutend zugenommen, während die Elasticität abgenommen hat.

Man kann aus dem Vorhergehenden den Schluss ziehen, dass die Nachwirkung immer mit der Temperaturerhöhung zunimmt; wenn aber ein Metall nur vorübergehend erhitzt wird, so findet sich gewöhnlich, nach dem Erkalten, die Nachwirkung vermindert, wenn die Temperaturerhöhung unterhalb der Glühhitze geblieben ist; nur bei einigen Metallen vermehrt sie sich wieder, wenn die Erhitzung über die Glühhitze hinausgetrieben wird.

ВѢКОВЫЯ ВОЗМУЩЕНІЯ

СЕМИ БОЛЬШИХЪ ПЛАНЕТЪ

Д. ПЕРЕВОЩИКОВА.

(Читано 7-го декабря 1855 и 7-го ноября 1856 года.)

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ.

ВОЗМУЩЕНІЯ ГОДИЧНО-ВѢКОВЫЯ.

Изслѣдованія Лагранжа о вѣковыхъ возмущеніяхъ шести планетъ, помѣщенныя въ «Запискахъ Берлинской Академіи Наукъ» на 1781 и 1782 г., по сущности своего предмета, раздѣляются на три части: въ первой содержатся общія формулы, выражающія измѣненія элементовъ планетной орбиты отъ силъ, возмущающихъ эллиптическое обращеніе планеты около солнца; во второй же — приложеніе этихъ формулъ къ вычисленію ежегодныхъ вѣковыхъ перемѣнъ въ величинахъ эксцентрицитетовъ и наклоненій, въ долготахъ абсидовъ и восходящихъ узловъ. Если бы перемѣны въ эксцентрицитетахъ и наклоненіяхъ продолжались непрерывно и въ безконечность, то современемъ необходимо произошло бы разстройство солнечной системы; разсмотрѣніе возможности или невозможности такого разстройства составляетъ любопытный космогоническій вопросъ, извѣстный подъ именемъ *остойчивости солнечной системы*; Лагранжъ занимался имъ въ третьей части своихъ изслѣдованій практически, т. е. посредствомъ вычисленій онъ увѣрился, что въ общихъ выраженіяхъ

$$f \sin \omega = M \sin (gt + \beta) + M_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + \ldots,$$
$$\tang I \sin N = M \sin \beta + M_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + \ldots$$

и пр.

въ которыхъ f, ω, I и N изображаютъ эксцентрицитетъ, долготу перигелія, наклоненіе и долготу узла планетной орбиты, коеффиціенты M, M_1, и пр. весьма малы, и количества g, g_1, и пр. извлекаемыя изъ уравненій, которыхъ степени равняются числу разсматриваемыхъ планетъ, всѣ суть дѣйствительныя и неравныя между собою. Послѣ того Ла-

гранжъ замѣчаетъ: «Найденные нами корни зависятъ отъ предположенныхъ планетныхъ «массъ, и потому надобно вообще доказать, что эти корни останутся неравными и дѣй«ствительными при всякихъ величинахъ массъ. Такое доказательство не трудно, когда «разсматривается взаимное дѣйствіе только двухъ планетъ, потому что тогда корни опре«дѣляются изъ уравненія второй степени; но при разсматриваніи взаимнаго дѣйствія «многихъ планетъ, степень уравненія возвышается и увеличивается трудность въ заклю«ченіи à priori о свойствахъ его корней. Впрочемъ, кажется, не невозможно побѣдить «затрудненіе особеннымъ аналитическимъ пріемомъ; я намѣренъ заняться этимъ вопро«сомъ, любопытнымъ и для анализа вообще и для физической астрономіи; теперь же «скажу, что найденные корни g, g_1, g_2, и пр. такъ много разнятся между собою, что «небольшія перемѣны въ принятыхъ массахъ планетъ не могутъ ихъ сдѣлать ни равны«ми, ни мнимыми».

Лапласъ предупредилъ намѣреніе Лагранжа разсужденіемъ, напечатаннымъ въ «Запискахъ Парижской Академіи Наукъ» на 1784 г., и въ которомъ онъ доказалъ, что вѣковыя измѣненія эксцентрицитетовъ и наклоненій планетныхъ орбитъ заключаются въ тѣсныхъ предѣлахъ, если всѣ планеты обращаются около солнца по одному направленію, и если эксцентрицитеты и наклоненія въ какую нибудь эпоху имѣли весьма малыя величины *). Это доказательство взошло въ составъ великаго Лапласова творенія, котораго первыя двѣ части подъ названіемъ «Traité de Mécanique céleste» вышли въ свѣтъ въ 1799 г. Доказавъ à priori остойчивость солнечной системы относительно эксцентрицитетовъ и наклоненій, Лапласъ не нашелъ уже нужнымъ повторять вычисленія Лагранжа, и въ третьемъ томѣ своей «Небесной механики» изданномъ въ 1802 г., помѣстилъ только вычисленія годично-вѣковыхъ измѣненій эксцентрицитетовъ, долготъ перигеліевъ, долготъ восходящихъ узловъ и наклоненій на неподвижной эклиптикѣ 1750 г. и на эклиптикѣ истинной или подвижной, принявъ въ основаніе элементы планетныхъ орбитъ, гораздо точнѣйшіе тѣхъ, которые принужденъ былъ употребить Лагранжъ.

Послѣ того астрономы еще точнѣе опредѣлили элементы семи большихъ планетъ, и потому надобно было исправить вычисленія «Небесной Механики». Этотъ трудъ предпринималъ Понтекуланъ и найденные результаты помѣстилъ въ третьемъ томѣ своей «Аналитической теоріи системы міра». Но какъ они переполнены ошибками вычисленій, то Леверье, по справедливости, нашелъ необходимымъ снова передѣлать всѣ вычисленія Лагранжа, съ соблюденіемъ возможной строгости въ опредѣленіи вышеупомянутыхъ корней g, g_1, и пр. и коеффиціентовъ M, M_1, и пр. Обширный трудъ Леверье принятъ астрономами съ съ полной довѣренностью.

---

*) Въ теоретическомъ отношеніи тѣмъ же предметомъ занимался Пуассонъ, и особенное объ немъ разсужденіе помѣстилъ въ «Connaissance des temps» на 1836 г. Здѣсь подтверждено лапласово доказательсто объ остойчивости солнечной системы относительно эксцентрицитетовъ и наклоненій при условіяхъ, принятыхъ Лапласомъ, и потомъ разсмотрѣны исключительные случаи, въ которыхъ измѣненія эксцентрицитетовъ и наклоненій могутъ выйти изъ тѣсныхъ предѣловъ, и тогда остойчивость солнечной системы становится сомнительной. Но до сихъ поръ такихъ случаевъ не открыто; слѣд. теорія Лапласа остается неприкосновенной.



Въ прибавленіи къ запискѣ «Объ эллиптическомъ движеніе планетъ» я помѣстилъ новое вычисленье массы земли, котораго результатъ, $\frac{1}{359325}$, близко подходитъ къ массѣ земли, $\frac{1}{359551}$, показанной въ «Мѣсяцословѣ» на 1855 г.; по этому мнѣ любопытно было узнать, какія перемѣны выйдутъ въ числахъ Леверье отъ этой массы. Не измѣнивъ всѣхъ прочихъ данныхъ Леверье, я вычислилъ коеффиціенты, выражающія дѣйствія земли на Меркурія и Венеру, т. е. коеффиціенты, которые, согласно съ Лагранжемъ, изображаются чрезъ (0,2), [0,2] и (1,2), [1,2], и нашелъ

$$(0,2) = 0''\!,884164,\ [0,2] = 0''\!,419417,$$
$$(1,2) = 6,803375,\ [1,2] = 5,664708.$$

Тѣже самые коеффиціенты, при массѣ земли $= \frac{1}{354986}$, по вычисленію Леверье, суть

$$(0,2) = 0''\!,895098,\ [0,2] = 0''\!,424596,$$
$$(1,2) = 6,887481,\ [1,2] = 5,734684.$$

Эти числа, измѣненныя пропорціонально принятымъ массамъ земли, даютъ:

$$(0,2) = 0''\!,884290,\ [0,2] = 0''\!,419463,$$
$$(1,2) = 6,804311,\ [1,2] = 5,665435.$$

Здѣсь видно, что разности между (1,2) и [1,2] не могутъ быть принебрежены, потому что онѣ начинаются уже съ третьихъ десятичныхъ цыфръ. Нѣсколько разъ и въ разныя времена я повѣрялъ мои вычисленія, и всегда получалъ одни и тѣже результаты. Это заставило меня обратиться къ тѣмъ изъ подобныхъ коеффиціентовъ, въ формулы которыхъ не входитъ масса земли, и тутъ для многихъ изъ нихъ нашелъ я числа, много отличающіяся отъ чиселъ Леверье, какъ то можно видѣть изъ слѣдующихъ примѣровъ:

	по вычисленію Леверье	по моимъ вычисл.
(4,5) =	7″,367454	7″,374477
(5,4) =	18,205298	18,216580
[4,5] =	4,816481	4,821088
[5,4] =	11,901736	11,909200

Послѣ такихъ разностей въ результатахъ при одинаковыхъ данныхъ, я счелъ необходимымъ вычислить годично-вѣковое измѣненіе одного изъ элементовъ какой нибудь планеты и взявъ совершенно случайно долготу перигелія Венеры, получилъ

$$\delta\omega' = -0''\!,734887 - 2''\!,912576\,\mu - 5''\!,296453\,\mu^{II} + 0''\!,832550\,\mu^{III}$$
$$+ 6,558209\,\mu^{IV} + 0,079850\,\mu^{V} + 0,003533\,\mu^{VI},$$

гдѣ μ, μ', и пр. означаютъ возможенныя поправки въ массахъ планетъ. Для той же самой величины Леверье нашелъ

$$\frac{d\omega'}{dt} = -1''\!,377 - 2''\!,91\,\mu - 5''\!,36\,\mu^{II} + 0''\!,26\,\mu^{III}$$
$$+ 6,56\,\mu^{IV} + 0,08\,\mu^{V} + 0,01\,\mu^{VI}$$

Разность между первыми членами этихъ двухъ выраженій уже совсѣмъ нетерпима, потому что отступательное движеніе перигелія Венеры вышло изъ моихъ вычисленій почти вдвое менѣе, нежели изъ вычисленій Леверье. Эти два числа суть алгебраическія суммы коеффиціентовъ при μ, μ', и пр., и какъ очевидно, что разность между ними происходитъ отъ коеффиціента при μ^{III}; то надобно было сперва сличить количества, входящія въ составъ этого коеффиціента, и потомъ вычислить его по формулѣ

$$(1,3) - [1,3]\frac{f'''}{f'}\cos(\omega^{III} - \omega^{I}),$$

въ которой f''', f', ω^{III} и ω' изображаютъ эксцентрицитеты и долготы перигеліевъ Марса и Венеры, и въ которой по моимъ вычисленіямъ

$$(1,3) = 0'',102035,\ [1,3] = 0'',058710;$$

по вычисленіямъ же Леверье,

$$(1,3) = 0'',102046,\ [1,3] = 0'',058716;$$

слѣд. при этихъ числахъ, формула не можетъ дать много разнящихся результатовъ; и дѣйствительно, по моимъ даннымъ, коеффиціентъ при $\mu^{III} = 0'',102035 + 0'',730516 = 0'',832551$; по даннымъ же Леверье, онъ $= 0,102046 + 0,730586 = 0'',832632$, такъ что разность равняется только $0'',000081$. Я не могу сказать, какимъ образомъ Леверье нашелъ $0'',26$ вмѣсто $0'',83$, потому что въ своихъ вычисленіяхъ онъ не оставилъ никакихъ подробностей, необходимыхъ для ихъ повѣрки и для открытія возможныхъ ошибокъ.

Кромѣ приведенныхъ здѣсь результатовъ, многіе другіе убѣдили меня, что вычисленія Леверье годично-вѣковыхъ возмущеній въ эксцентрицитетахъ и долготахъ перигеліевъ, въ наклоненіяхъ и въ долготахъ восходящихъ узловъ нельзя считать строго точными; а какъ эти возмущенія необходимы для практической астрономіи, и собственно только въ нихъ имѣетъ она надобность, потому что вопросъ объ остойчивости солнечной системы принадлежитъ къ теоретическимъ вопросамъ второстепенной важности для астрономовъ *); то я рѣшился вновь передѣлать всѣ вычисленія, принявъ тѣже самыя массы планетъ, кромѣ массы земли, которыя употребилъ Леверье во второй части своихъ изслѣдованій, потому что въ вычисленіяхъ первой ихъ части для массъ Меркурія, Венеры, Земли и Марса были взяты имъ числа

$$\frac{1}{1909706},\ \frac{1}{401839},\ \frac{1}{356354},\ \frac{1}{2680337};$$

во второй же части числа

$$\frac{1}{3000000},\ \frac{1}{401847},\ \frac{1}{354986},\ \frac{1}{2680637}.$$

---

*) Позволительно предположить, что и Лапласъ тоже думалъ объ этомъ предметѣ, потому что въ «Небесной механикѣ» онъ не помѣстилъ вычисленій, относящихся къ опредѣленію общихъ величинъ эксцентрицитетовъ, долготъ перигеліевъ, и пр.



Не смотря на годичную усердную работу, я не могу ожидать безусловной довѣренности къ результатамъ моего труда, почему въ представляемой запискѣ я удержалъ всѣ подробности вычисленій, необходимыя для скорой и легкой ихъ повѣрки; особенно же подробности опредѣленія главныхъ коеффиціентовъ $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ и $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, выражаемыхъ рядами, изъ которыхъ иногда должно было брать членовъ по десяти, чтобъ имѣть ихъ величины, точными до семи десятичныхъ цыфръ.

Изслѣдованія Лаверье, какъ выше замѣчено, раздѣлены на двѣ части: въ первой содержатся формулы и вычиленія общихъ интеграловъ, изъ которыхъ извлекаются величины эксцентрицитетовъ, долготъ перигеліевъ, и пр., соотвѣтствующихъ всякому времени послѣ и до принятой эпохи. Всѣ эти формулы взяты изъ «Небесной Механики» Лапласа, который самъ большую часть изъ нихъ заимствовалъ отъ Лагранжа, и потому Леверье, пользуясь теоретическими рѣшеніями этихъ двухъ великихъ геометровъ, усовершенствовалъ только практическое вычисленіе коеффиціентовъ и аргументовъ упомянутыхъ интеграловъ. Но какъ формулы Лагранжа и Лапласа ограничиваются членами, зависящими только отъ первыхъ степеней эксцентрицитетовъ и наклоненій; то Лаверье во второй части своихъ изслѣдованій опредѣляетъ величину членовъ третьяго порядка относительно тѣхъ же самыхъ элементовъ, и потомъ переходитъ къ выраженіямъ годично-вѣковыхъ измѣненій эксцентрицитетовъ, и пр. И такъ, Леверье избралъ путь, обратный порядку вычисленій Лагранжа, и предпочтительно занимался вопросомъ объ остойчивости солнечной системы; но какъ этотъ вопросъ астрономически должно считать второстепеннымъ; то я вполнѣ слѣдовалъ Лагранжу, и только позволялъ себѣ перемѣнять видъ его формулъ въ виды, употребительные въ астрономіи, стараясь притомъ сократить путь въ достиженіи формулъ, выражающихъ годично-вѣковыя измѣненія элементовъ семи большихъ планетъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ уничтожить затрудненія, которыя казались мнѣ способными останавливать читателей, не совсѣмъ знакомыхъ съ предметомъ, въ первый разъ излагаемомъ на русскомъ языкѣ.

Наконецъ я долженъ сдѣлать еще два замѣчанія: во-первыхъ, представляемую при семъ записку я назвалъ *первымъ отдѣленіемъ*, потому что за нею послѣдуютъ и вопросъ объ остойчивости солнечной системы и разсмотрѣніе членовъ третьяго порядка; во вторыхъ, я не занимался вѣковыми измѣненіями элементовъ Нептуна, по той причинѣ, что изслѣдованія объ этой новой планетѣ составляютъ предметъ особеннаго сочиненія г. профессора Ковальскаго, получившаго одобрительную Демидовскую премію. Однако г. Ковальскій годично-вѣковыя возмущенія элементовъ Юпитера, Сатурна и Урана принялъ тѣ самыя, которыя нашелъ Леверье, и какъ по моимъ вычисленіямъ, числовыя величины этихъ возмущеній также надобно немного исправить; то мнѣ не слѣдовало бы опустить вычисленій относительно Нептуна; но въ числа Леверье входятъ члены третьяго порядка, почему я предполагаю дополнить мой пропускъ по опредѣленіи этихъ членовъ. Эту отсрочку считаю законною еще по тому, что, можетъ быть, масса Нептуна будетъ опредѣлена точнѣе, нежели въ настоящее время.

---

1. Въ запискѣ объ «Элептическомъ движеніи планетъ» видѣли (чл. 11), что обращеніе планеты m около солнца выражается уравненіями

$$\frac{d^2x}{(dt)^2}+\frac{\mu x}{r^3}=0,$$
$$\frac{d^2y}{(dt)^2}+\frac{\mu y}{r^3}=0,$$
$$\frac{d^2z}{(dt)^2}+\frac{\mu z}{r^3}=0,$$

въ которыхъ x, y, z суть координаты планеты относительно солнца M, $\mu=M+m$, и r — разстояніе планеты отъ солнца. Если положенія другихъ планетъ m', m'' и пр., также относительно солнца опредѣляются координатами x', y', z', x'', y'', z'', и пр. и если ихъ разстоянія отъ M и отъ m изобразимъ чрезъ r', r'', и пр. и чрезъ

$$\rho'=\sqrt{\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\}},$$
$$\rho''=\sqrt{\{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2\}},$$
и пр.

то ихъ дѣйствія на m и M, разложенныя по осямъ координатъ, будутъ

$$\frac{m'(x'-x)}{\rho'^3},\ -\frac{m'x'}{r'^3},$$
$$\frac{m'(y'-y)}{\rho'^3},\ -\frac{m'y'}{r'^3},$$
$$\frac{m'(z'-z)}{\rho'^3},\ -\frac{m'z'}{r'^3};$$
$$\frac{m''(x''-x)}{\rho''^3},\ -\frac{m''x''}{r''^3},$$
$$\frac{m''(y''-y)}{\rho''^3},\ -\frac{m''y''}{r''^3},$$
$$\frac{m''(z''-z)}{\rho''^3},\ -\frac{m''z''}{r''^3};\ \text{и пр.}$$

слѣдственно уравненія, выражающія обращеніе планеты m, превратятся въ

$$\frac{d^2x}{(dt)^2}+\frac{\mu x}{r^3}=m'\left[\frac{x'-x}{\rho'^3}-\frac{x'}{r'^3}\right]+m''\left[\frac{x''-x}{\rho''^3}-\frac{x''}{r''^3}\right]+\ldots,$$
$$\frac{d^2y}{(dt)^2}+\frac{\mu y}{r^3}=m'\left[\frac{y'-y}{\rho'^3}-\frac{y'}{r'^3}\right]+m''\left[\frac{y''-y}{\rho''^3}-\frac{y''}{r''^3}\right]+\ldots,$$
$$\frac{d^2z}{(dt)^2}+\frac{\mu z}{r^3}=m'\left[\frac{z'-z}{\rho'^3}-\frac{z'}{r'^3}\right]+m''\left[\frac{z''-z}{\rho''^3}-\frac{z''}{r''^3}\right]+\ldots.$$

Положивъ

$$R=m'\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}-\frac{1}{\rho'}\right)+m''\left(\frac{xx''+yy''+zz''}{r''^3}-\frac{1}{\rho''}\right)+\ldots,$$

получимъ

$$\frac{dR}{dx}=m'\left(\frac{x'}{r'^3}-\frac{x'-x}{\rho'^3}\right)+m''\left(\frac{x''}{r''^3}-\frac{x''-x}{\rho''^3}\right)+\ldots,$$

и пр.

такъ что выйдетъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{(dt)^2}+\frac{\mu x}{r^3}+\frac{dR}{dx}=0,\\ \frac{d^2y}{(dt)^2}+\frac{\mu y}{r^3}+\frac{dR}{dy}=0,\\ \frac{d^2z}{(dt)^2}+\frac{\mu z}{r^3}+\frac{dR}{dz}=0.\end{aligned}\right\}\ldots.(A).$$

2. Изъ уравненій (A) выводимъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{xd^2y-yd^2x}{(dt)^2}=\frac{dR}{dx}y-\frac{dR}{dy}x=\frac{dc}{dt},\\ \frac{xd^2z-zd^2x}{(dt)^2}=\frac{dR}{dx}z-\frac{dR}{dz}x=\frac{dc'}{dt},\\ \frac{yd^2z-zd^2y}{(dt)^2}=\frac{dR}{dy}z-\frac{dR}{dz}y=\frac{dc''}{dt},\end{aligned}\right\}\ldots(A').$$

и по интегрированіи, получимъ

$$\frac{xdy-ydx}{dt}=c,\ \frac{xdz-zdx}{dt}=c',\ \frac{ydz-zdy}{dt}=c''\ldots(1).$$

Если первое изъ этихъ уравненій помножимъ на z, второе — на $-y$, и третье — на x; то сумма произведеній

$$cz-c'y+c''x=0\ldots.(2)$$

покажетъ, что планета m обращается въ плоскости, проходящей чрезъ солнце M, и которой положенье опредѣляется количествами c, c', c''. Если эти количества суть постоянныя, что бываетъ въ томъ случаѣ, когда m не подлежитъ дѣйствію планетъ m', m'', и пр.; то упомянутая плоскость имѣетъ опредѣленное и постоянное положеніе; но при дѣйствіи m', m'', и пр. измѣненіе ея положенія зависитъ отъ dc, dc', dc''. Такое измѣненіе называется *возмущеніемъ*. Впрочемъ, въ продолженіе элемента времени dt, когда координаты x, y, z получаютъ приращенія dx, dy, dz, можно считать c, c', c'' постоянными. Дѣйствительно, уравненія (1), помноженныя соотвѣтственно на dz, $-dy$ и dx, даютъ въ суммѣ произведеній

$$cdz-c'dy+c''dx=0,$$

и тоже самое получимъ, дифференцируя урав. (2) въ предположеніи c, c', c'' постоянными.

3. Если изъ уравненій (A) выведемъ еще два уравненія:

$$\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{(dt)^2}+\frac{\mu r}{r^2}+\frac{dR}{dx}x+\frac{dR}{dy}y+\frac{dR}{dz}z=0\ldots(3),$$

$$\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{(dt)^2}+\frac{\mu dr}{r^2}+\frac{dR}{dx}dx+\frac{dR}{dy}dy+\frac{dR}{dz}dz=0\ldots(4),$$

и второе изъ нихъ помножимъ на x, первое же — на dx; то разность произведеній будетъ

$$\frac{cd^2y+c'd^2z}{dt}-\mu d\frac{x}{r}+\left(\frac{dR}{dy}c+\frac{dR}{dz}c'\right)dt=0;$$

также найдемъ

$$\frac{cd^2x-c''d^2z}{dt}+\mu d\frac{y}{r}+\left(\frac{dR}{dx}c-\frac{dR}{dz}c''\right)dt=0,$$

$$\frac{c'd^2x+c''d^2y}{dt}+\mu d\frac{z}{r}+\left(\frac{dR}{dx}c'+\frac{dR}{dy}c''\right)dt=0.$$

Здѣсь

$$\frac{cd^2y+c'd^2z}{dt}=\frac{d(cdy+c'dz)}{dt}-\frac{dcdy+dc'dz}{dt},$$

$$\frac{cd^2x-c''d^2z}{dt}=\frac{d(cdx-c'dz)}{dt}-\frac{dcdx-dc''dz}{dt},$$

$$\frac{c'd^2x+c''d^2y}{dt}=\frac{d(c'dx+c''dy)}{dt}-\frac{dc'dx+dc''dy}{dt},$$

и если положимъ

$$\left(\frac{dR}{dy}c+\frac{dR}{dz}c'\right)dt-\frac{dcdy+dc'dz}{dt}=df,$$

$$\left(\frac{dR}{dx}c-\frac{dR}{dz}c''\right)dt-\frac{dcdx-dc''dz}{dt}=df',$$

$$\left(\frac{dR}{dx}c'+\frac{dR}{dy}c''\right)dt-\frac{dc'dx+dc''dy}{dt}=df'';$$

то, по интегрированіи, получимъ

$$\left.\begin{aligned}\mu\frac{x}{r}&=\frac{cdy+c'dz}{dt}+f,\\ \mu\frac{y}{r}&=-\frac{cdx+c''dz}{dt}-f',\\ \mu\frac{z}{r}&=-\frac{c'dx+c''dy}{dt}-f''.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(A'').$$

Изъ этихъ уравненій не трудно вывести уравненіе

$$\mu r=c^2+c'^2+c''^2+fx-f'y-f''z$$

второй степени относительно координатъ x, y, z; слѣд. орбиты планетъ суть коническія сѣченія, которыхъ элементы зависятъ отъ количествъ f, f', f'', также не измѣняющихся при первыхъ дифференціалахъ, какъ и количества c, c', c''. Дѣйствительно, когда c, c', c'' и f, f', f'' примемъ постоянными, тогда выйдетъ

$$\mu dr=fdx-f'dy-f''dz,$$

и тоже самое получилъ изъ урав. (A''), помноживъ ихъ соотвѣтственно на dx, dy, dz, и сложивъ произведенія.

И такъ, *при взаимномъ дѣйствіи планетъ, всѣ элементы ихъ орбитъ перемѣняются по истеченіи каждаго мгновенія, въ продолженіе котораго можемъ считать ихъ постоянными.*

4. Интегралъ урав. (4) есть

$$\frac{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}{(dt)^2}-\frac{2\mu}{r}+h+2\int(dR)=0,$$

гдѣ $(dR) = \frac{dR}{dx}dx + \frac{dR}{dy}dy + \frac{dR}{dz}dz$ означаетъ полный дифференціалъ функціи R относительно координатъ возмущаемой планеты, и постоянное $h = \frac{\mu}{a}$ въ невозмущаемой орбитѣ, которой большая полуось $= a$; слѣд.

$$\frac{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}{(dt)^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int(dR) = 0 \ldots (5)$$

Придавъ это уравненіе къ урав. (3), въ которомъ, для краткости, чрезъ (R) изобразимъ

$$\frac{dR}{dx}x + \frac{dR}{dy}y + \frac{dR}{dz}z,$$

получимъ сумму, въ которой

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2(r^2)}{(dt)^2} = \frac{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}{(dt)^2} + \frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{(dt)^2} \ldots (c);$$

слѣд. будетъ

$$\frac{d^2(r^2)}{(dt)^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{a} - 2(R) - 4\int(dR) \ldots . (a),$$

и для невозмущаемаго эллиптическаго движенья

$$\frac{d^2(r^2)}{(dt)^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{a} \ldots . (b).$$

Если теперь чрезъ δr изобразимъ возмущенія радіуса — вектора, вмѣсто r поставимъ $r + \delta r$ въ уравненіе (a) и ограничимся только членами, содержащими δr въ первой степени, и членами перваго порядка относительно планетныхъ массъ; то получимъ уравненіе

$$\frac{d^2(r^2+2r\delta r)}{(dt)^2} = \frac{2\mu}{r\left(1+\frac{\delta r}{r}\right)} - \frac{2\mu}{a} - 2(R) - 4\int(dR),$$

въ которомъ

$$\frac{2\mu}{r\left(1+\frac{\delta r}{r}\right)} = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu\delta r}{r^2};$$

слѣд. по урав. (b),

$$\frac{d^2(r\delta r)}{(dt)^2} + \frac{\mu\delta r}{r^2} + (R) + 2\int(dR) = 0 \ldots . (I)$$

5. Пусть dv будетъ изображать уголъ, содержащійся между r и $r + dr$, и лежащій въ плоскости возмущаемой планеты. Въ запискѣ «Объ эллиптическомъ движеніи планетъ» доказано, что

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = r^2(dv)^2 + (dr)^2;$$

слѣд.

$$r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - \frac{rd^2r}{(dt)^2} - \frac{\mu}{r} = (R).$$

Отъ перемѣны v на $v + \delta v$, и r на $r + \delta r$, выйдетъ

$$\frac{2r^2dv.d(\delta v)}{(dt)^2} + 2r\delta r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - \frac{d^2r\delta r+rd^2(\delta r)}{(dt)^2} + \frac{\mu\delta r}{r^2} = (R),$$

куда вмѣсто $r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ должно вставить $\frac{d^2r}{(dt)^2}+\frac{\mu}{r^2}$, отчего получимъ

$$\frac{2r^2dvd(\delta v)}{(dt)^2}-\frac{rd^2(\delta r)-d^2r.\delta r}{(dt)^2}+\frac{3\mu\delta r}{r^2}-(R)=0.$$

Но какъ урав. (I) даетъ

$$\frac{3\mu\delta r}{r^2}=-\frac{3d^2(r\delta r)}{(dt)^2}-3(R)-6\int(dR);$$

то

$$\frac{r^2dvd(\delta v)}{(dt)^2}-\frac{2rd^2(\delta r)+d^2r\delta r+3drd(\delta r)}{(dt)^2}-2(R)-3\int(dR)=0.$$

Вставивъ сюда $dt\sqrt{\mu a(1-f^2)}$ вмѣсто r^2dv, и взявъ интегралъ, получимъ наконецъ

$$\delta v=\frac{2rd(\delta r)+dr\delta r}{dt\sqrt{\mu a(1-f^2)}}+\frac{2\int(R)dt}{\sqrt{\mu a(1-f^2)}}+\frac{3\int dt\int(dR)}{\sqrt{\mu a(1-f^2)}}\ldots\ldots(II).$$

6. Остается составить выраженіе измѣненій широты $\delta\lambda$. Для этого изъ уравненій (A') выводимъ

$$\frac{xdy-ydx}{dt}=\int\left(\frac{dR}{dx}y-\frac{dR}{dy}x\right)dt+C,$$

$$\frac{xdz-zdx}{dt}=\int\left(\frac{dR}{dx}z-\frac{dR}{dz}x\right)dt+C',$$

$$\frac{ydz-zdy}{dt}=\int\left(\frac{dR}{dy}z-\frac{dR}{dz}y\right)dt+C'',$$

гдѣ C, C', C'' суть постоянныя количества, содержащіяся въ выраженіяхъ величинъ c, c', c'' и опредѣляющія первоначальное положеніе плоскости возмущаемой орбиты. Изъ перваго уравненія извлекаемъ

$$\frac{dt}{xdy-ydx}=\frac{1}{C}-\frac{1}{C^2}\int\left(\frac{dR}{dx}y-\frac{dR}{dy}x\right)dt;$$

второе же и третье даютъ

$$\frac{z(xdy-ydx)}{dt}=C'y-C''x+y\int\left(\frac{dR}{dx}z-\frac{dR}{dz}x\right)dt-x\int\left(\frac{dR}{dy}z-\frac{dR}{dz}z\right)dt;$$

слѣд.

$$z=\frac{C'y-C''x}{C}+\frac{y}{C}\int\left(\frac{dR}{dx}z-\frac{dR}{dz}x\right)dt-\frac{x}{C}\int\left(\frac{dR}{dy}z-\frac{dR}{dz}y\right)dt-\frac{C'y-C''x}{C^2}\int\left(\frac{dR}{dx}y-\frac{dR}{dy}x\right)dt.$$

Но какъ въ невозмущаемомъ эллиптическомъ движеніи

$$z=\frac{C'y-C''x}{C},\ C=\cos I\sqrt{\mu a(1-f^2)};$$

то измѣненіе или возмущеніе ординаты z есть

$$\delta z=\frac{y}{C}\int\left(\frac{dR}{dx}z-\frac{dR}{dz}x\right)dt-\frac{x}{C}\int\left(\frac{dR}{dy}z-\frac{dR}{dz}y\right)dt-\frac{z}{C}\int\left(\frac{dR}{dx}y-\frac{dR}{dy}x\right)dt.$$

Чтобъ перейдти отсюда къ $\delta\lambda$, изъ $\tang\lambda = \frac{z}{r\cos\lambda}$ находимъ

$$\delta\lambda = \frac{\cos\lambda\delta z}{r};$$

слѣд.

$$\delta\lambda = \frac{y\cos\lambda}{r\cos I\sqrt{\mu a(1-f^2)}}\int\left(\frac{dR}{dx}z - \frac{dR}{dz}x\right)dt - \frac{x\cos\lambda}{r\cos I\sqrt{\mu a(1-f^2)}}\int\left(\frac{dR}{dy}z - \frac{dR}{dz}y\right)dt$$

$$-\frac{z\cos\lambda}{r\cos I\sqrt{\mu a(1-f^2)}}\int\left(\frac{dR}{dx}y - \frac{dR}{dy}x\right)dt\ldots\ldots(III).$$

7. Если положимъ, что произвольная плоскость ординатъ xy есть самая плоскость возмущаемой орбиты, на которой за ось x — въ примемъ линію абсидовъ и геліоцентрическія долготы изобразимъ чрезъ l, l', и пр ; то выйдетъ

$$z = o,\ \lambda = o,\ I = o,\ \delta v = \delta l,$$

$$x = r\cos l,\ y = r\sin l,\ x' = r'\cos\lambda'\cos l',\ y' = r'\cos\lambda'\sin l',\ z' = r'\sin\lambda',$$

$$\rho' = \sqrt{[r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\lambda'\cos(l'-l)]},$$

$$R = m'\left(\frac{xx'+yy'}{r'^3} - \frac{1}{\rho'}\right) + \ldots = m'\left\{\frac{r\cos\lambda'\cos(l'-l)}{r'^2} - [r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\lambda'\cos(l'-l)]^{-\frac{1}{2}}\right\} + \ldots$$

$$(R) = m'\left\{\frac{r\cos\lambda'\cos(l'-l)}{r'^2} - \frac{rr'\cos\lambda'\cos(l'-l) - r^2}{\sqrt{[r'^2+r^2-2rr'\cos\lambda'\cos(l'-l)]^3}}\right\} + \ldots.$$

Изъ этого видно, что

$$(R) = \frac{dR}{dr}r.$$

Потомъ уравненія (II) и (III) перемѣнятся на

$$\delta l = \frac{2rd(\delta r) + dr\delta r}{dt\sqrt{\mu a(1-f^2)}} + \frac{2}{\sqrt{\mu a(1-f^2)}}\int\frac{dR}{dr}rdt + \frac{3}{\sqrt{\mu a(1-f^2)}}\int dt\int(dR)\ldots(IV),$$

$$\delta\lambda = -\frac{\sin l}{\sqrt{\mu a(1-f^2)}}\int r\cos l\frac{dR}{dz}dt + \frac{\cos l}{\sqrt{\mu a(1-f^2)}}\int r\sin l\frac{dR}{dz}dt\ldots.(V).$$

8. Таковы суть общія выраженія измѣненій радіуса — вектора (I), долготы и широты возмущаемой планеты. Теперь слѣдуетъ произвести содержащіяся въ нихъ интегрированія, для чего надобно разложить функцію R. Это разложеніе, соотвѣтственно нашей цѣли, ограничиваемъ первыми степенями эксцентрицитетовъ и наклоненій. Причемъ, для краткости, предположимъ, что возмущеніе производится дѣйствіемъ одной планеты m', которой долготы считаются на плоскости орбиты m, и чрезъ L' изображаются ея долготы на плоскости собственной ея орбиты. При такихъ предположеніяхъ, будетъ («Объ эллипт. движеніи» стр. 365).

$$\cos\lambda'\cos(l'-l) = \cos(L'-l),$$

$$R = m'\left\{\frac{r\cos(L'-l)}{r'^2} - [r'^2 + r^2 - 2rr'\cos(L'-l)]^{-\frac{1}{2}}\right\} = m'S.$$

Еслибы планеты m и m' обращались равномѣрно по кругамъ радіусовъ a и a'; то долготы

l и l' превратились бы въ среднія долготы $\zeta = nt + E$, $\zeta' = n't + E'$, гдѣ n и n' суть среднія движенія, и E, E' — среднія долготы въ эпоху, отъ которой считается время t; такъ что перемѣнятся r въ $a + \Delta r$, r' въ $a' + \Delta r'$, l въ $\zeta + \Delta l$, L' въ $\zeta' + \Delta l'$ (Объ элл. дв. стр. 364), и S въ

$$S_1 = \frac{a\cos(\zeta'-\zeta)}{a'^2} - [a'^2 + a^2 - 2a'a\cos(\zeta'-\zeta)],^{-\frac{1}{2}}$$

гдѣ, какъ извѣстно,

$$\frac{\Delta r}{a} = -f\cos(\zeta-\omega),\ \frac{\Delta r'}{a'} = -f'\cos(\zeta'-\omega'),$$
$$\Delta l = 2f\sin(\zeta-\omega),\ \Delta l' = 2f'\sin(\zeta'-\omega').$$

Потомъ, по теоремѣ Тейлора, найдемъ

$$S = S_1 + \frac{dS_1}{da}\Delta r + \frac{dS_1}{da'}\Delta r' + \frac{dS_1}{d\zeta}\Delta l + \frac{dS_1}{d\zeta'}\Delta l'.$$

И такъ задача приводится къ разложенію S_1.

9. Для краткости, примемъ $\zeta' - \zeta = \beta$, и положимъ

$$S_1 = \tfrac{1}{2}A^{(0)} + A^{(1)}\cos\beta + A^{(2)}\cos 2\beta + \ldots .$$

Этотъ рядъ можно представить сокращенно чрезъ

$$\tfrac{1}{2}A^{(0)} + \tfrac{1}{2}A^{(i)}\cos i\beta,$$

съ условіями, что подъ i разумѣются всѣ числа отъ $-\infty$ до $+\infty$, и $A^{(i)} = A^{(-i)}$. Для опредѣленія же коэффиціентовъ $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, и пр. сдѣлаемъ $\alpha = \frac{a}{a'}$, предполагая $a' > a$, и какъ вообще

$$(a'^2 - 2aa'\cos\beta + a^2)^{-s} = \frac{1}{a'^{2s}}(1 - 2\alpha\cos\beta + \alpha^2)^{-s},$$

гдѣ

$$(1 - 2\alpha\cos\beta + \alpha^2)^{-s} = (1 - \alpha . e^{\beta\sqrt{-1}})^{-s}(1 - \alpha . e^{-\beta\sqrt{-1}})^{-s};$$

то разложивъ производители по теоремѣ Ньютона и перемноживъ ряды, увидимъ, что

$$(1 - 2\alpha\cos\beta + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}\overset{(0)}{b_s} + \overset{(1)}{b_s}\cos\beta + \overset{(2)}{b_s}\cos 2\beta + \overset{(3)}{b_s}\cos 3\beta + \ldots (\alpha),$$

$$\left.\begin{aligned}
\overset{(0)}{b_s} = 2\Big[&1 + s^2\alpha^2 + \left(\frac{s.s+1}{1.2}\right)^2\alpha^4 + \left(\frac{s.s+1.s+2}{1.2.3}\right)^2\alpha^6 + \left(\frac{s.s+1.s+2.s+3}{1.2.3.4}\right)^2\alpha^8 \\
&+ \left(\frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\right)^2\alpha^{10} + \left(\frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4.s+5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\right)^2\alpha^{12} \\
&+ \left(\frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4.s+5.s+6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\right)^2\alpha^{14} + \left(\frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4.s+5.s+6.s+7}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}\right)^2\alpha^{16} + \ldots\Big], \\
\overset{(1)}{b_s} = 2\alpha\Big[&s + \frac{s}{1}.\frac{s.s+1}{1.\ 2}\alpha^2 + \frac{s.s+1}{1.\ 2}.\frac{s.s+1.s+2}{1.\ 2.\ 3}\alpha^4 + \frac{s.s+1.s+2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{s.s+1.s+2.s+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\alpha^6 \\
&+ \frac{s.s+1.s+2.s+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4}{1.\ 2.\ 3\ \ 4.\ 5}\alpha^8 + \frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.\frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4.s+5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\alpha^{10} \\
&+ \frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4.s+5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}.\frac{s.s+1.s+2.s+3.s+4.s+5.s+6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\alpha^{12} + \ldots\Big]
\end{aligned}\right\}(\delta)$$

Чтожъ касается до прочихъ коеффиціентовъ $\overset{(2)}{b_s}$, $\overset{(3)}{b_s}$, и пр., то каждый изъ нихъ опредѣляется посредствомъ двухъ предъидущихъ. Дѣйствительно, дифференціалъ ряда (α) относительно β есть

$$2\alpha s\,(1-2\alpha\cos\beta+\alpha^2)^{-s}.\sin\beta=(\overset{(1)}{b_s}\sin\beta+2\overset{(2)}{b_s}\sin 2\beta+3\overset{(3)}{b_s}\sin 3\beta+\ldots)\,(1-2\alpha\cos\beta+\alpha^2).$$

Отсюда посредствомъ формулъ

$$2\cos ix.\sin x=\sin(i+1)\,x-\sin(i-1)\,x,$$
$$2\sin ix\cos x=\sin(i+1)\,x+\sin(i-1)\,x,$$

и по сравненіи соотвѣтствующихъ членовъ, найдемъ

$$\overset{(2)}{b_s}=\frac{(1+\alpha^2)\overset{(1)}{b_s}-\alpha s\overset{(0)}{b_s}}{\alpha(2-s)}$$

$$\overset{(3)}{b_s}=\frac{2(1+\alpha^2)\overset{(2)}{b_s}-\alpha(1+s)\overset{(1)}{b_s}}{\alpha(3-s)},$$

$$\overset{(4)}{b_s}=\frac{3(1+\alpha^2)\overset{(3)}{b_s}-\alpha(2+s)\overset{(2)}{b_s}}{\alpha(4-s)},\text{ и пр.}$$

такъ что вообще

$$\overset{(i)}{b_s}=\frac{(i-1)(1+\alpha^2)\overset{(i-1)}{b_s}-\alpha(i-2+s)\overset{(i-2)}{b_s}}{\alpha(i-s)}\ldots.(a)$$

Если s перемѣнимъ на $s+1$ и положимъ

$$(1-2\alpha\cos\beta+\alpha^2)^{-s-1}=\tfrac{1}{2}\overset{(0)}{b}_{s+1}+\overset{(1)}{b}_{s+1}\cos\beta+\overset{(2)}{b}_{s+2}\cos 2\beta+\ldots.(\beta);$$

то, по формулѣ $2\cos x\cos ix=\cos(i+1)\,x+\cos(i-1)\,x$, выведемъ

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\overset{(0)}{b_s}+\overset{(1)}{b_s}\cos\beta+\overset{(2)}{b_s}\cos 2\beta+\overset{(3)}{b_s}\cos 3\beta+\ldots.=&\,[\tfrac{1}{2}(1+\alpha^2)\overset{(0)}{b}_{s+1}-\alpha\overset{(1)}{b}_{s+1}]\\ &+[(1+\alpha^2)\overset{(1)}{b}_{s+1}-\alpha\overset{(0)}{b}_{s+1}-\alpha\overset{(2)}{b}_{s+1}]\cos\beta\\ &+[(1+\alpha^2)\overset{(2)}{b}_{s+1}-\alpha\overset{(1)}{b}_{s+1}-\alpha\overset{(3)}{b}_{s+1}]\cos 2\beta\\ &+[(1+\alpha^2)\overset{(3)}{b}_{s+1}-\alpha\overset{(2)}{b}_{s+1}-\alpha\overset{(4)}{b}_{s+1}]\cos 3\beta\\ &+\text{и пр.}\end{aligned}$$

Здѣсь видно, что вообще

$$\overset{(i)}{b}_s=(1+\alpha^2)\overset{(i)}{b}_{s+1}-\alpha\overset{(i-1)}{b}-\alpha\overset{(i+1)}{b}_{s+1}\ldots.(a')$$

Но какъ формула (a) даетъ

$$\overset{(i+1)}{b}_{s+1}=\frac{i(1+\alpha^2)\overset{(i)}{b}_{s+1}-(i+s)\alpha\overset{(i-1)}{b}_{s+1}}{(i-s)\alpha}\ldots.(d);$$

то формула (a') превращается въ

$$\overset{(i)}{b}_s = \frac{2\alpha s \overset{(i-1)}{b}_{s+1} - s(1+\alpha^2)\overset{(i)}{b}_{s+1}}{(i-s)} \ldots . (e);$$

слѣд.

$$\overset{(i+1)}{b}_s = \frac{2\alpha s \overset{(i)}{b}_{s+1} - s(1+\alpha^2)\overset{(i+1)}{b}_{s+1}}{(i+1-s)}.$$

Вставивъ сюда величину $\overset{(i+1)}{b}_{s+1}$ изъ (d), получимъ

$$\overset{(i+1)}{b}_s = \frac{s(i+s)(1+\alpha^2)\alpha \overset{(i-1)}{b}_{s+1} + s[2(i-s)\alpha^2 - i(1+\alpha^2)^2]\overset{(i)}{b}_{s+1}}{(i-s)(i+1-s)\alpha} \ldots . (f)$$

Когда изъ (e) и (f) исключимъ $\overset{(i-1)}{b}_{s+1}$, тогда опредѣлимъ

$$\overset{(i)}{b}_{s+1} = \frac{(i+s)(1+\alpha^2)\overset{(i)}{b}_s - 2\alpha(i+1-s)\overset{(i+1)}{b}_s}{s(1-\alpha^2)^2} \ldots . (b),$$

или

$$\overset{(i)}{b}_{s+1} = \frac{(s-i)(1+\alpha^2)\overset{(i)}{b}_s + 2(i+s-1)\alpha \overset{(i-1)}{b}_s}{s(1-\alpha^2)^2} \ldots . (c),$$

потому что формула (a) даетъ

$$2\alpha(i+1-s)\overset{(i+1)}{b}_s = 2i(1+\alpha^2)\overset{(i)}{b}_s - 2(i+s-1)\alpha \overset{(i-1)}{b}_s.$$

При $s = -\frac{1}{2}$, изъ формулъ (b) и (c) выходитъ

$$\overset{(i)}{b}_{\frac{1}{2}} = \frac{(1-2i)(1+\alpha^2)\overset{(i)}{b}_{-\frac{1}{2}} + 4\alpha(i+\frac{3}{2})\overset{(i+1)}{b}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} \ldots . (b')$$

$$\overset{(i)}{b}_{\frac{1}{2}} = \frac{(1+2i)(1+\alpha^2)\overset{(i)}{b}_{-\frac{1}{2}} - 4\alpha(i-\frac{3}{2})\overset{(i-1)}{b}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} \ldots . (c'),$$

и отсюда

$$\overset{(0)}{b}_{\frac{1}{2}} = \frac{(1+\alpha^2)\overset{(0)}{b}_{-\frac{1}{2}} + 6\alpha \overset{(1)}{b}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2},$$

$$\overset{(1)}{b}_{\frac{1}{2}} = \frac{3(1+\alpha^2)\overset{(1)}{b}_{-\frac{1}{2}} + 2\alpha \overset{(0)}{b}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

И такъ надобно знать величины $\overset{(0)}{b}_{-\frac{1}{2}}$ и $\overset{-(1)}{b}_{-\frac{1}{2}}$. Для этого обращаемся къ выраженіямъ (δ), которыя, для $s = -\frac{1}{2}$, даютъ

$$\overset{(0)}{b}_{-\frac{1}{2}} = 2\Big[1 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{64}\alpha^4 + \frac{1}{256}\alpha^6 + \left(\frac{-5}{8^2.2}\right)^2\alpha^8 + \left(\frac{-7}{8^2.4}\right)^2\alpha^{10} + \left(\frac{-21}{8^3.2}\right)^2\alpha^{12}$$

$$+ \left(\frac{-33}{8^3.4}\right)^2\alpha^{14} + \left(\frac{-429}{8^5}\right)^2\alpha^{16} + \ldots . \Big],$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -\alpha\Big[1 - \frac{1}{8}\alpha^2 - \frac{1}{8^2}\alpha^4 - \frac{5}{8^3.2}\alpha^6 - \frac{35}{8^4.4}\alpha^8 - \frac{147}{8^5.4}\alpha^{10} - \frac{693}{8^6.4}\alpha^{12}$$
$$- \frac{14157}{8^8.2}\alpha^{14} - \frac{306735}{8^{10}}\alpha^{16} - \frac{1738165}{8^{11}}\alpha^{18} - \ldots\Big].$$

Зная $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, прочіе коэффиціенты $b_{\frac{1}{2}}^{(2)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(3)}$, и пр. должно уже вычислять по формулѣ (a); именно:

$$i = 2,\ b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = \frac{2(1+\alpha^2)b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - \alpha b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{3\alpha},$$

$$i = 3,\ b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{4(1+\alpha^2)b_{\frac{1}{2}}^{(2)} - 3\alpha b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{5\alpha},\ \text{и пр.}$$

Когда въ формулахъ (b) и (c) сдѣлаемъ $s = \frac{1}{2}$, тогда выйдетъ

$$b_{\frac{3}{2}}^{(i)} = \frac{(2i+1)(1+\alpha^2)b_{\frac{1}{2}}^{(i)} - 2\alpha(2i+1)b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}}{(1-\alpha^2)^2} \ldots (b'')$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(i)} = \frac{(1-2i)(1+\alpha^2)b_{\frac{1}{2}}^{(i)} + 2\alpha(2i-1)b_{\frac{1}{2}}^{(i-1)}}{(1-\alpha^2)^2} \ldots (c'');$$

слѣд. если $i = 0$, то (по b'')

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = \frac{(1+\alpha^2)b_{\frac{1}{2}}^{(0)} - 2\alpha b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2};$$

если $i = 1$, то (по c'')

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = \frac{2\alpha b_{\frac{1}{2}}^{(0)} - (1+\alpha^2)b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2},$$

Вставивъ сюда величины $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, получимъ

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = \frac{b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}}{(1-\alpha^2)^2},\ b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = -\frac{3b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Послѣ этого, изъ предположенія

$$S_1 = \frac{a}{a'^2}\cos\beta - \frac{(1-2\alpha\cos\beta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}}{a'} = \tfrac{1}{2}\overset{(0)}{A} + \overset{(1)}{A}\cos\beta + \overset{(2)}{A}\cos 2\beta + \ldots$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(0)} - \left(\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - \frac{a}{a'^2}\right)\cos\beta - \frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(2)}\cos 2\beta + \ldots$$

слѣдуетъ, что

$$\overset{(0)}{A} = -\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(0)},\ \overset{(1)}{A} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(1)},\ \overset{(i)}{A} = -\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(i)}.$$

10. Теперь надобно опредѣлить послѣдовательные дифференціалы всѣхъ этихъ коэффиціентовъ. Возмемъ опять общее выраженіе

$$(1 - 2\alpha\cos\beta + \alpha^2)^{-s} = V^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\beta + b_s^{(2)}\cos 2\beta + b_s^{(3)}\cos 3\beta + \ldots.$$

и найдемъ его дифференціалъ относительно α:

$$-2s(\alpha-\cos\beta)\,\overline{V}^{-s-1}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha}+\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}\cos\beta+\frac{db_s^{(2)}}{d\alpha}\cos 2\beta+\frac{db_s^{(3)}}{d\alpha}\cos 3\beta+\ldots.,$$

гдѣ

$$\alpha-\cos\beta=\frac{\alpha^2+V-1}{2\alpha};$$

слѣд.

$$-2s(\alpha-\cos\beta)\,\overline{V}^{-s-1}=\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha}\overline{V}^{-s-1}-\frac{s}{\alpha}\overline{V}^{-s},$$

и какъ

$$\overline{V}^{-s-1}=\tfrac{1}{2}b_{s+1}^{(0)}+b_{s+1}^{(1)}\cos\beta+b_{s+1}^{(2)}\cos 2\beta+b_{s+1}^{(3)}\cos 3\beta+\ldots.;$$

то получимъ

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}\cdot\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha}+\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}\cos\beta+\frac{db_s^{(2)}}{d\alpha}\cos 2\beta+\frac{db_s^{(3)}}{d\alpha}\cos 3\beta+\ldots.\\ +\tfrac{1}{2}\cdot\frac{s}{\alpha}b_s^{(0)}+\frac{s}{\alpha}b_s^{(1)}\cos\beta+\frac{s}{\alpha}\cos 2\beta+\frac{s}{\alpha}b_s^{(3)}\cos 3\beta+\ldots.\\ -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha}b_s^{(0)}-\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha}b_{s+1}^{(1)}\cos\beta-\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha}b_{s+1}^{(2)}\cos 2\beta-\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha}b_{s+1}^{(3)}\cos 3\beta+\ldots.\end{array}\right\}=0.$$

Отсюда вообще

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}=\frac{s}{\alpha}(1-\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i)}-\frac{s}{\alpha}b_s^{(i)}.$$

Вставивъ сюда величину $b_{s+1}^{(i)}$ изъ формулы (b), найдемъ

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}=\frac{(i+s)(1+\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)}b_s^{(i)}-\frac{2(i+1-s)}{1-\alpha^2}b_s^{(i+1)}-\frac{s}{\alpha}b_s^{(i)},$$

или

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}=\frac{i+(i+2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}b_s^{(i)}-\frac{2(i+1-s)}{1-\alpha^2}b_s^{(i+1)}\ldots.(q).$$

Дифференціалъ этого выраженія относительно α есть

$$\frac{d^2b_s^{(i)}}{(d\alpha)^2}=\frac{i+(i+2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}+\frac{2(i+2s)(1-\alpha^2)\alpha^2-[i+(i+2s)\alpha^2](1-3\alpha^2)}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2}b_s^{(i)}$$

$$-\frac{2(i+1-s)}{1-\alpha^2}\cdot\frac{db_s^{(i+1)}}{d\alpha}-\frac{4(i+1-s)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}b_s^{(i+1)},$$

гдѣ $1-3\alpha^2=1-2\alpha^2-\alpha^2+\alpha^4-\alpha^4=(1-\alpha^2)^2-\alpha^2(1+\alpha^2)$; слѣд. числитель втораго члена превращается въ $2\alpha^2(1+\alpha^2)(i+s)-i(1-\alpha^2)^2$, и потому

$$\frac{d^2b_s^{(i)}}{(d\alpha)^2}=\frac{i+(i+2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}+\left[\frac{2(1+\alpha^2)(i+s)}{(1-\alpha^2)^2}-\frac{i}{\alpha^2}\right]b_s^{(i)}$$

$$-\frac{2(i+1-s)}{1-\alpha^2}\cdot\frac{db_s^{(i+1)}}{d\alpha}-\frac{4(i+1-s)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}b_s^{(i+1)}\ldots.(q')$$

Когда $s=\frac{1}{2}$, тогда

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}=\frac{i+(i+1)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}b_{\frac{1}{2}}^{(i)}-\frac{2i+1}{1-\alpha^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)},$$

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}}{d\alpha}=\frac{(i+1)+(i+2)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}-\frac{2i+3}{1-\alpha^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i+2)};$$

но какъ, по форм. (a),

$$b_{\frac{1}{2}}^{(i+2)}=\frac{2(i+1)(1+\alpha^2)}{\alpha(2i+3)}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}-\frac{(2i+1)\alpha}{\alpha(2i+3)}b_{\frac{1}{2}}^{(i)};$$

то

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}}{d\alpha}=\frac{2i+1}{1-\alpha^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i)}-\frac{(i+1)+i\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}.$$

Потомъ находимъ

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{(d\alpha)^2}=\frac{i+(i+1)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}+\left[\frac{(2i+1)(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2}-\frac{i}{\alpha^2}\right]b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$$

$$-\frac{2i+1}{1-\alpha^2}\cdot\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}}{d\alpha}-\frac{2(2i+1)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}$$

$$=\frac{i+(i+1)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{i+(i+1)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}b_{\frac{1}{2}}^{(i)}-\frac{i+(i+1)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{2i+1}{1-\alpha^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}$$

$$+\left[\frac{(2i+1)(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2}-\frac{i}{\alpha^2}\right]b_{\frac{1}{2}}^{(i)}+\frac{2i+1}{1-\alpha^2}\cdot\frac{(i+1)+i\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}$$

$$-\frac{2i+1}{1-\alpha^2}\cdot\frac{2i+1}{1-\alpha^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i)}-\frac{2(2i+1)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}$$

$$=\frac{i(i-1)-2i(i-1)\alpha^2+(i+1)(i+2)\alpha^4}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i)}+\frac{(2i+1)(1-3\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)^2}b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)}.$$

и т. д.

11. Изъ $\alpha=\frac{a}{a'}$ слѣдуетъ, что $\frac{d\alpha}{da}=\frac{1}{a'}$. Потомъ изъ $A^{(i)}=-\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ получимъ

$$\frac{dA^{(i)}}{da}=-\frac{1}{a'}\cdot\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{da}=-\frac{1}{a'^2}\cdot\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha},$$

и изъ $A^{(1)}=\frac{a}{a'^2}-\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ выходитъ

$$\frac{dA^{(1)}}{da}=\frac{1}{a'^2}\left(1-\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha}\right),$$

$$\frac{d^2A^{(i)}}{(da)^2}=-\frac{1}{a'^3}\cdot\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{(d\alpha)^2},\text{ и пр.}$$

Наконецъ, замѣтимъ, что $\overset{(i)}{A}$ есть симетрическая функція количествъ a и a' порядка -1; слѣд.

$$a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}+a'\frac{d\overset{(i)}{A}}{da'}=-\overset{(i)}{A},$$

изъ чего

$$a'\frac{d\overset{(i)}{A}}{da'}=-\overset{(i)}{A}-a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}.$$

12. Послѣ этого нетрудно уже найти, что

$$S=\tfrac{1}{2}\overset{(0)}{A}\left(1-\frac{\Delta r'}{a'}\right)+\tfrac{1}{2}a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}\left(\frac{\Delta r}{a}-\frac{\Delta r'}{a'}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\cos i\beta\left\{\overset{(i)}{A}\left(1-\frac{\Delta r'}{a'}\right)+a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\left(\frac{\Delta r}{a}-\frac{\Delta r'}{a'}\right)+\tfrac{1}{2}\sin i\beta\,.\,\overset{(i)}{A}(\Delta l-\Delta l'),\right.$$

или

$$S=\tfrac{1}{2}\overset{(0)}{A}[1+f'\cos(\zeta'-\omega')]-\tfrac{1}{2}a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}[f\cos(\zeta-\omega)-f'\cos(\zeta'-\omega')]$$

$$+\tfrac{1}{2}\cos i\beta\left\{\overset{(i)}{A}[1+f'\cos(\zeta'-\omega')]-a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}[f\cos(\zeta-\omega)-f'\cos(\zeta'-\omega')]\right\}$$

$$+i\sin i\beta\,.\,\overset{(i)}{A}[f\sin(\zeta-\omega)-f'\sin(\zeta'-\omega')].$$

13. Чтобъ разложить $\frac{dR}{dr}r$ припомнимъ, что въ принятыхъ предѣлахъ разложенія, $\frac{dR}{dr}r=m'\frac{dS}{dr}r$; слѣд. надобно взять

$$r\frac{dS}{dr}\text{ вмѣсто } S,$$

$$a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\text{ вмѣсто } \overset{(i)}{A},$$

$$\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}+a\frac{d^2\overset{(i)}{A}}{(da)^2}\text{ вмѣсто } \frac{d\overset{(i)}{A}}{da},$$

и потому выйдетъ

$$\frac{dS}{dr}r=\tfrac{1}{2}a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}\left(1+\frac{\Delta r}{a'}-\frac{2\Delta r'}{a'}\right)+\tfrac{1}{2}a^2\frac{d^2\overset{(0)}{A}}{(da)^2}\left(\frac{\Delta r}{a}-\frac{\Delta r'}{a'}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\cos i\beta\left\{a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\left[1+\frac{\Delta r}{a}-\frac{2\Delta r'}{a'}\right]+a^2\frac{d^2\overset{(i)}{A}}{(da)^2}\left(\frac{\Delta r}{a}-\frac{\Delta r'}{a'}\right)\right\}$$

$$+\tfrac{i}{2}a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\sin i\beta(\Delta l-\Delta l'),$$

или

$$\frac{dS}{dr}r = \tfrac{1}{2}\,a\frac{dA^{(0)}}{da}[1 - f\cos(\zeta-\omega) + 2f'\cos(\zeta'-\omega')]$$

$$- \tfrac{1}{2}\,a^2\frac{d^2A^{(0)}}{(da)^2}[f\cos(\zeta-\omega) - f'\cos(\zeta'-\omega')]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\cos i\beta\left\{a\frac{dA^{(i)}}{da}[1 - f\cos(\zeta-\omega) + 2f'\cos(\zeta'-\omega')]\right.$$

$$\left. - a^2\frac{d^2A^{(i)}}{(da)^2}[f\cos(\zeta-\omega) - f'\cos(\zeta'-\omega')]\right\}$$

$$+ ia\sin i\beta\frac{dA^{(i)}}{da}[f\sin(\zeta-\omega) - f'\sin(\zeta'-\omega')].$$

14. Теперь можемъ уже обратиться къ урав. (V), выражающему возмущенія въ широтахъ планеты. Въ немъ надобно принять $1 - f^2 = 1$, $z = 0$, a' и a вмѣсто r' и r, и ζ вмѣсто l; получимъ

$$\frac{dR}{dz} = m'z'\left\{\frac{1}{a'^3} - [a'^2 + a^2 - 2aa'\cos\beta]^{-\frac{3}{2}}\right\};$$

и если положимъ

$$[a'^2 + a^2 - 2aa'\cos\beta]^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}B^{(0)} + \tfrac{1}{2}B^{(i)}\cos i\beta \ldots . (\beta'),$$

то выйдетъ

$$\frac{dR}{dz} = -m'z'\left\{\tfrac{1}{2}B^{(0)} - \frac{1}{a'^3} + \tfrac{1}{2}B^{(i)}\cos i\beta\right\} = -m'z'B'.$$

Наконецъ принимаемъ $\mu = a^3n^2 = 1$, и выводимъ

$$\delta\lambda = m'na^2\sin\zeta\int z'B'\cos\zeta\,dt - m'na^2\cos\zeta\int z'B'\sin\zeta\,dt,$$

гдѣ должно опредѣлить ординату z', которая вообще есть разность ординатъ планетъ m и m' относительно эклиптики. Когда чрезъ N и N' изобразимъ долготы восходящихъ узловъ, и когда предположимъ, что планеты m' и m находятся на своихъ орбитахъ въ точкахъ, опредѣляемыхъ координатами ψ, θ, γ' и ψ, θ, γ; тогда («Объ эллипт. движ.» чл. 12)

$$\gamma' = \theta\cos N'\operatorname{tang} I' - \psi\sin N'\operatorname{tang} I',$$
$$\gamma = \theta\cos N\ \operatorname{tang} I - \psi\sin N\operatorname{tang} I;$$

и какъ, по принятымъ условіямъ, $\theta = a'\sin\zeta'$, $\psi = a'\cos\zeta'$; то

$$z' = \gamma' - \gamma = a'\{\operatorname{tang} I'\sin(\zeta' - N') - \operatorname{tang} I\sin(\zeta' - N)\},$$

или

$$z' = a'\{(q' - q)\sin\zeta' - (p' - p)\cos\zeta'\},$$

предполагая $q' = \operatorname{tang} I'\cos N'$, $p' = \operatorname{tang} I'\sin N'$, $q = \operatorname{tang} I\cos N$, $p = \operatorname{tang} I\sin N$.

Опредѣливъ z', замѣчаемъ, что выраженіе $\delta\lambda$ представляетъ возмущенія *періодическія*, т. е. зависящія отъ положенія планетъ взаимно — относительнаго, и *вѣковыя*, т. е. отъ этого положенія не зависящія, но безпрестанно увеличивающіяся отъ времеми. Чтобъ отдѣлить эти два рода возмущеній одно отъ другаго, находимъ

$$\frac{d(\delta\lambda)}{dt} = m'n^2a^2\cos\zeta\int z'B'\cos\zeta dt + m'n^2a^2\sin\zeta\int z'B'\sin\zeta dt,$$

потому что $\zeta = nt + E$ и $d\zeta = ndt$. Потомъ

$$\frac{d^2(\delta\lambda)}{(dt)^2} = -n^2\{m'na^2\sin\zeta\int z'B'\cos\zeta dt - m'na^2\cos\zeta\int z'B'\sin\zeta dt\}$$
$$+ m'n^2a^2z'B',$$

или

$$\frac{d^2(\delta\lambda)}{(dt)^2} + n^2\delta\lambda = m'n^2a^2z'B'.$$

Вставивъ сюда величины z' и B', получимъ

$$\frac{d^2(\delta\lambda)}{(dt)^2} + n^2\delta\lambda = m'n^2a^2a'[(q'-q)\sin\zeta' - (p'-p)\cos\zeta']\left[\tfrac{1}{2}\overset{(0)}{B} - \frac{1}{a'^3}\right]$$
$$+ \frac{m'}{2}n^2a^2a'\overset{(i)}{B}[(q'-q)\sin\zeta'\cos i\beta - (p'-p)\cos\zeta'\cos i\beta].$$

Числа i должно принимать положительными и отрицательными; и какъ въ первомъ случаѣ

$$\sin\zeta'\cos i\beta = \tfrac{1}{2}\sin(\zeta'+i\beta) + \tfrac{1}{2}\sin(\zeta'-i\beta),$$

во второмъ же

$$\sin\zeta'\cos i\beta = \tfrac{1}{2}\sin(\zeta'-i\beta) + \tfrac{1}{2}\sin(\zeta'+i\beta);$$

то

$$\sin\zeta'\cos i\beta = \sin(\zeta'+i\beta) + \sin(\zeta'-i\beta).$$

или, для краткости,

$$\sin\zeta'\cos i\beta = \sin(\zeta'+i\beta),$$

причемъ надобно не забывать и того члена, который соотвѣтствуетъ i отрицательному. И такъ

$$\frac{d^2(\delta\lambda)}{(dt)^2} + n^2\delta\lambda = m'n^2a^2a'[(q'-q)\sin\zeta' - (p'-p)\cos\zeta']\left[\tfrac{1}{2}\overset{(0)}{B} - \frac{1}{a'^3}\right]$$
$$+ \frac{m'}{2}n^2a^2a'\overset{(i)}{B}[(q'-q)\sin(\zeta'+i\beta) - (p'-p)\cos(\zeta'+i\beta)].$$

Если i перемѣнимъ на $i-1$, отчего общность формулы не уменьшится; то второй членъ второй части этого уравненія приметъ такой видъ:

$$\frac{m'}{2}n^2a^2a'\overset{(i-1)}{B}[(q'-q)\sin(i\beta+\zeta) - (p'-p)\cos(i\beta+\zeta).$$

Чтобъ эта новая форма удержала общность первой, надобно соблюдать: 1) Когда $i=1$,

тогда $\overset{(i-1)}{B}$ превратится въ $\overset{(0)}{B}$, и $i\beta + \zeta$ въ ζ'; слѣд. вмѣсто $\overset{(0)}{B}$ должно брать $\overset{(0)}{B} - \frac{1'}{a'^3}$; 2) вмѣсто $i = -1$ слѣдуетъ предполагать $i = 0$, отчего получимъ

$$\frac{m'}{2} n^2 a^2 a' \overset{(1)}{B} [(q' - q) \sin\zeta - (p' - p)\cos\zeta].$$

И такъ очевидно, что отъ перемѣны i на $i - 1$, выйдетъ

$$\frac{d^2(\delta\lambda)}{(dt)^2} + n^2\delta\lambda = \frac{m'}{2} n^2 a^2 a' \overset{(1)}{B} [(q' - q)\sin\zeta - (p' - p)\cos\zeta]$$
$$+ \frac{m'}{2} n^2 a^2 a' \overset{(i-1)}{B} [(q' - q)\sin(i\beta + \zeta) - (p' - p)\cos(i\beta + \zeta)],$$

Для интегрированія этого уравненія, или для опредѣленія удовлетворяющей ему величины $\delta\lambda$, полагаемъ

$$\delta\lambda = \frac{b}{n}\sin\zeta + \frac{b'}{n}\cos\zeta,$$

и изъ условій

$$\sin\zeta db + \cos\zeta db' = 0,$$
$$\cos\zeta db - \sin\zeta db' = (F\sin\zeta - G\cos\zeta)\,dt + [H\sin(i\beta + \zeta) - K\cos(i\beta + \zeta)],$$

гдѣ $F = \frac{m'}{2} n^2 a^2 a' \overset{(1)}{B}(q' - q)$, $G = \frac{m'}{2} n^2 a^2 a' \overset{(1)}{B}(p' - p)$, и пр. выводимъ

$$b = h + \int (F\sin\zeta\cos\zeta - G\cos^2\zeta)\,dt + \int [H\sin(i\beta + \zeta)\cos\zeta - K\cos(i\beta + \zeta)\cos\zeta]\,dt,$$
$$b' = h' - \int (F\sin^2\zeta - G\cos\zeta\sin\zeta)\,dt - \int [H\sin(i\beta + \zeta)\sin\zeta - K\cos(i\beta + \zeta)\sin\zeta]\,dt.$$

Оставивъ два послѣднихъ члена этихъ выраженій, дающихъ возмущенія періодическія, находимъ

$$b = h - \frac{F}{4n}\cos 2\zeta - G\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4n}\sin 2\zeta\right),$$
$$b' = h' - \left(\frac{1}{2}Ft - \frac{1}{4n}F\sin 2\zeta\right) - \frac{1}{4n}G\cos 2\zeta;$$

слѣд.

$$\delta\lambda = \frac{1}{n}\left(h + \frac{1}{4n}F\right)\sin\zeta + \frac{1}{n}\left(h' - \frac{1}{4n}G\right)\cos\zeta - \frac{1}{2n}t(G\sin\zeta + F\cos\zeta),$$

и постоянныя произвольныя h, h' не ограничиваются никакими условіями, потому что по вставкѣ $\delta\lambda$ въ интегрируемое уравненіе, содержащіе ихъ члены уничтожаются; слѣд. имѣемъ право принять

$$h = -\frac{1}{4n}F,\ h' = \frac{1}{4n}G;$$

такъ что выраженіе вѣковыхъ возмущеній въ широтахъ будетъ

$$\delta\lambda = \frac{m'}{4} n a^2 a' \overset{(1)}{B} \{(p - p')\sin\zeta + (q - q')\cos\zeta\}\, t \ldots (x).$$

15. Для удобности интегрированія уравненія (I), въ которомъ $\mu = a^3 n^2$, полагаемъ

$$\delta r = a(u + u'),$$

гдѣ u означаетъ члены, не содержащіе эксцентрицитета, u', — члены, содержащіе эксцентрицитетъ въ первой степени. Отъ $r = a\left(1 + \frac{\Delta r}{a}\right)$ и $\frac{a^2}{r^2} = 1 - \frac{2\Delta r}{a}$, уравненіе ($I$) превращается въ

$$a^2 \frac{d^2u}{(dt)^2}[1 - f\cos(\zeta - \omega)] + a^2\frac{d^2u'}{(dt)^2} + 2a^2nf\sin(\zeta - \omega)$$

$$+ n^2a^2u[1 + 3f\cos(\zeta - \omega)] + n^2a^2u' + \frac{dR}{dr}r + 2\int(dR) = 0.$$

Также полагаемъ

$$\delta l = U + U',$$

и по уравненію (IV) находимъ

$$U + U' = uf\sin(\zeta - \omega) + \frac{2}{n}\cdot\frac{du}{dt}[1 - f\cos(\zeta - \omega)] + \frac{2}{n}\cdot\frac{du'}{dt}$$

$$+ \frac{2}{a^2n}\int\frac{dR}{dt}r\,dt + \frac{3}{a^2n}\int dt\int(dR).$$

Изъ этихъ двухъ уравненій беремъ сперва члены, не зависящіе отъ эксцентрицитета:

$$\frac{d^2u}{(dt)^2} + n^2u + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{dR}{dr}r + \frac{2}{a^2}\int(dR) = 0,$$

$$U = \frac{2}{n}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{2}{a^2n}\int\frac{dR}{dr}r\,dt + \frac{3}{a^2n}\int dt\int(dR).$$

Здѣсь

$$\frac{dR}{dr}r = m'\frac{dS}{dr}r = \frac{m'}{2}a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da} + \frac{m'}{2}a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\cos i\beta,$$

$$R = m'S = \frac{m'}{2}\overset{(0)}{A} + \frac{m'}{2}a\overset{(i)}{A}\cos i\beta;$$

слѣд.

$$\int\frac{dR}{dr}r\,dt = \frac{m'}{2}a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}t + \frac{m'}{2}\cdot\frac{a}{i(n'-n)}\cdot\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\sin i\beta,$$

$$(dR) = \frac{m'}{2}in\overset{(i)}{A}\sin i\beta dt, \int(dR) = -\frac{m'}{2}\cdot\frac{n}{n'-n}\overset{(i)}{A}\cos i\beta + m'C,$$

гдѣ C есть произвольное постоянное, и наконецъ

$$\int dt\int(dR) = -\frac{m'}{2}\cdot\frac{n}{i(n'-n)^2}\overset{(i)}{A}\sin i\beta + m'Ct.$$

И такъ

$$U = \frac{2}{n}\cdot\frac{du}{dt} + m'\left[\frac{3C}{a^2n} + \frac{1}{an}\cdot\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}\right]t$$

$$- m'\left[\frac{3}{2i(n'-n)^2}\cdot\frac{1}{a^2}\overset{(i)}{A} - \frac{1}{in(n'-n)}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\right]\sin i\beta.$$

Второй членъ второй части этого уравненія должно уничтожить, какъ представляющій часть средняго движенія планеты m, для чего надобно принять

$$C = -\tfrac{1}{3}a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da},$$

и потому

$$U = \frac{2}{n}\cdot\frac{du}{dt} - m'\left[\frac{3}{2i(n'-n)^2}\cdot\frac{1}{a^2}A^{(i)} - \frac{1}{in(n'-n)}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\sin i\beta,$$

и

$$\frac{d^2u}{dt} + n^2u - \frac{m'}{6}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{dA^{(0)}}{da} - m'\left[\frac{n}{n'-n}\cdot\frac{1}{a^2}A^{(i)} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\cos i\beta = 0.$$

Очевидно, что интегралъ этого уравненія долженъ быть

$$u = h + h'\cos i\beta,$$

такъ что выйдетъ условное уравненіе

$$[n^2 - i^2(n'-n)^2]\,h'\cos i\beta + n^2h - \frac{m'}{6}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{dA^{(0)}}{da}$$

$$- m'\left[\frac{n}{n'-n}\cdot\frac{1}{a^2}A^{(i)} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\cos i\beta = 0,$$

которое даетъ

$$h = \frac{m'}{6}\cdot\frac{1}{n^2a}\cdot\frac{dA^{(0)}}{da},$$

$$h' = \frac{m'}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{n'-n}\cdot\frac{1}{a^2}A^{(i)} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right];$$

слѣд.

$$u = \frac{m'}{6}\cdot\frac{1}{n^2a}\cdot\frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{m'}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{n'-n}\cdot\frac{1}{a^2}A^{(i)} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\cos i\beta \ldots (a).$$

Отсюда

$$\frac{du}{dt} = -\frac{m'i}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{a^2}A^{(i)} - \frac{n'-n}{2a}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\sin i\beta,$$

и потому

$$U = -\frac{2m'i}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{1}{a^2}A^{(i)} - \frac{n'-n}{2na}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\sin i\beta$$

$$- \frac{3m'}{2i(n'-n)^2}\left[\frac{1}{a^2}A^{(i)} - \frac{2(n'-n)}{3na}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\sin i\beta,$$

или

$$U = -\frac{m'}{2i(n'-n)[n^2-i^2(n'-n)^2]}\left\{\frac{3n^2+i^2(n'-n)^2}{a^2}A^{(i)} + \frac{2n(n'-n)}{a}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right\}\sin i\beta \ldots (b).$$

Отъ $\mu = 1$, уравненія (a) и (b) превращаются въ

$$u = \frac{m'}{6}a^2\frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{m'n^2}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{n'-n}aA^{(i)} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\cos i\beta \ldots (a'),$$

$$U = -\frac{m'n^2}{2i(n'-n)^2[n^2-i^2(n'-n)^2]}\left\{[3n^2 + i^2(n'-n)^2]\,aA^{(i)} + 2n(n'-n)\,a^2\frac{dA^{(i)}}{da}\right\}\sin i\beta \ldots (b').$$

16. Возьмемъ теперь члены, содержащіе эксцентрицитетъ въ первой степени:

$$a^2\frac{d^2u'}{(dt)^2}+n^2a^2u'-a^2\frac{d^2u}{(dt)^2}f\cos(\zeta-\omega)+2a^2n\frac{du}{dt}f\sin(\zeta-\omega)$$
$$+3n^2a^2uf\cos(\zeta-\omega)+\frac{dR}{dr}r+2f(dR)=0,$$

или

$$\frac{d^2u'}{(dt)^2}+n^2u'-\frac{d^2u}{(dt)^2}f\cos(\zeta-\omega)+2n\frac{du}{dt}f\sin(\zeta-\omega)$$
$$+3n^2uf\cos(\zeta-\omega)+an^2\frac{dR}{dr}r+2an^2f(dR)=0.$$

Здѣсь

$$\frac{du}{dt}=-\frac{m'n^2i(n'-n)}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{n'-n}aA^{(i)}-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\sin i\beta,$$

$$\frac{d^2u}{(dt)^2}=-\frac{m'n^2i^2(n'-n)^2}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{n'-n}aA^{(i)}-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]\cos i\beta,$$

$$R=m'S=\frac{m'}{2}\left[A^{(0)}+a\frac{dA^{(0)}}{da}\right]f'\cos(\zeta'-\omega')-\frac{m'}{2}a\frac{dA^{(0)}}{da}f\cos(\zeta-\omega)$$
$$+\frac{m'}{2}\left[A^{(i)}+a\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f\cos i\beta\cos(\zeta'-\omega')-m'iA^{(i)}f'\sin i\beta\sin(\zeta'-\omega')$$
$$+m'iA^{(i)}f\sin i\beta\sin(\zeta-\omega)-\frac{m'}{2}a\frac{dA^{(i)}}{da}f\cos i\beta\cos(\zeta-\omega),$$

или

$$R=\frac{m'}{2}\left[A^{(0)}+a\frac{dA^{(0)}}{da}\right]f'\cos(\zeta'-\omega')-\frac{m'}{2}a\frac{dA^{(0)}}{da}f\cos(\zeta-\omega)$$
$$+\frac{m'}{2}\left[(2i+1)A^{(i)}+a\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f'\cos(i\beta+\zeta'-\omega')-m'\left[iA^{(i)}+\frac{a}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega),$$

потому что, при i положительномъ и отрицательномъ, $\cos i\beta\cos(\zeta-\omega)=\cos(i\beta+\zeta-\omega)$, $i\sin i\beta\sin(\zeta-\omega)=-i\cos(i\beta+\zeta-\omega)$. Послѣ этого

$$(dR)=\frac{m'}{2}na\frac{dA^{(0)}}{da}f\sin(\zeta-\omega)\,dt+\frac{m'}{2}in\left[(2i+1)A^{(i)}+a\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f'\sin(i\beta+\zeta'-\omega')\,dt$$
$$-m'(i-1)n\left[iA^{(i)}+\frac{a}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f\sin(i\beta+\zeta-\omega)\,dt.$$

Если во второмъ членѣ второй части этого уравненія перемѣнимъ i на $i-1$; то получимъ

$$\frac{m'}{2}(i-1)n\left[(2i-1)A^{(i-1)}+a\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right]f'\sin(i\beta+\zeta-\omega')\,dt,$$

и тотъ же членъ отъ $i=-1$, превращается въ

$$-\frac{m'}{2}n\left[-A^{(1)}+a\frac{dA^{(1)}}{da}\right]f'\sin(\zeta'-\omega')\,dt,$$

слѣд. перемѣнивъ i на $i-1$, вмѣсто $i=-1$ надобно принимать $i=0$, и потому будетъ уже

$$(dR)=\frac{m'}{2}na\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}f\sin(\zeta-\omega)\,dt+\frac{m'}{2}n\left[\overset{(1)}{A}-a\frac{d\overset{(1)}{A}}{da}\right]f'\sin(\zeta-\omega')\,dt$$

$$-m'(i-1)n\left[i\overset{(i)}{A}+\frac{a}{2}\cdot\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\right]f\sin(i\beta+\zeta-\omega)\,dt$$

$$+\frac{m'}{2}(i-1)n\left[(2i-1)\overset{(i-1)}{A}+a\frac{d\overset{(i-1)}{A}}{da}\right]f'\sin(i\beta+\zeta-\omega')\,dt,$$

$$\int(dR)=-\frac{m'}{2}a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}f\cos(\zeta-\omega)-\frac{m'}{2}\left[\overset{(1)}{A}-a\frac{d\overset{(1)}{A}}{da}\right]f'\cos(\zeta-\omega')$$

$$+\frac{m'(i-1)n}{i(n'-n)+n}\left[(2i-1)\overset{(i)}{A}+\frac{a}{2}\cdot\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$-\frac{m'}{2}\cdot\frac{(i-1)n}{i(n'-n)+n}\left[(2i-1)\overset{(i-1)}{A}+a\cdot\frac{d\overset{(i-1)}{A}}{da}\right]f'\cos(i\beta+\zeta-\omega'),$$

и

$$\int dt\int(dR)=-\frac{m'}{2}\cdot\frac{a}{n}\cdot\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}f\sin(\zeta-\omega)-\frac{m'}{2n}\left[\overset{(1)}{A}-a\frac{d\overset{(1)}{A}}{da}\right]f'\sin(\zeta-\omega')$$

$$+\frac{m'(i-1)n}{[i(n'-n)+n]^2}\left[i\overset{(i)}{A}+\frac{a}{2}\cdot\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}\right]f\sin(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$-\frac{m'(i-1)n}{2[i(n'-n)+n]^2}\left[(2i-1)\overset{(i-1)}{A}+a\frac{d\overset{(i-1)}{A}}{da}\right]f'\sin(i\beta+\zeta-\omega').$$

Наконецъ

$$\frac{dR}{dr}r=-\frac{m'}{2}\left[a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}+a^2\frac{d^2\overset{(0)}{A}}{(da)^2}\right]f\cos(\zeta-\omega)$$

$$-m'\left[a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{d^2\overset{(0)}{A}}{(da)^2}\right]f'\cos(\zeta'-\omega')$$

$$-\frac{m'}{2}\left[(2i+1)a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}+a^2\frac{d^2\overset{(i)}{A}}{(da)^2}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$+m'\left[(i+1)a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{d^2\overset{(i)}{A}}{(da)^2}\right]f'\cos(i\beta+\zeta'-\omega'),$$

гдѣ также отъ перемѣны i на $i-1$ въ послѣднемъ членѣ, выйдетъ

$$\frac{dR}{dr}r=-\frac{m'}{2}\left[a\frac{d\overset{(0)}{A}}{da}+a^2\frac{d^2\overset{(0)}{A}}{(da)^2}\right]f\cos(\zeta-\omega)+\frac{m'}{2}a^2\frac{d^2\overset{(1)}{A}}{(da)^2}f'\cos(\zeta-\omega')$$

$$-\frac{m'}{2}\left[(2i+1)a\frac{d\overset{(i)}{A}}{da}+a^2\frac{d^2\overset{(i)}{A}}{(da)^2}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$+m'\left[ia\frac{d\overset{(i-1)}{A}}{da}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{d^2\overset{(i-1)}{A}}{(da)^2}\right]f'\cos(i\beta+\zeta-\omega'),$$

и потомъ

$$\int\frac{dR}{dr}rdt = -\frac{m'}{2n}\left[a\frac{dA^{(0)}}{da} + a^2\frac{d^2A^{(0)}}{(da)^2}\right]f\sin(\zeta-\omega) + \frac{m'a^2}{2n}\cdot\frac{d^2A^{(0)}}{(da)^2}f'\sin(\zeta-\omega')$$

$$-\frac{m'}{2[i(n'-n)+n]}\left[(2i+1)a\frac{dA^{(i)}}{da} + a^2\frac{d^2A^{(i)}}{(da)^2}\right]f\sin(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$+\frac{m'}{i(n'-n)+n}\left[ia\frac{dA^{(i-1)}}{da} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{d^2A^{(i-1)}}{(da)^2}\right]f'\sin(i\beta+\zeta-\omega').$$

И такъ

$$\frac{d^2u'}{(dt)^2} + n^2u' - m'n^2\left[a^2\frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{a^3}{2}\cdot\frac{d^2A^{(0)}}{(da)^2}\right]f\cos(\zeta-\omega)$$

$$-m'n^2\left[aA^{(1)} - a^2\frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{a^3}{2}\cdot\frac{d^2A^{(1)}}{(da)^2}\right]f'\cos(\zeta-\omega')$$

$$-m'\left\{\frac{(i-1)(2i-1)}{i(n'-n)+n}n^3aA^{(i-1)} - \frac{[i^2(n'-n)+n]n^2a^2}{i(n'-n)+n}\cdot\frac{dA^{(i-1)}}{da} - \frac{n^2a^3}{2}\cdot\frac{d^2A^{(i-1)}}{(da)^2}\right\}f'\cos(i\beta+\zeta-\omega')$$

$$-m'\left\{\frac{2i^3(n'-n)^2 - i^2(n'-n)(3n'-n) - 3n^2}{(n'-n)[n^2-i^2(n'-n)^2]}n^3aA^{(i)} - \frac{i^3(n'-n)^2 - i^2(n'-n)n - 3n^2}{n^2-i^2(n'-n)^2}n^2a^2\frac{dA^{(i)}}{da}\right.$$

$$\left. + \frac{n^2a^3}{2}\cdot\frac{d^2A^{(i)}}{(da)^2}\right\}f\cos(i\beta+\zeta-\omega)\,(*) = 0,$$

или, для краткости,

$$\frac{d^2u'}{(dt)^2} + n^2u' - Df\cos(\zeta-\omega) - D'f'\cos(\zeta-\omega') - Ff\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$
$$- F'f'\cos(i\beta+\zeta-\omega') = 0.$$

Нетрудно найти, что интегралъ этого уравненія есть

$$u' = hf\cos(\zeta-\omega) + h'f'\cos(\zeta-\omega') + \frac{1}{2n}[Df\sin(\zeta-\omega) + D'f'\sin(\zeta-\omega')]\,t$$
$$-\frac{F}{i(n'-n)[i(n'-n)+2n]}f\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$
$$-\frac{F'}{i(n'-n)[i(n'-n)+2n]}f'\cos(i\beta+\zeta-\omega').$$

(*) Не безполезно замѣтить, что этотъ членъ составляется изъ

$$+\frac{n^2i^2(n'-n)^2}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{n'-n}aA^{(i)} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$+\frac{2n^3i(n'-n)}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{n'-n}aA^{(i)} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$+\frac{3n^4}{n^2-i^2(n'-n)^2}\left[\frac{n}{n'-n}aA^{(i)} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$-\frac{n^2}{2}\left[(2i+1)a^2\frac{dA^{(i)}}{da} + a^3\frac{d^2A^{(i)}}{(da)^2}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega)$$

$$+\frac{2(i-1)n^3}{n+i(n'-n)}\left[iaA^{(i)} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{dA^{(i)}}{da}\right]f\cos(i\beta+\zeta-\omega).$$

Теперь беремъ

$$U' = uf\sin(\zeta - \omega) - \frac{2}{n}\cdot\frac{du}{dt}f\cos(\zeta - \omega) + \frac{2}{n}\cdot\frac{du'}{dt}$$
$$+ \frac{2}{a^2 n}\int\frac{dR}{dr}rdt + \frac{3}{a^2 n}\int dt\int(dR),$$

или

$$U' = uf\sin(\zeta - \omega) - \frac{2}{n}\cdot\frac{du}{dt}f\cos(\zeta - \omega) + \frac{2}{n}\cdot\frac{du'}{dt} + 2an\int\frac{dR}{dr}rdt + 3an\int dt\int(dR).$$

Если въ это уравненіе вставимъ величины u, $\frac{du}{dt}$, и пр.; и обратимъ вниманіе только на члены, нужные для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ h и h', и на члены, содержащіе вѣковыя возмущенія; то получимъ

$$U' = -\left(2h - \frac{m'}{6}a^2\frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{5}{2}m'a^2\frac{dA^{(0)}}{da} + m'a^3\frac{d^2A^{(0)}}{(da)^2} - \frac{D}{n^2}\right]f\sin(\zeta - \omega)$$
$$-\left(2h' + \frac{3}{2}m'aA^{(1)} - \frac{3}{2}m'a^2\frac{dA^{(1)}}{da} - m'a^3\frac{d^2A^{(1)}}{(da)^2} - \frac{D'}{n^2}\right]f'\sin(\zeta - \omega')$$
$$+ \frac{1}{n}\left[Df\cos(\zeta - \omega) + D'f'\cos(\zeta - \omega'\right]t.$$

Здѣсь первый и вторый члены второй части выражаютъ часть уравненія центра, и потому уничтоживъ ихъ, получимъ условія для опредѣленія постоянныхъ h и h':

$$h = -\frac{2}{3}m'a^2\frac{dA^{(0)}}{da} - \frac{m'}{4}a^3\frac{d^2A^{(0)}}{(da)^2},$$
$$h' = -\frac{m'}{4}\left[aA^{(1)} - a^2\frac{dA^{(1)}}{da} - a^3\frac{d^2A^{(1)}}{(da)^2}\right].$$

И такъ вѣковыя возмущенія въ долготахъ выражаются чрезъ

$$\delta l = \left[\frac{D}{n}f\cos(\zeta - \omega) + \frac{D'}{n}f'\cos(\zeta - \omega')\right]t \ldots . (y).$$

17. Изъ уравненія (y) извлекаются выраженія вѣковыхъ возмущеній въ эксцентрицитетахъ и долготахъ перигелія, потому что изъ

$$l = \zeta + 2f\sin(\zeta - \omega)$$

слѣдуетъ, что

$$\delta l = 2\left[\sin(\zeta - \omega)\,\delta f - f\cos(\zeta - \omega)\right]t,$$

если предположимъ, что измѣненію δl въ t лѣтъ соотвѣтствуютъ измѣненія $t\delta f$ и $t\delta\omega$. Сравнивъ это выраженіе съ (y), найдемъ

$$\sin\zeta\cos\omega\delta f - \cos\zeta\sin\omega\delta f - f\cos\zeta\cos\omega\delta\omega - f\sin\zeta\sin\omega\delta\omega = \frac{D}{m}f\cos\zeta\cos\omega$$
$$+ \frac{D}{2n}f\sin\zeta\sin\omega + \frac{D'}{2n}f'\cos\zeta\cos\omega' + \frac{D'}{2n}f'\sin\zeta\sin\omega'.$$

Отсюда выходятъ условныя уравненія для опредѣленія $\delta\omega$ и δf:

$$\cos\omega\delta f - f\sin\omega\delta\omega = \frac{D}{2n}f\sin\omega + \frac{D'}{2n}f'\sin\omega',$$

$$\sin\omega\delta f + f\cos\omega\delta\omega = \frac{D}{2n}f\cos\omega + \frac{D'}{2n}f'\cos\omega';$$

такъ что

$$\delta f = \frac{D'}{2n}f'\sin(\omega' - \omega),$$

$$\delta\omega = -\frac{D}{2n} - \frac{D'}{2n}\cdot\frac{f'}{f}\cos(\omega' - \omega).$$

Но какъ

$$a^2\frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{a^3}{2}\cdot\frac{d^2A^{(0)}}{(da)^2} = -\alpha^2\left[\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + \alpha\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{(d\alpha)^2}\right]$$

$$= -\alpha^2\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}b_{\frac{1}{2}}^{(0)} - \frac{1+\alpha^2}{2(1-\alpha^2)^2}b_{\frac{1}{2}}^{(1)}\right]$$

$$= \frac{3\alpha^2}{2(1-\alpha^2)^2}b_{-\frac{1}{2}}^{(1)};$$

$$aA^{(1)} - a^2\frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{a^3}{2}\cdot\frac{d^2A^{(1)}}{(da)^2} = -\alpha\left[b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - \alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} - \frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{(d\alpha)^2}\right]$$

$$= \frac{\alpha^2(1+\alpha^2)}{2(1-\alpha^2)^2}b_{\frac{1}{2}}^{(0)} - \frac{\alpha-\alpha^3+\alpha^5}{(1-\alpha^2)^2}b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$$

$$= -\frac{3\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\left[\frac{\alpha}{2}b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + (1+\alpha^2)b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}\right];$$

то вѣковыя возмущенія въ эксцентрицитетахъ и въ долготахъ перигеліевъ въ t лѣтъ будутъ

$$\left.\begin{aligned}\delta f &= -\frac{3m'n\alpha}{2(1-\alpha^2)^2}\left[\frac{\alpha}{2}b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + (1+\alpha^2)\,b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}\right]f'\sin(\omega'-\omega)\,.\,t,\\ \delta\omega &= -\frac{3m'n\alpha^2}{4(1-\alpha^2)^2}b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}\,.\,t + \frac{3m'n\alpha}{2(1-\alpha^2)^2}\left[\frac{\alpha}{2}b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + (1+\alpha^2)\,b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}\right]\frac{f'}{f}\cos(\omega'-\omega)\,.\,t\end{aligned}\right\}\ldots.(Z).$$

18. Предположивъ, что во время t количества q и p превращаются въ $q + t\delta q$ и $p + t\delta p$, изъ уравненія

$$\operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang} I\sin(\zeta - N)$$

выведемъ

$$\delta\lambda = [\sin\zeta\delta q - \cos\zeta\delta p]\,t,$$

что, по сравненіи съ урав. (x), даетъ

$$\delta q = \frac{m'}{4}na^2a'B^{(1)}(p - p'),$$

$$\delta p = \frac{m'}{4}na^2a'B^{(1)}(q' - q).$$

Съ другой стороны, изъ условій $q = \tang I \cos N$, $p = \tang I \sin N$ выходитъ

$$\delta I = \cos N \delta q + \sin N \delta p,$$
$$-\tang I \delta N = \sin N \delta q - \cos N \delta p.$$

Вставивъ сюда величины δq и δp, найдемъ выраженія вѣковыхъ возмущеній въ наклоненіяхъ и въ долготахъ узловъ въ продолженіе t лѣтъ; именно:

$$\delta I = \frac{m'}{4} n a^2 a' B^{(1)} \tang I' \sin(N - N') \cdot t,$$
$$\delta N = \frac{m'}{4} n a^2 a' B^{(1)} \left\{ \frac{\tang I'}{\tang I} \cos(N - N') - 1 \right\} \cdot t.$$

Сравненіе рядовъ (β) и (β') показываетъ, что

$$B^{(1)} = \frac{1}{a'^3} b_{\frac{3}{2}}^{(1)};$$

слѣд.

$$a^2 a' B^{(1)} = \alpha^2 b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = -\frac{3\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} b_{-\frac{1}{2}}^{(1)},$$

и

$$\left.\begin{aligned} \delta I &= -\frac{3m'n\alpha^2}{4(1-\alpha^2)^2} b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \cdot \tang I' \sin(N - N') \cdot t \\ \delta N &= -\frac{3m'n\alpha^2}{4(1-\alpha^2)^2} b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \left\{ \frac{\tang I'}{\tang I} \cos(N' - N) - 1 \right\} \cdot t \end{aligned}\right\} \dots (X).$$

Изъ этихъ выраженій видно, что когда положеніе орбиты m отнесемъ къ орбитѣ m', тогда $I' = 0$, $\delta N = \frac{3m'n\alpha^2}{4(1-\alpha^2)^2} b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \cdot t$. Изъ этого заключаемъ:

1) Взаимное наклоненіе орбитъ не измѣняется ихъ взаимнымъ дѣйствіемъ.

2) Взаимный узелъ имѣетъ движеніе оступательное, пропорціональное времени, хотя въ тоже время ихъ узлы съ эклиптикою могутъ имѣть движеніе прямое.

3) Скорость равномѣрнаго отступленія взаимнаго узла выражается чрезъ $\frac{3m'n\alpha^2}{4(1-\alpha^2)^2} b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$.

19. Если положимъ

$$(m,m') = -\frac{3m'n\alpha^2}{4(1-\alpha^2)^2} b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -\frac{3m'a^2a'^2}{4(a'^2-a^2)} b_{-\frac{1}{2}}^{(1)},$$
$$[m,m'] = -\frac{3m'n\alpha}{2(1-\alpha^2)^2} \left[\frac{\alpha}{2} b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + (1+\alpha^2) b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \right]$$
$$= -\frac{3m'naa'}{2(1-\alpha^2)^2} \left[\frac{aa'}{2} b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + (a'^2 + a^2) b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} \right];$$

то выйдетъ

$$\delta f = [m,m'] f' \sin(\omega' - \omega) \cdot t,$$
$$\delta\omega = (m,m') t - [m,m'] \frac{f'}{f} \cos(\omega' - \omega) \cdot t,$$
$$\delta I = (m,m') \tang I' \sin(N - N') \cdot t,$$
$$\delta N = -(m,m') t + (m,m') \frac{\tang I'}{\tang I} \cos(N' - N) \cdot t.$$

Отсюда слѣдуетъ, что полныя годично-вѣковыя возмущенія элементовъ разсматриваемой здѣсь планеты m выражаются чрезъ

$$\left.\begin{aligned}\delta f &= [m,m']f'\sin(\omega'-\omega) + [m,m'']f''\sin(\omega''-\omega) + [m,m''']f'''\sin(\omega'''-\omega) + \ldots\\ \delta\omega &= (m,m') + (m,m'') + (m,m''') + \ldots - [m,m']\frac{f'}{f}\cos(\omega'-\omega) - [m,m'']\frac{f''}{f}\cos(\omega''-\omega)\\ &\quad - [m,m''']\frac{f'''}{f}\cos(\omega'''-\omega) - \ldots\end{aligned}\right\}\ldots(Z')$$

и

$$\left.\begin{aligned}\delta I &= (m,m')\operatorname{tang}I'\sin(N-N') + (m,m'')\operatorname{tang}I''\sin(N-N'') + (m,m''')\operatorname{tang}I'''\sin(N-N''') + \ldots\\ \delta N &= -(m,m') - (m,m'') - (m,m''') - \ldots + (m,m')\frac{\operatorname{tang}I'}{\operatorname{tang}I}\cos(N-N')\\ &\quad + (m,m'')\frac{\operatorname{tang}I''}{\operatorname{tang}I}\cos(N-N'') + (m,m''')\frac{\operatorname{tang}I'''}{\operatorname{tang}I}\cos(N-N''') + \ldots\end{aligned}\right\}\ldots(X')$$

20. Коэффиціенты (m,m'), $[m,m']$, и пр. относятся къ дѣйствіямъ m', m'' и пр. на m; изъ нихъ же опредѣляются коэффиціенты (m',m), $[m',m]$, и пр. относящіяся къ обратному дѣйствію m на m', m'' и пр. Дѣйствительно, общее выраженіе

$$(1 - 2\alpha\cos\beta + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\beta + b_s^{(2)}\cos 2\beta + \ldots$$

отъ $s = -\frac{1}{2}$, превращается въ

$$(1 - 2\alpha\cos\beta + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} + b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}\cos\beta + b_{-\frac{1}{2}}^{(2)}\cos 2\beta + \ldots$$

Но когда примемъ

$$(a'^2 - 2aa'\cos\beta + a^2)^{\frac{1}{2}} = a'(1 - 2\alpha\cos\beta + \alpha^2)^{\frac{1}{2}} = (a,a') + (a,a')'\cos\beta + (a,a')''\cos 2\beta + \ldots,$$

тогда выведемъ, что

$$(a,a') = \tfrac{1}{2}a'b_{-\frac{1}{2}}^{(0)},\ (a,a')' = a'b_{-\frac{1}{2}}^{(1)},\ \text{и пр.}$$

Притомъ симетричность суммы $a'^2 - 2aa'\cos\beta + a^2$ относительно a' и a показываетъ, что

$$(a,a') = (a',a),\ (a,a')' = (a',a)',\ \text{и пр.}$$

И такъ

$$(m,m') = -\frac{3m'na^2a'^2}{4(a'^2-a^2)^2}b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -\frac{3m'na^2a'}{4(a'^2-a^2)}(a,a')',$$

и

$$(m',m) = -\frac{3mn'a'^2a}{4(a'^2-a^2)^2}(a',a)'.$$

Отсюда

$$\frac{(m,m')}{(m',m)} = \frac{m'na^2a'}{mn'a'^2a} = \frac{m'na}{mn'a'},$$

гдѣ

$$n = \frac{1}{a\sqrt{a}},\ n' = \frac{1}{a'\sqrt{a'}};$$

слѣд.

$$(m',m) = \frac{(m,m')m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \dots (C).$$

Также

$$[m,m'] = -\frac{3m'na}{2(a'^2-a^2)^2}\left[aa'(a,a') + (a'^2+a^2)(a,a')'\right],$$

$$[m',m] = -\frac{3mn'a'}{2(a'^2-a^2)^2}\left[aa'(a',a) + (a'^2+a^2)(a',a)'\right];$$

слѣд.

$$[m',m] = \frac{[m,m']m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \dots (C').$$

21. Теперь надобно объяснить, какимъ образомъ опредѣляются перемѣны въ наклоненіи эклиптики и въ предвареніи равноденствій. Вообразимъ на сводѣ небесномъ сферическій треугольникъ, составленный изъ дугъ большихъ круговъ, проведенныхъ чрезъ полюсы экватора P; эклиптики E и орбиты возмущающей планеты P'; въ этомъ треугольникѣ сторона $EP' = I'$, $PE =$ наклоненію эклиптики ε, и уголъ $P'EP = 180° - N'$; сторону PP' изобразимъ чрезъ α, и уголъ $EP'P$ — чрезъ φ. При движеніи точки весенняго равноденствія, происходящемъ отъ дѣйствія планеты m', полюсъ эклиптики обращается около полюса орбиты m'; слѣд. $d\varphi = \delta N'$. Беремъ извѣстныя тригонометрическія формулы:

$$\sin N' \sin\varepsilon - \sin\alpha \sin\varphi = 0 \dots (1)$$

$$\cos\alpha = \cos I' \cos\varepsilon - \sin I' \sin\varepsilon \cos N' \dots (2)$$

$$\sin N' \cot\varphi = \cot\varepsilon \sin I' + \cos I' \cos N' \dots (3),$$

въ которыхъ α и I' суть количества постоянныя (чл. 18), и потому дифференцированіе урав. (1) и (2) даетъ

$$\sin\varepsilon \cos N' dN' + \sin N' \cos\varepsilon d\varepsilon - \sin\varepsilon \sin N' \cot\varphi d\varphi = 0 \dots (4)$$

$$(\sin\varepsilon \cos I' + \sin I' \cos N' \cos\varepsilon)\, d\varepsilon - \sin I' \sin\varepsilon \sin N' dN' = 0 \dots (5).$$

Посредствомъ уравненія (3) исключимъ $\sin N' \cot\varphi$ изъ урав. (4), отчего оно превратится въ

$$\sin\varepsilon \cos N' dN' + \cos\varepsilon \sin N' d\varepsilon - (\cos\varepsilon \sin I' + \sin\varepsilon \cos I' \cos N')\, d\varphi = 0 \dots (4').$$

Если чрезъ δr представимъ движеніе весенней точки равноденствія, то измѣненіе dN' въ долготѣ узла выразится чрезъ $\delta N' - \delta r$; слѣд. изъ урав. (4') и (5) получимъ

$$\cos\varepsilon \sin N' d\varepsilon + (\sin\varepsilon \cos N' - \cos\varepsilon \cos I' - \sin\varepsilon \cos N' \cos I')\,\delta N' - \sin\varepsilon \cos N' \delta r = 0,$$

$$(\sin\varepsilon \cos I + \cos\varepsilon \sin I' \cos N')\, d\varepsilon - \sin\varepsilon \sin I' \sin N' \delta N' + \sin\varepsilon \sin I' \sin N' \delta r = 0 \dots (5').$$

Отсюда

$$(\sin\varepsilon \cos I' \cos N' + \cos\varepsilon \sin I')\, d\varepsilon - \sin I' \sin N' \delta N' (\sin\varepsilon \cos I' \cos N' + \cos\varepsilon \sin I') = 0,$$

и

$$d\varepsilon = \sin I' \sin N' \delta N' \dots (D).$$

Такъ выражается измѣненіе наклоненія эклиптики. Вставивъ величину $d\varepsilon$ въ урав. (5), и допуствивъ $\cos I' = 1$, найдемъ, что

$$\delta r = -\cot\varepsilon \sin I' \cos N' \delta N' \ldots (E).$$

22. Изъ чл. 18 видно, что при взаимномъ дѣйствіи планетъ m, m', m'' и пр.,

$$\delta q = \quad \{(m,m') + (m,m'') + (m,m''') + \ldots\} p - (m,m') p' - (m,m'') p'' - (m,m''') p''' - \ldots,$$
$$\delta p = -\{(m,m') + (m,m'') + (m,m''') + \ldots\} q + (m,m') q' + (m,m'') q'' + (m,m''') q''' + \ldots,$$
$$\delta q' = \quad \{(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + \ldots\} p' - (m',m) p - (m',m'') p'' - (m',m''') p''' - \ldots,$$
$$\delta p' = -\{(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + \ldots\} q' + (m',m) q + (m',m'') q'' + (m',m''') q''' + \ldots$$

Этими уравненіями должно воспользоваться для составленія формулъ, выражающихъ измѣненія въ наклоненіяхъ и въ долготахъ узловъ, отнесенныхъ къ истинной эклиптикѣ или къ измѣняющейся плоскости земной орбиты. Въ чл. 14 мы видѣли, что

$$z' = (q' - q)\theta - (p' - p)\psi.$$

Если, съ другой стороны, чрезъ I_1 и N_1 изобразимъ наклоненіе и долготу узла планеты m' относительно плоскости m; то найдемъ

$$z' = \theta \operatorname{tang} I_1 \cos N_1 - \psi \operatorname{tang} I_1 \sin N_1;$$

слѣд.

$$\operatorname{tang} I_1 \cos N_1 = q' - q, \ \operatorname{tang} I_1 \sin N_1 = p' - p;$$

отсюда

$$\operatorname{tang} I_1 = \sqrt{\{(q' - q)^2 + (p' - p)^2\}},$$
$$\operatorname{tang} N_1 = \frac{p' - p}{q' - q},$$

и

$$\delta I_1 = (\delta q' - \delta q) \cos N_1 + (\delta p' - \delta p) \sin N_1,$$
$$\delta N_1 = \frac{(\delta p' - \delta p)\cos N_1 - (\delta q' - \delta q)\sin N_1}{\operatorname{tang} I_1}.$$

Когда предположимъ, что орбита планеты m есть орбита земли, и съ нею въ данную эпоху совпадаетъ неподвижная эклиптика; тогда $p = 0, q = 0, N_1 = N', I_1 = I'$, и

$$\delta q' = \{(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + \ldots\} \operatorname{tang} I' \sin N' - (m',m'') \operatorname{tang} I'' \sin N''$$
$$- (m',m''') \operatorname{tang} I''' \sin N''' - \ldots,$$
$$\delta p' = -\{(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + \ldots\} \operatorname{tang} I' \cos N' + (m',m'') \operatorname{tang} I'' \cos N''$$
$$+ (m',m''') \operatorname{tang} I''' \cos N''' + \ldots,$$
$$\delta q = -(m,m') \operatorname{tang} I' \sin N' - (m,m'') \operatorname{tang} I'' \sin N'' - (m,m''') \operatorname{tang} I''' \sin N''' - \ldots,$$
$$\delta p = \quad (m,m') \operatorname{tang} I' \cos N' + (m,m'') \operatorname{tang} I'' \cos N'' + (m,m''') \operatorname{tang} I''' \cos N''' + \ldots$$

Вставивъ всѣ эти величины въ выраженія δI_1 и δN_1, получимъ

$$\left.\begin{aligned}\delta I_1 &= \{(m'_,m'')-(m,m'')\}\operatorname{tang}I''\sin(N'-N'')+\{(m'_,m''')-(m,m''')\}\operatorname{tang}I'''\sin(N'-N''')+\dots\\ \delta N_1 &= -\{(m'_,m)+(m'_,m'')+(m'_,m''')+\dots\}-(m,m')+\{(m'_,m'')-(m,m'')\}\frac{\operatorname{tang}I''}{\operatorname{tang}I'}\cos(N'-N'')\\ &\quad+\{(m'_,m''')-(m,m''')\}\frac{\operatorname{tang}I'''}{\operatorname{tang}I'}\cos(N'-N''')+\dots\end{aligned}\right\}\dots(Y).$$

23. Приступаемъ теперь къ вычисленіямъ по слѣдующимъ даннымъ для 1800 года.

Планеты.	m,m' и пр.	n,n' и пр.	a,a' и пр.	f,f' и пр.
Меркурій	$\frac{1}{3000000}$	5381016,"17	0,3870987	0,2056163
		(6,7308643)	($\bar{1}$,5878218)	($\bar{1}$,3130575)
Венера	$\frac{1}{401847}$	2106641,49	0,7233322	0,00686182
		(6,3235906)	($\bar{1}$,8593378)	($\bar{3}$,8364394)
Земля	$\frac{1}{359325}$	1295977,38	1,0000000	0,01679226
		(6,1125974)		($\bar{2}$,2251091)
Марсъ	$\frac{1}{2680637}$	689050,98	1,5236914	0,0932168
		(5,8382513)	(0,1828971)	($\bar{2}$,9694943)
Юпитеръ	$\frac{1}{1050}$	109256,719	5,2027979	0,0481621
		(5,0384484)	(0,7162370)	($\bar{2}$,6827054)
Сатурнъ	$\frac{1}{3512}$	43996,127	9,5388524	0,0561505
		(4,6434144)	(0,9794961)	($\bar{2}$,7493537)
Уранъ	$\frac{1}{17918}$	15425,645	19,1827294	0,0466108
		(4,1882433)	(1,2829105)	($\bar{2}$,6684865)

Планеты.	ω,ω' и пр.	I,I' и пр.	N,N' и пр.
Меркурій	74° 20′ 5,"8	7° 0′ 5,"9	45° 57′ 9″
Венера	128 43 6,0	3 23 28,5	74 51 41
Земля	99 30 28,6	0 0 0	0 0 0
Марсъ	322 22 51,2	1 51 6,2	47 59 38
Юпитеръ	11 7 38	1 18 51,6	98 25 45
Сатурнъ	89 8 20	2 29 35,9	111 56 7
Уранъ	167 30 24	0 46 28	72 59 21

Меркурій и Венера.

$$\alpha = \frac{0,3870987}{0,7233322} = 0,5351605,\ \log\alpha = \bar{1},7284840,\ \log\alpha^2 = \bar{1},4569680,$$
$$\log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},7069136,\ \log(1+\alpha^2) = 0,1093750.$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,0715992 & \\
0.0012816 & \\
0,0000918 & \\
0,0000103 & \\
0,0000012 & \\
0,0000002 & \\
0,0000000 & \\
\hline
1,0729843 &
\end{array}
\qquad
-\left\{\begin{array}{l}
0,0357996 \\
0,0012816 \\
0,0001147 \\
0,0000144 \\
0,0000022 \\
0,0000004 \\
0,0000000
\end{array}\right.
\qquad 0,9627871$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1459686 \quad b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,5152456$$
$$(0,3316234) \qquad (\bar{1},7120143)$$

$$(m,m') = 2'',910272\,(0,4639335),\ (m',m) = 0'',285177\,(\bar{1},4551150),$$
$$[m,m'] = 1'',870057\,(0,2718548),\ [m',m] = 0'',183237\,(\bar{1},2630363).$$

Меркурій и Земля.

$$\alpha = 0,3870987,\ \log\alpha = \bar{1},5878218,\ \log\alpha^2 = \bar{1},1756436,$$
$$\log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},8589958,\ \log(1+\alpha^2) = 0,0606395,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,0374614 & \\
0,0003508 & \\
0,0000131 & \\
0.0000007 & \\
\hline
b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,0756520 &
\end{array}
\qquad
-\left\{\begin{array}{l}
0,0187307 \\
0,0003508 \\
0,0000164 \\
0,0000011
\end{array}\right.
\qquad 0,9809010$$

$$(0,3171546) \quad b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,3797055$$
$$(\bar{1},5794470)$$

$$(m,m'') = 0'',884164\,(\bar{1},9465329),\ (m'',m) = 0'',065888\,(\bar{2},8188100)$$
$$[m,m''] = 0'',419417\,(\bar{1},6226464),\ [m'',m] = 0'',031254\,(\bar{2},4949183).$$

Меркурій и Марсъ.

$$\log\alpha=\bar{1},4049248,\ \log\alpha^2=\bar{2},8098496,\ \log(1-\alpha^2)^2=\bar{1},9420478,$$
$$\log(1+\alpha^2)=0,0271633,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,0161358 & \\
0,0000636 & -\left\{\begin{array}{l}0,0080678\\0,0000636\\0,0000013\end{array}\right. \\
\underline{0,0000011} & \\
b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}=2,0324010 & 0,9918673 \\
(0,3080094) & b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}=-0,2519871 \\
 & (\bar{1},4013784) \\
(m,m''')=0'',027981, & (m''',m)=0'',012602 \\
(\bar{2},4468688) & (\bar{2},1004469) \\
[m,m''']=0'',008813, & [m''',m]=0'',003969 \\
(\bar{3},9451423) & (\bar{3},5987204)
\end{array}$$

Меркурій и Юпитеръ.

$$\log\alpha=\bar{2},8715847,\ \log\alpha^2=\bar{3},7431694,\ \log(1-\alpha^2)^2=\bar{1},9951786,$$
$$\log(1+\alpha^2)=0,0023977,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,0013839 & -\left\{\begin{array}{l}0,0006919\\0,0000005\end{array}\right. \\
\underline{0,0000005} & \\
b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}=2,0027688 & 0,9993076 \\
(0,3016308) & b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}=-0,0743505 \\
 & (\bar{2},8712840)
\end{array}$$

$$(m,m^{IV})=1'',599599\,(0,2040111),\ (m^{IV},m)=0'',000153\,(\bar{4},1838715),$$
$$[m,m^{IV}]=0'',148687\,(\bar{1},1722745),\ [m^{IV},m]=0'',000014\,(\bar{5},1521349).$$

Меркурій и Сатурнъ.

$$\log\alpha=\bar{2},6083257,\ \log\alpha^2=\bar{3},2166514,\ \log(1-\alpha^2)^2=\bar{1},9985684,$$
$$\log(1+\alpha^2)=0,0007146,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
\underline{0,0004117} & \underline{-0,0002058} \\
b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}=2,0008234 & 0,9997942 \\
(0,3012087) & b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}=-0,0405729 \\
 & (\bar{2},6082364)
\end{array}$$

$$(m,m^{V})=0'',077035\,(\bar{2},8866905),\ (m^{V},m)=0'',000018\,(\bar{5},2592866),$$
$$[m,m^{V}]=0'',003902\,(\bar{3},5912944),\ [m^{V},m]=0,000001\,(\bar{6},9638905).$$

Меркурій и Уранъ.

$$\log\alpha=\bar{2},3049113,\ \log\alpha^2=\bar{4},6098226,\ \log(1-\alpha^2)^2=\bar{1},9996462,$$
$$\log(1+\alpha^2)=0,0001767,$$

$$\begin{array}{rr} 1,0000000 & 1,0000000 \\ 0,0001018 & -0,0000509 \\ \hline b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}=2,0002036 & 0,9999491 \\ (0,3010742) & b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}=-0,0201785 \\ & (\bar{2},3048892) \end{array}$$

$$(m,m^{VI})=0'',001852\,(\bar{3},2677017),\ (m^{VI},m)=0'',0000016\,(\bar{6},1963256),$$
$$[m,m^{VI}]=0'',0000464\,(\bar{5},6665014),\ [m^{VI},m]=0,0000000\,(\bar{8},5951253).$$

Венера и Земля.

$$\alpha=0,7233322,\ \log\alpha=\bar{1},8593378,\ \log\alpha^2=\bar{1},7186756,\ \log(1-\alpha^2)^2=\bar{1},3566552,$$
$$\log(1+\alpha^2)=0,1827596,$$

$$\begin{array}{rr} & 1,0000000 \\ 1,0000000 & \\ 0,1308024 & \\ 0,0042773 & \\ 0,0005594 & \\ 0,0001143 & \\ 0,0000293 & \\ 0,0000086 & \\ 0,0000028 & \\ 0,0000009 & \end{array} \qquad -\left\{\begin{array}{r} 0,0654012 \\ 0,0042773 \\ 0,0006993 \\ 0,0001600 \\ 0,0000440 \\ 0,0000135 \\ 0,0000045 \\ 0,0000016 \\ 0,0000006 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rr} 1,1357950 & 0,9293980 \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}=2,2715900, & b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}=-0,6722635 \\ (0,3563299) & (\bar{1},8275396) \end{array}$$

$$(m',m'')=6'',803375\,(0,8327244),\ (m'',m')=5'',173924\,(0,7138200),$$
$$[m',m'']=5'',664708\,(0,7531775),\ [m'',m']=4'',307974\,(0,6342731).$$

Венера и Марсъ.

$$\log\alpha = \bar{1},6764408,\ \log\alpha^2 = \bar{1},3528816,\ \log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},7781972,$$
$$\log(1+\alpha^2) = 0,0882645,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,0563404 & \\
0,0007935 & \\
0,0000447 & -\left\{\begin{array}{l} 0,0281703 \\ 0,0007935 \\ 0,0000559 \\ 0,0000055 \\ 0,0000006 \end{array}\right. \\
0,0000039 & \\
0,0000004 & \\
\hline
b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1143658 & 0,9709742 \\
(0,3251801) & b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,4609443 \\
 & (\bar{1},6636485)
\end{array}$$

$$(m',m''') = 0'',102035\ (\bar{1},0087479),\ (m''',m') = 0'',468969\ (\bar{1},6711445),$$
$$[m',m'''] = 0'',058710\ (\bar{2},7687147),\ [m''',m'] = 0'',269843\ (\bar{1},4311113).$$

Венера и Юпитеръ.

$$\log\alpha = \bar{1},1431008,\ \log\alpha^2 = \bar{2},2862016,\ \log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},9830476,$$
$$\log(1+\alpha^2) = 0,0083140,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1.0000000 \\
0,0048321 & -\left\{\begin{array}{l} 0,0024161 \\ 0,0000058 \end{array}\right. \\
0,0000058 & \\
\hline
b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,0096758 & 0,9975781 \\
(0,3031261) & b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,1386908, \\
 & (\bar{1},1420477)
\end{array}$$

$$(m',m^{IV}) = 4'',194347\ (0,6226644),\ (m^{IV},m') = 0'',004086\ (\bar{3},6113433),$$
$$[m',m^{IV}] = 0'',727154\ (\bar{1},8616263),\ [m^{IV},m'] = 0'',000708\ (\bar{4},8503052).$$

Венера и Сатурнъ.

$$\log\alpha = \bar{2},8798417,\ \log\alpha^2 = \bar{3},7596834,\ \log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},9949910,$$
$$\log(1+\alpha^2) = 0,0024901,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,0014375 & -\left\{\begin{array}{l} 0,0007187 \\ 0,0000005 \end{array}\right. \\
0,0000005 & \\
\hline
b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,0028760 & 0,9992808 \\
(0,3016542) & b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,0757756 \\
 & (\bar{2},8795292)
\end{array}$$

$$(m',m^{V}) = 0'',198298\ (\bar{1},2973191),\ (m^{V},m') = 0'',000477\ (\bar{4},6787337),$$
$$[m',m^{V}] = 0'',018781\ (\bar{2},2737067),\ [m^{V},m'] = 0,000045\ (\bar{6},6551213).$$

Венера и Уранъ.

$$\log\alpha = \bar{2},5764274,\ \log\alpha^2 = \bar{3},1528548,\ \log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},9987642,$$
$$\log(1+\alpha^2) = 0,0006170,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,0003554 & -0,0001777 \\
\hline
b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,0007108 & 0,9998223 \\
(0,3011844) & b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,0377016 \\
 & (\bar{2},5763592)
\end{array}$$

$$(m',m^{VI}) = 0'',004740\ (\bar{3},6758029),\ (m^{VI},m') = 0'',000041\ (\bar{5},6132453),$$
$$[m',m^{VI}] = 0'',000228\ (\bar{4},3580818),\ [m^{VI},m'] = 0'',000002\ (\bar{6},2955242).$$

Земля и Марсъ.

$$\log\alpha = \bar{1},8171030,\ \log\alpha^2 = \bar{1},6342060,\ \log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},5106352,$$
$$\log(1+\alpha^2) = 0,1555580,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,1076827 & \\
0,0028988 & \\
0,0003121 & \\
0,0000525 & -\left\{\begin{array}{l} 0,0538417 \\ 0,0028988 \\ 0,0003902 \\ 0,0000735 \\ 0,0000166 \\ 0,0000042 \\ 0,0000012 \end{array}\right. \\
0,0000111 & \\
0,0000027 & \\
0,0000002 & \\
\hline
b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,2219202 & 0,9427738 \\
(0,3467284) & b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,6187457 \\
 & (\bar{1},7915123)
\end{array}$$

$$(m'',m''') = 0'',298197\ (\bar{1},4745038),\ (m''',m') = 1'',802212\ (0,2558058),$$
$$[m'',m'''] = 0'',229308\ (\bar{1},3604189),\ [m''',m'] = 1'',385873\ (0,1417236).$$

Земля и Юпитеръ.

$$\log\alpha = \bar{1},2837630,\ \log\alpha^2 = \bar{2},5675260,\ \log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},9673044,$$
$$\log(1+\alpha^2) = 0,0157548,$$

$$\begin{array}{rr}
1,0000000 & 1,0000000 \\
0,0092356 & \\
0,0000213 & -\left\{\begin{array}{l} 0,0046178 \\ 0,0000213 \\ 0,0000002 \end{array}\right. \\
0,0000002 & \\
\hline
b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,0185142 & 0,9953607 \\
(0,3050319) & b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,1913125 \\
 & (\bar{1},2817435)
\end{array}$$

$$(m'',m^{IV}) = 7'',053983\ (0,8484345),\ (m^{IV},m'') = 0'',009036\ (\bar{3},9560178),$$
$$[m'',m^{IV}] = 1'',686882\ (0,2270848),\ [m^{IV},m''] = 0'',002161\ (\bar{3},3346681).$$

Земля и Сатурнъ.

$\log\alpha = \bar{1},0205039$, $\log\alpha^2 = \bar{2},0410078$, $\log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},9904012$,
$\log(1+\alpha^2) = 0,0047470$,

$$\begin{array}{rl} & 1,0000000 \\ & 0,0027475 \\ & 0,0000019 \\ \hline b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = & 2,0054988 \\ & (0,3022224) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 1,0000000 \\ - & \begin{cases} 0,0013737 \\ 0,0000019 \end{cases} \\ \hline & 0,9986244 \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = & -0,1046902 \\ & (\bar{1},0199062) \end{array}$$

$(m'',m^{V}) = 0'',325549\ (\bar{1},5126170)$, $(m^{V},m'') = 0'',001030\ (\bar{3},0129360)$,
$[m'',m^{V}] = 0'',042607\ (\bar{2},6294823)$, $[m^{V},m''] = 0'',000135\ (\bar{4},1298013)$.

Земля и Уранъ.

$\log\alpha = \bar{2},7170896$, $\log\alpha^2 = \bar{3},4341792$, $\log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},9978364$,
$\log(1+\alpha^2) = 0,0011786$,

$$\begin{array}{rl} & 1,0000000 \\ & 0,0006794 \\ & 0,0000001 \\ \hline b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = & 2,0013590 \\ & (\bar{0},3013250) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 1,0000000 \\ - & \begin{cases} 0,0003397 \\ 0,0000001 \end{cases} \\ \hline & 0,9996602 \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = & -0,052112 \\ & (\bar{2},7169420) \end{array}$$

$(m'',m^{VI}) = 0'',007720\ (\bar{3},8876540)$, $(m^{VI},m'') = 0'',000088\ (\bar{5},9440008)$,
$[m'',m^{VI}[= 0'',000503\ (\bar{4},7015957)$, $[m^{VI},m''] = 0'',000006\ (\bar{6},7613641)$.

Марсъ и Юпитеръ.

$\log\alpha = \bar{1},4666600$, $\log\alpha^2 = \bar{2},9333200$, $\log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},9221138$,
$\log(1+\alpha^2) = 0,0357367$,

$$\begin{array}{rl} & 1,0000000 \\ & 0,0214417 \\ & 0,0001149 \\ & 0,0000025 \\ \hline b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = & 2,0431182 \\ & (0,3102935) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 1,0000000 \\ & \begin{cases} 0,0107208 \\ 0,0001149 \\ 0,0000031 \end{cases} \\ \hline & 0,9891612 \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = & -0,289686 \\ & (\bar{1},4619270) \end{array}$$

$(m''',m^{IV}) = 14'',630600\ (1,1652621)$, $(m^{IV},m''') = 0'',003101\ (\bar{3},4915378)$,
$[m''',m^{IV}] = 5'',296810\ \ (0,7240144)$, $[m^{IV},m'''] = 0'',001122\ (\bar{3},0503051)$.

Марсъ и Сатурнъ.

$\log \alpha = \bar{1},2034009$, $\log \alpha^2 = \bar{2},4068018$, $\log (1 - \alpha^2)^2 = \bar{1},9775500$,

$\log (1 + \alpha^2) = 0,0109421$,

1,0000000	1,0000000
0,0063788	$-\{$ 0,0031894
0,0000102	0,0000102
$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} =$ 2,0127780	0,9968004
(0,3037959)	$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -$ 0,1592242
	($\bar{1}$,2020091)

$(m''', m^{V}) = 0'',629534\ (\bar{1},7990190)$, $(m^{V}, m''') = 0'',000330\ (\bar{4},5180340)$,

$[m''', m^{V}] = 0'',125295\ (\bar{1},0979311)$, $[m^{V}, m'''] = 0'',000066\ (\bar{5},8169581)$.

Марсъ и Уранъ.

$\log \alpha = \bar{2},8999866$, $\log \alpha^2 = \bar{3},7999732$, $\log (1 - \alpha^2)^2 = \bar{1},9945026$,

$\log (1 + \alpha^2) = 0,0027314$,

1,0000000	1,0000000
0,0015772	$-\{$ 0,0007886
0,0000006	0,0000006
$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} =$ 2,0031556	0,9992108
(0,3017148)	$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = -$ 0,0793677
	($\bar{2}$,8996437)

$(m''', m^{VI}) = 0'',014626\ (\bar{2},1651374)$, $(m^{VI}, m''') = 0'',000028\ (\bar{5},4401822)$,

$[m''', m^{VI}] = 0'',001451\ (\bar{3},1616650)$, $[m^{VI}, m'''] = 0'',000003\ (\bar{6},4367098)$.

Юпитеръ и Сатурнъ.

$\log \alpha = 1,7367409$, $\log \alpha^2 = \bar{1},4734818$, $\log (1 - \alpha^2)^2 = \bar{1},6932972$,

$\log (1 + \alpha^2) = 0,1131061$,

1,0000000	1,0000000
0,0743741	$-\{$ 0,0371870
0,0013828	0,0013828
0,0001028	0,0001285
0,0000119	0,0000167
0,0000014	0,0000027
0,0000003	0,0000005
$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} =$ 2,1517466	0,9612818
(0,3327912)	$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -$ 0,5243144
	($\bar{1}$,7195917)

$(m^{IV}, m^{V}) = 7'',374477\ (0,8677312)$, $(m^{V}, m^{IV}) = 18'',216580\ (1,2604669)$,

$[m^{IV}, m^{V}] = 4'',821088\ (0,6831451)$, $[m^{V}, m^{IV}] = 11'',909200\ (1,0758826)$.

Юпитеръ и Уранъ.

$$\log\alpha = \bar{1},4333266,\ \log\alpha^2 = \bar{2},8666532,\ \log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},9336330,$$
$$\log(1+\alpha^2) = 0,0308271,$$

$$\begin{array}{rr} 1,0000000 & \\ 0,0183905 & \\ 0,0000845 & \\ \underline{0,0000015} & \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,0369530 & \\ (0,3089810) & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,0000000 \\ -\left\{\begin{array}{l} 0,0091952 \\ 0,0000845 \\ 0,0000019 \end{array}\right. \\ 0,9907184 \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,268756 \\ (\bar{1},4292768) \end{array}$$

$$(m^{IV}_{,}m^{VI}) = 0'',105321\ (\bar{1},0225169),\ (m^{VI}_{,}m^{IV}) = 0'',936010\ (\bar{1},9712804),$$
$$[m^{IV}_{,}m^{VI}] = 0'',035370\ (\bar{2},5486469),\ [m^{VI}_{,}m^{IV}] = 0'',314348\ (\bar{1},4974104).$$

Сатурнъ и Уранъ.

$$\log\alpha = \bar{1},6965857,\ \log\alpha^2 = \bar{1},3931714,\ \log(1-\alpha^2)^2 = \bar{1},7532784,$$
$$\log(1+\alpha^2) = 0,0959605.$$

$$\begin{array}{r} 1,0000000 \\ 0,0618175 \\ 0,0009553 \\ 0,0000591 \\ 0,0000057 \\ \underline{0,0000006} \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2,1256764 \\ (0,3274972) \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,0000000 \\ -\left\{\begin{array}{l} 0,0309087 \\ 0,0009553 \\ 0,0000738 \\ 0,0000080 \\ 0,0000010 \\ 0,0000002 \end{array}\right. \\ 0,9680530 \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0,4813764 \\ (\bar{1},6824849) \end{array}$$

$$(m^{V}_{,}m^{VI}) = 0'',386869\ (\bar{1},5875642),\ (m^{VI}_{,}m^{V}) = 1'',391850\ (0,1435920),$$
$$[m^{V}_{,}m^{VI}] = 0'',232402\ (\bar{1},3662399),\ [m^{VI}_{,}m^{V}] = 0'',836118\ (\bar{1},9222677).$$

24. По выраженію δf (чл. 19), годично-вѣковое измѣненіе эксцентрицитета земной орбиты будетъ

$$\begin{aligned} \delta f &= [m''_{,}m] f \sin(\omega - \omega'') + [m''_{,}m'] f' \sin(\omega' - \omega'') + [m''_{,}m'''] f''' \sin(\omega''' - \omega'') \\ &\quad + [m''_{,}m^{IV}] f^{IV} \sin(\omega^{IV} - \omega'') + [m''_{,}m^{V}] f^{V} \sin(\omega^{V} - \omega'') + [m''_{,}m^{VI}] f^{VI} \sin(\omega^{VI} - \omega'') \\ &= -0'',0027335\,(1+\mu) + 0'',0144260\,(1+\mu') - 0'',0170426\,(1+\mu''') \\ &\quad - 0'',0812113\,(1+\mu^{IV}) - 0'',0004306\,(1+\mu^{V}) + 0'',0000217\,(1+\mu^{VI}) \\ &= -0'',0869703 - 0'',0027335\,\mu + 0'',0144260\,\mu' - 0'',0170426\,\mu''' \\ &\qquad - 0'',0812113\,\mu^{IV} - 0'',0004306\,\mu^{V} + 0'',0000217\,\mu^{VI}. \end{aligned}$$

Здѣсь μ, μ′, μ″′ и пр. означаютъ числа, которыми, можетъ быть, понадобится исправить массы планетъ, по сравненіи найденной величины — 0″,08697 съ наблюденіями. Отсюда для годично-вѣковаго измѣненія наибольшаго уравненія центра $\delta Q = 2\delta f$ получаемъ

$$\delta Q = -0'',1739406 - 0'',0054670\,\mu + 0'',0288520\,\mu' - 0'',0340852\,\mu''' - 0'',1624226\,\mu^{IV} - 0'',0008612\,\mu^{V} + 0'',000434\,\mu^{VI}.$$

И такъ, наибольшее уравненіе центра во сто лѣтъ уменьшится до 17″. Если примемъ, что массы планетъ удовлетворительно вѣрны; то найдемъ, что годично-вѣковое измѣненіе эксцентрицитета земной орбиты, выраженное въ единицахъ, есть

$$\delta f = -0,00000042164,$$

такъ что, считая отъ 1800 г.,

$$f = 0,01679226 - 0,00000042164\,t.$$

По выраженію $\delta\omega$ (чл. 19), годично-вѣковое движеніе перигелія земной орбиты относительно звѣздъ будетъ

$$\delta\omega = (m'',m) + (m'',m') + (m'',m''') + (m'',m^{IV}) + (m'',m^{V}) + (m'',m^{VI})$$
$$- \Big\{[m'',m]\frac{f}{f''}\cos(\omega - \omega'') + [m'',m']\frac{f'}{f''}\cos(\omega' - \omega'') + [m'',m''']\frac{f'''}{f''}\cos(\omega''' - \omega'')$$
$$+ [m'',m^{IV}]\frac{f^{IV}}{f''}\cos(\omega^{IV} - \omega'') + [m'',m^{V}]\frac{f^{V}}{f''}\cos(\omega^{V} - \omega'') + [m'',m^{VI}]\frac{f^{VI}}{f''}\cos(\omega^{VI} - \omega'')\Big\}$$
$$= 11'',533796 - 0'',280472\,\mu + 3'',637415\,\mu' + 1'',066517\,\mu''' + 6'',917267\,\mu^{IV} + 0'',185874\,\mu^{V} + 0,007197\,\mu^{VI}.$$

Въ формулахъ (D) и (E), $\delta N'$ означаетъ перемѣны въ N', происходящія отъ взаимнаго дѣйствія земли и прочихъ планетъ; слѣд. найдемъ (чл. 18)

для Меркурія, $\delta N = -(m'',m) = -0'',065888\,(1+\mu)$,
» Венеры, $\delta N_{,} = -(m'',m') = -5,173924\,(1+\mu')$,
» Марса, $\delta N_{,,,} = -(m'',m''') = -0,298197\,(1+\mu''')$,
» Юпитера, $\delta N_{IV} = -(m'',m^{IV}) = -7,053983\,(1+\mu^{IV})$,
» Сатурна, $\delta N_{V} = -(m'',m^{V}) = -0,325549\,(1+\mu^{V})$,
» Урана, $\delta N_{VI} = -(m'',m^{VI}) = -0,007720\,(1+\mu^{VI})$.

Потомъ вычисленія даютъ

Меркурій, $d\varepsilon = \sin I \sin N\delta N = -0'',005773 - 0'',005773\,\mu$,
Венера, $d\varepsilon = \sin I' \sin N'\delta N_{,} = -0,295437 - 0,295437\,\mu'$,
Марсъ, $d\varepsilon = \sin I''' \sin N'''\delta N_{,,,} = -0,007160 - 0,007160\,\mu'''$,
Юпитеръ, $d\varepsilon = \sin I^{IV} \sin N^{IV}\delta N_{IV} = -0,160052 - 0,160052\,\mu^{IV}$,
Сатурнъ, $d\varepsilon = \sin I^{V} \sin N^{V}\delta N_{V} = -0,013137 - 0,013137\,\mu^{V}$,
Уранъ, $d\varepsilon = \sin I^{VI} \sin N^{VI}\delta N_{VI} = -0,000099 - 0, 00099\,\mu^{VI}$.

И такъ, годично-вѣковое уменьшеніе наклоненія эклиптики къ экватору, происходящее отъ дѣйствія планетъ на землю, есть

$$d\varepsilon = -0'',481658 - 0'',005773\,\mu - 0'',295437\,\mu' - 0'',007160\,\mu''' - 0'',160052\,\mu^{IV} - 0'',013137\,\mu^{V} - 0'',000099\,\mu^{VI};$$

такъ что, считая отъ 1800 г.,

$$\varepsilon = 23^\circ\,27'\,54'',35 - 0'',481658\,t.$$

Такимъ же образомъ изъ формулы (E) получаемъ

$$\delta r = 0'',145092 + 0'',012863\,\mu + 0'',184130\,\mu' + 0'',014854\,\mu''' - 0'',054638\,\mu^{IV} - 0'',012187\,\mu^{V} + 0'',000070\,\mu^{VI}.$$

Но какъ годичное предвареніе равноденствій, опредѣляемое наблюденіями или видимое, есть $50'',24127$; то дѣйствительное будетъ

$$50'',38636.$$

Это число весьма близко къ числу $50'',38781$, найденному изъ наблюденій въ запискѣ «О предвареніи равноденствій». Отсюда заключаемъ, что принятыя массы планетъ весьма близки къ ихъ истиннымъ величинамъ. Также касательно движенія перигелія замѣтимъ, что изъ сравненія наблюденій Маскелина съ наблюденіями Флемстида, Деламбръ нашелъ $61'',94$; если изъ этого числа вычтимъ $50'',38$, то получимъ $11'',56$, — число, весьма близкое къ вышенайденному.

25. Годично-вѣковыя возмущенія въ прочихъ планетахъ суть слѣдующія:

Меркурій.

$$\delta f = 0'',006288 + 0'',010431\,\mu' + 0'',002995\,\mu'' - 0'',000804\,\mu''' - 0'',006392\,\mu^{IV} + 0'',000056\,\mu^{V} + 0'',000002\,\mu^{VI};$$

слѣд. отъ 1800 г.

$$f = 0,2056163 + 0,00000003048\,t,$$

$$\delta Q = 0'',012576 + 0'',020862\,\mu' + 0'',005990\,\mu'' - 0'',001608\,\mu''' - 0'',012784\,\mu^{IV} + 0'',000112\,\mu^{V} + 0'',000004\,\mu^{VI};$$

$$\delta\omega = 5'',417661 + 2'',873929\,\mu' + 0'',853165\,\mu'' + 0'',028809\,\mu''' + 1'',583901\,\mu^{IV} + 0'',076005\,\mu^{V} + 0'',001852\,\mu^{VI}.$$

Формулы (Y) даютъ:

$$\begin{aligned}\delta I = &\{(m,m^{VI}) - (m'',m^{VI})\}\,\mathrm{tang}\,I^{VI}\sin(N - N^{VI}) + \{(m,m^{V}) - (m'',m^{V})\}\,\mathrm{tang}\,I^{V}\sin(N - N^{V})\\ &+ \{(m,m^{IV}) - (m'',m^{IV})\}\,\mathrm{tang}\,I^{IV}\sin(N - N^{IV}) + \{(m,m''') - (m'',m''')\}\,\mathrm{tang}\,I'''\sin(N - N''')\\ &+ \{(m,m') - (m'',m')\}\,\mathrm{tang}\,I'\sin(N - N')\\ = &\,0'',174327 + 0'',000036\,\mu^{VI} + 0'',009884\,\mu^{V} + 0'',099251\,\mu^{IV} + 0'',000811\,\mu''' + 0'',064845\,\mu';\end{aligned}$$

$$\delta N = -\{(m,m'') + (m,m') + (m,m''') + (m,m^{IV}) + (m,m^{V}) + (m,m^{VI}) + (m'',m)\}$$
$$+ \{(m,m') - (m'',m')\}\frac{\operatorname{tang} I'}{\operatorname{tang} I}\cos(N-N') + \{(m,m''') - (m'',m''')\}\frac{\operatorname{tang} I'''}{\operatorname{tang} I}\cos(N-N''')$$
$$+ \{(m,m^{IV}) - (m'',m^{IV})\}\frac{\operatorname{tang} I^{IV}}{\operatorname{tang} I}\cos(N-N^{IV}) + \{(m,m^{V}) - (m'',m^{V})\}\frac{\operatorname{tang} I^{V}}{\operatorname{tang} I}\cos(N-N^{V})$$
$$+ \{(m,m^{VI}) - (m'',m^{VI})\}\frac{\operatorname{tang} I^{VI}}{\operatorname{tang} I}\cos(N-N^{VI})$$
$$= -7'',251062 - 0'',002427\,\mu^{VI} - 0'',112897\,\mu^{V} - 2'',220233\,\mu^{IV} - 0'',099068\,\mu'''$$
$$- 0'',884164\,\mu'' - 3'',866385\,\mu' - 0'',065888\,\mu.$$

Венера.

$$\delta f = -0'',110950 - 0'',030631\,\mu - 0'',046421\,\mu'' - 0'',002196\,\mu'''$$
$$- 0'',031037\,\mu^{IV} - 0'',000672\,\mu^{V} + 0'',000007\,\mu^{VI};$$

слѣд. отъ 1800 г.

$$f = 0,00686182 - 0,0000005379\,t.$$

$$\delta Q = -0'',221900 - 0'',061262\,\mu - 0'',092842\,\mu'' - 0'',004392\,\mu'''$$
$$- 0'',062074\,\mu^{IV} - 0'',001344\,\mu^{V} + 0'',000014\,\mu^{VI};$$

$$\delta I = 0'',039725 - 0'',000001\,\mu^{VI} + 0'',003340\,\mu^{V} + 0'',026233\,\mu^{IV}$$
$$- 0'',002866\,\mu''' + 0'',013019\,\mu;$$

$$\delta N = -17'',549642 - 0'',005419\,\mu^{VI} - 0'',272903\,\mu^{V} - 5'',209190\,\mu^{IV}$$
$$- 0'',197504\,\mu''' - 6'',803375\,\mu'' - 5'',173924\,\mu' + 0'',112673\,\mu.$$

$$\delta\omega = -0'',734887 - 2'',912576\,\mu - 5'',296453\,\mu'' + 0'',832550\,\mu''' + 6'',558209\,\mu^{IV}$$
$$+ 0'',079850\,\mu^{V} + 0'',003533\,\mu^{VI}.$$

Марсъ.

$$\delta f = 0'',186023 + 0'',000798\,\mu + 0'',000743\,\mu' + 0'',018554\,\mu''$$
$$+ 0'',159664\,\mu^{IV} + 0'',006282\,\mu^{V} - 0'',000018\,\mu^{VI};$$

слѣд. отъ 1800 г.

$$f = 0,0932168 + 0,0000009018\,t;$$

$$\delta Q = 0'',372046 + 0'',001596\,\mu + 0'',001486\,\mu' + 0'',037108\,\mu''$$
$$+ 0'',319328\,\mu^{IV} + 0'',012564\,\mu^{V} - 0'',000036\,\mu^{VI}.$$

$$\delta\omega = 15'',629505 + 0'',014415\,\mu + 0'',487162\,\mu' + 1'',952899\,\mu''$$
$$+ 12'',496189\,\mu^{IV} + 0'',663513\,\mu^{V} + 0'',015327\,\mu^{VI};$$

$$\delta I = -0'',020172 - 0'',000039\,\mu^{VI} - 0'',011891\,\mu^{V} - 0'',134009\,\mu^{IV}$$
$$+ 0'',126000\,\mu' - 0'',000233\,\mu;$$

$$\delta N = -22'',144599 - 0'',012009\,\mu^{VI} - 0'',449673\,\mu^{V} - 11'',205800\,\mu^{IV}$$
$$- 0'',298197\,\mu''' - 1'',802212\,\mu'' - 8'',161814\,\mu' - 0'',214894\,\mu.$$

Юпитеръ.

$$\delta f = 0{,}''265441 + 0{,}''000003\,\mu + 0{,}''000004\,\mu' + 0{,}''000036\,\mu''$$
$$- 0{,}000066\,\mu''' + 0{,}''264803\,\mu^{V} + 0{,}''000661\,\mu^{VI};$$

слѣд. отъ 1800 г.

$$f = 0{,}0481621 + 0{,}0000012928\,t.$$

$$\delta Q = 0{,}''530882 + 0{,}''000006\,\mu + 0{,}''000008\,\mu' + 0{,}''000072\,\mu''$$
$$- 0{,}''000132\,\mu''' + 0{,}''529606\,\mu^{V} + 0{,}''001322\,\mu^{VI}.$$

$$\delta\omega = 6{,}''358344 + 0{,}''000126\,\mu + 0{,}''004133\,\mu' + 0{,}''009015\,\mu''$$
$$+ 0{,}''001406\,\mu''' + 6{,}''206980\,\mu^{V} + 0{,}''136684\,\mu^{VI};$$

$$\delta I = - 0{,}''207365 + 0{,}''000567\,\mu^{VI} - 0{,}''071685\,\mu^{V} - 0{,}''007354\,\mu'''$$
$$- 0{,}''122490\,\mu' - 0{,}''006403\,\mu;$$

$$\delta N = - 14{,}''208127 - 0{,}''053404\,\mu^{VI} + 5{,}''633553\,\mu^{V} - 7{,}''053983\,\mu^{IV}$$
$$- 0{,}''267959\,\mu''' - 0{,}''009036\,\mu'' - 12{,}''242826\,\mu' - 0{,}''214472\,\mu.$$

Сатурнъ.

$$\delta f = - 0{,}''550459 - 0{,}''000000\,\mu + 0{,}''000000\,\mu' + 0{,}''000000\,\mu''$$
$$- 0{,}''000005\,\mu''' - 0{,}''561063\,\mu^{IV} + 0{,}010609\,\mu^{VI};$$

слѣд. отъ 1800 г.

$$f = 0{,}0561505 - 0{,}0000026687\,t;$$

$$\delta Q = - 1{,}''100918 - 0{,}''000010\,\mu''' - 1{,}''122126\,\mu^{IV} + 0{,}021218^{VI}.$$

$$\delta\omega = 16{,}''444616 + 0{,}''000015\,\mu + 0{,}''000473\,\mu' + 0{,}''000990\,\mu''$$
$$+ 0{,}''0000379\,\mu''' + 16{,}''094817\,\mu^{IV} + 0{,}''347972\,\mu^{VI};$$

$$\delta I = - 0{,}''137816 + 0{,}''003222\,\mu^{VI} + 0{,}''059814\,\mu^{IV} - 0{,}''008651\,\mu'''$$
$$- 0{,}''184812\,\mu' - 0{,}''007389\,\mu;$$

$$\delta N = - 18{,}''910362 - 0{,}''295330\,\mu^{VI} - 0{,}''325549\,\mu^{V} - 12{,}''497610\,\mu^{IV}$$
$$- 0{,}''097482\,\mu''' - 0{,}''001030\,\mu'' - 5{,}''617727\,\mu' - 0{,}''075634\,\mu.$$

Уранъ.

$$\delta f = - 0{,}''052050 - 0{,}''000000\,\mu - 0{,}''000000\,\mu' - 0{,}''000000\,\mu''$$
$$+ 0{,}''000000\,\mu''' - 0{,}''006066\,\mu^{IV} - 0{,}''045984\,\mu^{V};$$

слѣд. отъ 1800 г.

$$f = 0{,}''0466108 - 0{,}0000002523\,t;$$

$$\delta Q = - 0{,}''104100 - 0{,}''012132\,\mu^{IV} - 0{,}''091968\,\mu^{V}.$$

$$\delta\omega = 2{,}''422532 + 0{,}''000002\,\mu + 0{,}''000041\,\mu' + 0{,}''000088\,\mu''$$
$$+ 0{,}''000033\,\mu''' + 1{,}''233607\,\mu^{IV} + 1{,}''188761\,\mu^{V}.$$

$$\delta I = 0{,}''033377 - 0{,}''029185\,\mu^{V} + 0{,}''060297\,\mu^{IV} - 0{,}''004073\,\mu'''$$
$$+ 0{,}''010016\,\mu' - 0{,}''003678\,\mu;$$

$$\delta N = - 32{,}''890259 - 0{,}''007720\,\mu^{VI} + 1{,}''279592\,\mu^{V} - 10{,}''313302\,\mu^{IV}$$
$$- 0{,}''646355\,\mu''' - 0{,}''000088\,\mu'' - 22{,}''669191\,\mu' - 0{,}''533195\,\mu.$$

ОТДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ.

ВѢКОВЫЯ ИЗМѢНЕНІЯ ЭЛЕМЕНТОВЪ ПЛАНЕТЪ ДЛЯ ВСЯКАГО ВРЕМЕНИ.

I. ВѢКОВЫЯ ИЗМѢНЕНІЯ ВЪ ЭКСЦЕНТРИЦИТЕТАХЪ И ДОЛГОТАХЪ ПЕРИГЕЛЕВЪ.

1. Въ предъидущемъ отдѣленіи доказано, что при взаимномъ дѣйствіи двухъ планетъ,

$$\frac{df}{dt} = [m,m'] f' \sin(\omega' - \omega),\ \frac{d\omega}{dt} = (m,m') - [m,m'] \frac{f'}{f} \cos(\omega' - \omega).$$

Если предположимъ

$$h = f \sin\omega,\ h' = f' \sin\omega',$$
$$l = f \cos\omega,\ l' = f' \cos\omega';$$

то выйдетъ

$$\frac{dh}{dt} = \sin\omega \frac{df}{dt} + l \frac{d\omega}{dt},$$

гдѣ

$$\sin\omega \frac{df}{dt} = [m,m'] \frac{(h'l - l'h)h}{f^2},$$
$$l \frac{d\omega}{dt} = (m,m')\, l - [m,m'] \frac{(l'l + h'h)l}{f^2};$$

слѣд.

$$\frac{dh}{dt} = (m,m')\, l - [m,m']\, l'.$$

И такъ для семи планетъ составимъ семь уравненій:

$$\frac{dh}{dt} = \{(m,m') + (m,m'') + (m,m''') + (m,m^{IV}) + (m,m^{V}) + (m,m^{VI})\}\, l$$
$$- [m,m']\, l' - [m,m'']\, l'' - [m,m''']\, l''' - [m,m^{IV}]\, l^{IV} - [m,m^{V}]\, l^{V} - [m,m^{VI}]\, l^{VI},$$

$$\frac{dh'}{dt} = \{(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + (m',m^{IV}) + (m',m^{V}) + (m',m^{VI})\}\, l'$$
$$- [m',m]\, l - [m',m'']\, l'' - [m',m''']\, l''' - [m',m^{IV}]\, l^{IV} - [m',m^{V}]\, l^{V} - [m',m^{VI}]\, l^{VI},$$

$$\begin{aligned}\frac{dh''}{dt} = & \{(m'',m) + (m'',m') + (m'',m''') + (m'',m^{IV}) + (m'',m^{V}) + (m'',m^{VI})\}\, l'' \\ & - [m'',m]\, l - [m'',m']\, l' - [m'',m''']\, l''' - [m'',m^{IV}]\, l^{IV} - [m'',m^{V}]\, l^{V} - [m'',m^{VI}]\, l^{VI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh'''}{dt} = & \{(m''',m) + (m''',m') + (m''',m'') + (m''',m^{IV}) + (m''',m^{V}) + (m''',m^{VI})\}\, l''' \\ & - [m''',m]\, l - [m''',m']\, l' - [m''',m'']\, l'' - [m''',m^{IV}]\, l^{IV} - [m''',m^{V}]\, l^{V} - [m''',m^{VI}]\, l^{VI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh^{IV}}{dt} = & \{(m^{IV},m) + (m^{IV},m') + (m^{IV},m'') + (m^{IV},m''') + (m^{IV},m^{V}) + (m^{IV},m^{VI})\}\, l^{IV} \\ & - [m^{IV},m]\, l - [m^{IV},m']\, l' - [m^{IV},m'']\, l'' - [m^{IV},m''']\, l''' - [m^{IV},m^{V}]\, l^{V} - [m^{IV},m^{VI}]\, l^{VI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh^{V}}{dt} = & \{(m^{V},m) + (m^{V},m') + (m^{V},m'') + (m^{V},m''') + (m^{V},m^{IV}) + (m^{V},m^{VI})\}\, l^{V} \\ & - [m^{V},m]\, l - [m^{V},m']\, l' - [m^{V},m'']\, l'' - [m^{V},m''']\, l''' - [m^{V},m^{IV}]\, l^{IV} - [m^{V},m^{VI}]\, l^{VI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh^{VI}}{dt} = & \{(m^{VI},m) + (m^{VI},m') + (m^{VI},m'') + (m^{VI},m''') + (m^{VI},m^{IV}) + (m^{VI},m^{V})\}\, l^{VI} \\ & - [m^{VI},m]\, l - [m^{VI},m']\, l' - [m^{VI},m'']\, l'' - [m^{VI},m''']\, l''' - [m^{VI},m^{IV}]\, l^{IV} - [m^{VI},m^{V}]\, l^{V}.\end{aligned}$$

2. Изъ предположеній предъидущаго члена находимъ еще

$$\frac{dl}{dt} = \cos\omega \frac{df}{dt} - h\frac{d\omega}{dt},$$

гдѣ

$$\cos\omega\frac{df}{dt} = [m,m']\frac{(h'l - l'h)l}{f^2},$$

$$h\frac{d\omega}{dt} = (m,m')\, h - [m,m']\frac{(ll' + hh')h}{f^2};$$

слѣд.

$$\frac{dl}{dt} = -(m,m')\, h + [m,m']\, h',$$

и отсюда для всѣхъ семи планетъ семь уравненій:

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} = & -\{(m,m') + (m,m'') + (m,m''') + (m,m^{IV}) + (m,m^{V}) + (m,m^{VI})\}\, h \\ & + [m,m']\, h' + [m,m'']\, h'' + [m,m''']\, h''' + [m,m^{IV}]\, h^{IV} + [m,m^{V}]\, h^{V} + [m,m^{VI}]\, h^{VI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dl'}{dt} = & -\{(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + (m',m^{IV}) + (m',m^{V}) + (m',m^{VI})\}\, h' \\ & + [m',m]\, h + [m',m'']\, h'' + [m',m''']\, h''' + [m',m^{IV}]\, h^{IV} + [m',m^{V}]\, h^{V} + [m',m^{VI}]\, h^{VI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dl''}{dt} = & -\{(m'',m) + (m'',m') + (m'',m''') + (m'',m^{IV}) + (m'',m^{V}) + (m'',m^{VI})\}\, h'' \\ & + [m'',m]\, h + [m'',m']\, h' + [m'',m''']\, h''' + [m'',m^{IV}]\, h^{IV} + [m'',m^{V}]\, h^{V} + [m'',m^{VI}]\, h^{VI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dl'''}{dt} = & -\{(m''',m) + (m''',m') + (m''',m'') + (m''',m^{IV}) + (m''',m^{V}) + (m''',m^{VI})\}\, h''' \\ & + [m''',m]\, h + [m''',m']\, h' + [m''',m'']\, h'' + [m''',m^{IV}]\, h^{IV} + [m''',m^{V}]\, h^{V} + [m''',m^{VI}]\, h^{VI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dl^{IV}}{dt} = & -\{(m^{IV},m) + (m^{IV},m') + (m^{IV},m'') + (m^{IV},m''') + (m^{IV},m^{V}) + (m^{IV},m^{VI})\}\, h^{IV} \\ & + [m^{IV},m]\, h + [m^{IV},m']\, h' + [m^{IV},m'']\, h'' + [m^{IV},m''']\, h''' + [m^{IV},m^{V}]\, h^{V} + [m^{IV},m^{VI}]\, h^{VI},\end{aligned}$$

$$\frac{dl^{V}}{dt} = -\{(m^{V},m) + (m^{V},m') + (m^{V},m'') + (m^{V},m''') + (m^{V},m^{IV}) + (m^{V},m^{VI})\}\,h^{V}$$
$$+ [m^{V},m]\,h + [m^{V},m']\,h' + [m^{V},m'']\,h'' + [m^{V},m''']\,h''' + [m^{V},m^{IV}]\,h^{IV} + [m^{V},m^{VI}]\,h^{VI},$$
$$\frac{dl^{VI}}{dt} = -\{(m^{VI},m) + (m^{VI},m') + (m^{VI},m'') + (m^{VI},m''') + (m^{VI},m^{IV}) + (m^{VI},m^{V})\}\,h^{VI}$$
$$+ [m^{VI},m]\,h + [m^{VI},m']\,h' + [m^{VI},m'']\,h'' + [m^{VI},m''']\,h''' + [m^{VI},m^{IV}]\,h^{IV} + [m^{VI},m^{V}]\,h^{V}.$$

3. Для интегрированія линѣйныхъ уравненій двухъ предъидущихъ членовъ, должно положить

$$h = M\sin(gt+\beta),\ l = M\cos(gt+\beta),$$
$$h' = M'\sin(gt+\beta),\ l' = M'\cos(gt+\beta),$$
$$h'' = M''\sin(gt+\beta),\ l'' = M''\cos(gt+\beta),$$

и пр.

гдѣ M, M', M'', и пр., g и β суть количества постоянныя произвольныя. Ежели эти величины h, l, и пр., и ихъ дифференціалы внесемъ въ упомянутыя уравненія; то получимъ семь уравненій (A):

$$\{g - [(m,m') + (m,m'') + (m,m''') + (m,m^{IV}) + (m,m^{V}) + (m,m^{VI})]\}\,M$$
$$+ [m,m']\,M' + [m,m'']\,M'' + [m,m''']\,M''' + [m,m^{IV}]\,M^{IV} + [m,m^{V}]\,M^{V} + [m,m^{VI}]\,M^{VI} = 0,$$
$$\{g - [(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + (m',m^{IV}) + (m',m^{V}) + (m',m^{VI})]\}\,M'$$
$$+ [m',m]\,M + [m',m'']\,M'' + [m',m''']\,M''' + [m',m^{IV}]\,M^{IV} + [m',m^{V}]\,M^{V} + [m',m^{VI}]\,M^{VI} = 0,$$
$$\{g - [(m'',m) + (m'',m') + (m'',m''') + (m'',m^{IV}) + (m'',m^{V}) + (m'',m^{VI})]\}\,M''$$
$$+ [m'',m]\,M + [m'',m']\,M' + [m'',m''']\,M''' + [m'',m^{IV}]\,M^{IV} + [m'',m^{V}]\,M^{V} + [m'',m^{VI}]\,M^{VI} = 0,$$
$$\{g - [(m''',m) + (m''',m') + (m''',m'') + (m''',m^{IV}) + (m''',m^{V}) + (m''',m^{VI})]\}\,M'''$$
$$+ [m''',m]\,M + [m''',m']\,M' + [m''',m'']\,M'' + [m''',m^{IV}]\,M^{IV} + [m''',m^{V}]\,M^{V} + [m''',m^{VI}]\,M^{VI} = 0,$$
$$\{g - [(m^{IV},m) + (m^{IV},m') + (m^{IV},m'') + (m^{IV},m''') + (m^{IV},m^{V}) + (m^{IV},m^{VI})]\}\,M^{IV}$$
$$+ [m^{IV},m]\,M + [m^{IV},m']\,M' + [m^{IV},m'']\,M'' + [m^{IV},m''']\,M''' + [m^{IV},m^{V}]\,M^{V} + [m^{IV},m^{VI}]\,M^{VI} = 0,$$
$$\{g - [(m^{V},m) + (m^{V},m') + (m^{V},m'') + (m^{V},m''') + (m^{V},m^{IV}) + (m^{V},m^{VI})]\}\,M^{V}$$
$$+ [m^{V},m]\,M + [m^{V},m']\,M' + [m^{V},m'']\,M'' + [m^{V},m''']\,M''' + [m^{V},m^{IV})\,M^{IV} + [m^{V},m^{VI}]\,M^{VI} = 0,$$
$$\{g - [(m^{VI},m) + (m^{VI},m') + (m^{VI},m'') + (m^{VI},m''') + (m^{VI},m^{IV}) + (m^{VI},m^{V})]\}\,M^{VI}$$
$$+ [m^{VI},m]\,M + [m^{VI},m']\,M' + [m^{VI},m'']\,M'' + [m^{VI},m''']\,M''' + [m^{VI},m^{IV}]\,M^{IV} + [m^{VI},m^{V}]\,M^{V} = 0,$$

изъ которыхъ, по исключеніи коэффиціентовъ M, M', M'', и пр., составится уравненіе по g седьмой степени; слѣдственно g имѣетъ семь значеній, и потому искомые интегралы суть (A'):

$$h = M\sin(gt+\beta) + M_1\sin(g_1t+\beta_1) + M_2\sin(g_2t+\beta_2) + M_3\sin(g_3t+\beta_3)$$
$$+ M_4\sin(g_4t+\beta_4) + M_5\sin(g_5t+\beta_5) + M_6\sin(g_6t+\beta_6),$$
$$h' = M'\sin(gt+\beta) + M_1'\sin(g_1t+\beta_1) + M_2'\sin(g_2t+\beta_2) + M_3'\sin(g_3t+\beta_3)$$
$$+ M_4'\sin(g_4t+\beta_4) + M_5'\sin(g_5t+\beta_5) + M_6'\sin(g_6t+\beta_6),$$

$$h'' = M'' \sin(gt+\beta) + M''_1 \sin(g_1t+\beta_1) + M''_2 \sin(g_2t+\beta_2) + M''_3 \sin(g_3t+\beta_3)$$
$$+ M''_4 \sin(g_4t+\beta_4) + M''_5 \sin(g_5t+\beta_5) + M''_6 \sin(g_6t+\beta_6),$$
$$h''' = M''' \sin(gt+\beta) + M'''_1 \sin(g_1t+\beta_1) + M'''_2 \sin(g_2t+\beta_2) + M'''_3 \sin(g_3t+\beta_3)$$
$$+ M'''_4 \sin(g_4t+\beta_4) + M'''_5 \sin(g_5t+\beta_5) + M'''_6 \sin(g_6t+\beta_6),$$
$$h^{IV} = M^{IV} \sin(gt+\beta) + M^{IV}_1 \sin(g_1t+\beta_1) + M^{IV}_2 \sin(g_2t+\beta_2) + M^{IV}_3 \sin(g_3t+\beta_3)$$
$$+ M^{IV}_4 \sin(g_4t+\beta_4) + M^{IV}_5 \sin(g_5t+\beta_5) + M^{IV}_6 \sin(g_6t+\beta_6),$$
$$h^{V} = M^{V} \sin(gt+\beta) + M^{V}_1 \sin(g_1t+\beta_1) + M^{V}_2 \sin(g_2t+\beta_2) + M^{V}_3 \sin(g_3t+\beta_3)$$
$$+ M^{V}_4 \sin(g_4t+\beta_4) + M^{V}_5 \sin(g_5t+\beta_5) + M^{V}_6 \sin(g_6t+\beta_6),$$
$$h^{VI} = M^{VI} \sin(gt+\beta) + M^{VI}_1 \sin(g_1t+\beta_1) + M^{VI}_2 \sin(g_2t+\beta_2) + M^{VI}_3 \sin(g_3t+\beta_3)$$
$$+ M^{VI}_4 \sin(g_4t+\beta_4) + M^{VI}_5 \sin(g_5t+\beta_5) + M^{VI}_6 \sin(g_6t+\beta_6).$$

Перемѣнивъ знакъ *sin* на *cos*, получимъ выраженія величинъ l, l', l'' и пр.

4. Теперь приступаемъ къ вычисленіямъ.

Вставивъ въ уравненія (A) извѣстныя уже величины (m,m'), (m,m''), и пр., $[m,m']$, $[m,m'']$, и пр., выведемъ семь уравненій (B)

$$(g - 5'',500903)\,M + 1'',870057\,M' + 0'',419417\,M'' + 0'',008813\,M'''$$
$$+ 0'',148687\,M^{IV} + 0'',003902\,M^{V} + 0'',000046\,M^{VI} = 0,$$
$$(g - 11'',587972)\,M' + 0'',183237\,M + 5'',664708\,M'' + 0'',058710\,M'''$$
$$+ 0'',727154\,M^{IV} + 0'',018781\,M^{V} + 0'',000228\,M^{VI} = 0,$$
$$(g - 12'',925261)\,M'' + 0'',031254\,M + 4'',307974\,M' + 0'',229308\,M'''$$
$$+ 1'',686882\,M^{IV} + 0'',042607\,M^{V} + 0'',000503\,M^{VI} = 0,$$
$$(g - 17'',558543)\,M''' + 0'',003969\,M + 0'',269843\,M' + 1'',385873\,M''$$
$$+ 5'',296810\,M^{IV} + 0'',125295\,M^{V} + 0'',001451\,M^{VI} = 0,$$
$$(g - 7'',496174)\,M^{IV} + 0'',000014\,M + 0'',000708\,M' + 0'',002161\,M''$$
$$+ 0'',001122\,M''' + 4'',821088\,M^{V} + 0'',035370\,M^{VI} = 0,$$
$$(g - 18'',605304)\,M^{V} + 0'',000001\,M + 0'',0000045\,M' + 0'',000135\,M''$$
$$+ 0'',000066\,M''' + 11'',909200\,M^{IV} + 0'',232402\,M^{VI} = 0,$$
$$(g - 2'',328019)\,M^{VI} + 0'',000000\,M + 0'',000002\,M' + 0'',000006\,M''$$
$$+ 0'',000003\,M''' + 0'',314348\,M^{IV} + 0'',836118\,M^{V} = 0.$$

По исключеніи M, M', и пр., какъ выше замѣчено, выйдетъ уравненіе седьмой степени по g: но составленіе и рѣшеніе этого уравненія весьма затруднительны, по сему величины g и соотвѣтствующія имъ величины M, M', и пр. опредѣляются постепеннымъ приближеніемъ. Разсматривая уравненія (B), видимъ, что, для перваго приближенія, си-

стему семи планетъ можно раздѣлить на двѣ независимыя между собою группы, изъ которыхъ одну составляютъ Меркурій, Венера, Земля и Марсъ, а другую — Юпитеръ, Сатурнъ и Уранъ. Въ такомъ предположеніи, получимъ двѣ группы уравненій:

$$\left.\begin{aligned}(g-7''{,}496174)M^{IV}+4''{,}821088\,M^{V}+0''{,}035370\,M^{VI}=0,\\(g-18''{,}605304)M^{V}+11''{,}909200\,M^{IV}+0''{,}232402\,M^{VI}=0,\\(g-2''{,}328019)M^{VI}+0''{,}314348\,M^{IV}+0''{,}836118\,M^{V}=0,\end{aligned}\right\}\ldots(C)$$

и

$$\left.\begin{aligned}(g-5''{,}500903)M+1''{,}870057\,M'+0''{,}419417\,M''+0''{,}008813\,M'''=0,\\(g-11''{,}587972)M'+0''{,}183237\,M+5''{,}664708\,M''+0''{,}058710\,M'''=0,\\(g-12''{,}925261)M''+0''{,}031254\,M+4''{,}307974\,M'+0''{,}229308\,M'''=0,\\(g-17''{,}558543)M'''+0''{,}003969\,M+0''{,}269843\,M'+1''{,}385873\,M''=0.\end{aligned}\right\}\ldots(D).$$

Исключеніе количествъ M^{IV}, M^{V}, M^{VI} изъ урав. (C) приводитъ къ уравненію третьей степени по g, для составленія котораго означаемъ числа

7,496174	чрезъ a,	4,821088	чрезъ b,	0,035370	чрезъ c,		
18,605304	» a',	11,909200	» b',	0,232402	» c',		
2,328019	» a'',	0,314348	» b'',	0,836118	» c'',		

и тотчасъ получаемъ

$$a+a'+a''=28{,}429497,$$
$$aa'+aa''+a'a''-cb''-bb'-c'c''=142{,}612594,$$
$$-(aa'a''-a'cb''-bb'a''-ac'c''-cc''b'-bb''c')=-188{,}653850;$$

слѣд. будетъ

$$g^3-28{,}429497\,g^2+142{,}612594\,g-188{,}653850=0.$$

Когда изъ этого уравненія исключимъ второй членъ, тогда, помощью извѣстныхъ тригонометрическихъ формулъ, опредѣлимъ

$$g=\ \ 2''{,}260427,$$
$$g_1=\ \ 3''{,}717265,$$
$$g_2=22''{,}451805.$$

Не трудно увѣриться, что эти величины g достаточно удовлетворяютъ разрѣшаемому уравненію.

5. Поступивъ такимъ же образомъ съ уравненіями (D), составимъ сперва уравненіе четвертой степени такого вида:

$$
\begin{aligned}
g^4 - (a + a' + a'' + a''')\,g^3 + [(aa' &+ aa'' + aa''' + a'a'' + a'a''' + a''a''') \\
&- (d''d''' + d'c''' + c'c'' + db''' + cb'' + bb')]\,.\,g^2 \\
&- \{(aa'a'' + aa'a''' + aa''a''' + a'a''a''') \\
&\quad - [(a + a')\,d''d''' + (a + a'')\,d'c''' + (a + a''')\,c'c'' + (a' + a'')\,db''' \\
&\quad\quad + (a' + a''')\,cb'' + (a'' + a''')\,bb' + d'c''d''' + c'd''c''' \\
&\quad\quad + cd''b''' + db''d''' + db'c''' + bd'b''' + cb'c'' + bc'b'']\}\,.\,g \\
&+ [aa'a''a''' - aa'd''d''' - aa''d'c''' - aa'''c'c'' - a'a''db''' \\
&\quad - a'a'''cb'' - a''a'''bb' - a\,(d'c''d''' + c'd''c''') \\
&\quad - a'\,(cd''b''' + db''d''') - a''\,(db'c''' + bd'b''') \\
&\quad - a'''\,(cb'c'' + bc'b'') + bb'd''d''' + cd'b''c''' + dc'c''b''' \\
&\quad - db'c''d''' - cb'd''c''' - dc'b''c''' - bd'b''d''' - cd'c''b''' - bc'd''b'''] = 0,
\end{aligned}
$$

потомъ въ числахъ:

$$g^4 - 47{,}572679\,.\,g^3 + 786{,}533940\,.\,g^2 - 5241{,}120893\,.\,g + 11992{,}362495 = 0.$$

Въ этомъ уравненіи

$$
\begin{aligned}
g_3 &= 5{,}''347763, \\
g_4 &= 7{,}''401423, \\
g_5 &= 16{,}''979252, \\
g_6 &= 17{,}''844238.
\end{aligned}
$$

6. Изъ уравненій (C) и (D) можно опредѣлять не самыя количества M^{IV}, M^{V}, и пр., M, M', и пр., соотвѣтствующія семи величинамъ g, но только ихъ отношенія къ одному изъ нихъ.

Такъ, для $g = 2{,}260427$, уравненія (C) превращаемъ въ

$$
\begin{aligned}
-\,5{,}235747\,\frac{M^{IV}}{M^{VI}} &+ 4{,}821088\,\frac{M^{V}}{M^{VI}} + 0{,}035370 = 0, \\
11{,}909200\,\frac{M^{IV}}{M^{VI}} &- 16{,}344877\,\frac{M^{V}}{M^{VI}} + 0{,}232402 = 0, \\
0{,}314348\,\frac{M^{IV}}{M^{VI}} &+ 0{,}836118\,\frac{M^{V}}{M^{VI}} - 0{,}067592 = 0,
\end{aligned}
$$

и находимъ

$$\frac{M^{IV}}{M^{VI}} = 0{,}0603125,\quad \frac{M^{V}}{M^{VI}} = 0{,}0581635.$$

Вставивъ эти величины въ первыя четыре уравненія (B), получимъ:

$$-3{,}240476\frac{M}{M^{VI}}+1{,}870057\frac{M'}{M^{VI}}+0{,}419417\frac{M''}{M^{VI}}+0{,}008813\frac{M'''}{M^{VI}}+0{,}0092405=0,$$

$$0{,}183237\frac{M}{M^{VI}}-9{,}327545\frac{M'}{M^{VI}}+5{,}664708\frac{M''}{M^{VI}}+0{,}058710\frac{M'''}{M^{VI}}+0{,}0451768=0,$$

$$0{,}031254\frac{M}{M^{VI}}+4{,}307974\frac{M'}{M^{VI}}-10{,}664834\frac{M''}{M^{VI}}+0{,}229308\frac{M'''}{M^{VI}}+0{,}1047211=0,$$

$$0{,}003969\frac{M}{M^{VI}}+0{,}269843\frac{M'}{M^{VI}}+1{,}385873\frac{M''}{M^{VI}}-15{,}298116\frac{M'''}{M^{VI}}+0{,}3282024=0$$

Отсюда вычисляемъ

$$\frac{M}{M^{VI}}=0{,}0138928,\ \frac{M'}{M^{VI}}=0{,}0153118,$$

$$\frac{M''}{M^{VI}}=0{,}0165472,\ \frac{M'''}{M^{VI}}=0{,}0232265.$$

Изъ самаго хода вычисленій очевидно, что найденныя величины g и шести отношеній M, M' и пр. къ M^{VI} не суть точныя: чтобъ исправить ихъ, искомыя поправки изображаемъ чрезъ Δg, $\Delta\frac{M^{IV}}{M^{VI}}$, $\Delta\frac{M^{V}}{M^{VI}}$, и по уравненіямъ ($C$) составляемъ три уравненія

$$0{,}0603125.\Delta g-5{,}235747.\Delta\frac{M^{IV}}{M^{VI}}+4{,}821088.\Delta\frac{M^{V}}{M^{VI}}+0{,}000071=0,$$

$$0{,}0581635.\Delta g+11{,}909200.\Delta\frac{M^{IV}}{M^{VI}}-16{,}344877.\Delta\frac{M^{V}}{M^{VI}}+0{,}000003=0,$$

$$\Delta g+0{,}314348.\Delta\frac{M^{IV}}{M^{VI}}+0{,}836118.\Delta\frac{M^{V}}{M^{VI}}-0{,}000006=0,$$

изъ которыхъ

$$\Delta g=-0{,}0000309,$$

$$\Delta\frac{M^{V}}{M^{VI}}=0{,}0000292,\ \Delta\frac{M^{IV}}{M^{VI}}=0{,}0000400;$$

слѣд.

$$g=2'',260396$$

$$\frac{M^{IV}}{M^{VI}}=0{,}0603525,\ \frac{M^{V}}{M^{VI}}=0{,}0581927.$$

По этимъ исправленнымъ величинамъ, поправки $\Delta\frac{M}{M^{VI}}$, $\Delta\frac{M'}{M^{VI}}$, $\Delta\frac{M''}{M^{VI}}$, $\Delta\frac{M'''}{M^{VI}}$ вычисляются изъ уравненій

$$-3{,}240507.\Delta\frac{M}{M^{VI}}+1{,}870057.\Delta\frac{M'}{M^{VI}}+0{,}419417.\Delta\frac{M''}{M^{VI}}+0{,}008813.\Delta\frac{M'''}{M^{VI}}+0{,}0000055=0,$$

$$0{,}183237.\Delta\frac{M}{M^{VI}}-9{,}327576.\Delta\frac{M'}{M^{VI}}+5{,}664708.\Delta\frac{M''}{M^{VI}}+0{,}058710.\Delta\frac{M'''}{M^{VI}}+0{,}0000281=0,$$

$$0{,}031254.\Delta\frac{M}{M^{VI}}+4{,}307974.\Delta\frac{M'}{M^{VI}}-10{,}664865.\Delta\frac{M''}{M^{VI}}+0{,}229308.\Delta\frac{M'''}{M^{VI}}+0{,}0000403=0,$$

$$0{,}003969.\Delta\frac{M}{M^{VI}}+0{,}269843.\Delta\frac{M'}{M^{VI}}+1{,}385873.\Delta\frac{M''}{M^{VI}}-15{,}298147.\Delta\frac{M'''}{M^{VI}}+0{,}0002147=0,$$

которыя даютъ

$$\Delta\frac{M}{M^{VI}} = 0{,}0000072,\ \Delta\frac{M'}{M^{VI}} = 0{,}0000073,$$

$$\Delta\frac{M''}{M^{VI}} = 0{,}0000072,\ \Delta\frac{M'''}{M^{VI}} = 0{,}0000148;$$

такъ что

$$\frac{M}{M^{VI}} = 0{,}0139000,\ \frac{M'}{M^{VI}} = 0{,}0153191,$$

$$\frac{M''}{M^{VI}} = 0{,}0165544,\ \frac{M'''}{M^{VI}} = 0{,}0252413.$$

Незначительныя величины поправокъ показываютъ, что нѣтъ надобности повторять вычисленія; дѣйствительно, когда найденныя величины g и шести отношеній M, M', и пр. къ M^{VI} внесемъ, на примѣръ, въ первое и третье уравненія (B), то получимъ $+\,0{,}0000003$ и $+\,0{,}0000001$. Но для исправленія прочихъ величинъ g и отношеній между соотвѣтствующими количествами M, надобно было вычисленія повторять по два и по три раза. Такимъ образомъ найдено:

$$g_1 = 3''{,}716027,$$

$$\frac{M_1}{M_1^{VI}} = -0{,}8241363,\ \frac{M'_1}{M_1^{VI}} = -0{,}5468769,$$

$$\frac{M''_1}{M_1^{VI}} = -0{,}5402530,\ \frac{M'''_1}{M_1^{VI}} = -0{,}6203704,$$

$$\frac{M_1^{IV}}{M_1^{VI}} = -1{,}4251035,\ \frac{M_1^{V}}{M_1^{VI}} = -1{,}1242711.$$

$$g_2 = 22''{,}452066,$$

$$\frac{M_2}{M_2^{VI}} = -0{,}0592728,\ \frac{M'_2}{M_2^{VI}} = 0{,}1934977,$$

$$\frac{M''_2}{M_2^{VI}} = -1{,}3235091,\ \frac{M'''_2}{M_2^{VI}} = -8{,}4872162,$$

$$\frac{M_2^{IV}}{M_2^{VI}} = 8{,}8267164,\ \frac{M_2^{V}}{M_2^{VI}} = -27{,}386881.$$

7, Опредѣленіе величинъ отношеній между количествами M, соотвѣтствующихъ величинамъ g_3, g_4, и пр. должно извлечь изъ уравненій (D), потому что изъ нихъ выведены g_3, g_4, и пр. Поступая совершенно сходно съ предъидущими вычисленіями, найдено:

$$g_3 = 5''{,}353397,$$

$$\frac{M_3}{M_3^{III}} = 147{,}7167105,\ \frac{M'_3}{M_3^{III}} = 10{,}2029173,$$

$$\frac{M''_3}{M_3^{III}} = 6{,}4422733,\ \frac{M_3^{IV}}{M_3^{III}} = -0{,}0115640,$$

$$\frac{M_3^{V}}{M_3^{III}} = -0{,}0102168,\ \frac{M_3^{VI}}{M_3^{III}} = 0{,}0040046.$$

$$g_4 = 7'',391152,$$

$$\frac{M_4}{M_4'''} = -8,8227629,\quad \frac{M_4'}{M_4'''} = 7,5905676,$$

$$\frac{M_4''}{M_4'''} = 5,8991819,\quad \frac{M_4^{IV}}{M_4'''} = -0,0039399,$$

$$\frac{M_4^{V}}{M_4'''} = -0,0040582,\quad \frac{M_4^{VI}}{M_4'''} = 0,0009041.$$

$$g_5 = 17'',035894,$$

$$\frac{M_5}{M_5'''} = 0,0642699,\quad \frac{M_5'}{M_5'''} = -0,5079090,$$

$$\frac{M_5''}{M_5'''} = 0,4760379,\quad \frac{M_5^{IV}}{M_5'''} = -0,0000464,$$

$$\frac{M_5^{V}}{M_5'''} = -0,0002800,\quad \frac{M_5^{VI}}{M_5'''} = 0,0000166.$$

$$g_6 = 17'',793181,$$

$$\frac{M_6}{M_6'''} = -0,0207125,\quad \frac{M_6'}{M_6'''} = 0,1771268,$$

$$\frac{M_6''}{M_6'''} = -0,2037199,\quad \frac{M_6^{IV}}{M_6'''} == 0,0000126,$$

$$\frac{M_6^{V}}{M_6'''} = -0,0001407,\quad \frac{M_6^{VI}}{M_6'''} = 0,0000077.$$

8. Теперь остается опредѣлить самыя количества M и соотвѣтствующія имъ величины β. По незначительности отношеній $\frac{M_3^{VI}}{M_3'''}$, $\frac{M_4^{VI}}{M_4'''}$, и пр., для сокращенія вычисленій, изъ уравненій (A') позволительно взять

$$h^{VI} = M^{VI}\sin(gt+\beta) + M_1^{VI}\sin(g_1t+\beta_1) + M_2^{VI}\sin(g_2t+\beta_2),$$
$$h^{V} = M^{V}\sin(gt+\beta) + M_1^{V}\sin(g_1t+\beta_1) + M_2^{V}\sin(g_2t+\beta_2),$$
$$h^{IV} = M^{IV}\sin(gt+\beta) + M_1^{IV}\sin(g_1t+\beta_1) + M_2^{IV}\sin(g_2t+\beta_2).$$

изъ этихъ уравненій, по найденнымъ отношеніямъ, два послѣднія превращаются въ

$$h^{V} = 0,0581927\, M^{VI}\sin(gt+\beta) - 1,1242711\, M_1^{VI}\sin(g_1t+\beta_1) - 27,386881\, M_2^{VI}\sin(g_2t+\beta_2),$$
$$h^{IV} = 0,0603525\, M^{VI}\sin(gt+\beta) - 1,4251035\, M_1^{VI}\sin(g_1t+\beta_1) + 8,8267164\, M_2^{VI}\sin(g_2t+\beta_2);$$

слѣд. для $t=0$ или для эпохи будемъ имѣть уравненія

$$h_0^{VI} = M^{VI}\sin\beta + M_1^{VI}\sin\beta_1 + M_2^{VI}\sin\beta_2,$$
$$h_0^{V} = 0,0581927\, M^{VI}\sin\beta - 1,1242711\, M_1^{VI}\sin\beta_1 - 27,386881\, M_2^{VI}\sin\beta_2,$$
$$h_0^{IV} = 0,0603525\, M^{VI}\sin\beta - 1,4251035\, M_1^{VI}\sin\beta_1 + 8,8267164\, M_2^{VI}\sin\beta_2,$$

въ которыхъ

$$\log h_0^{VI} = \log f_0^{VI} \sin \omega_0^{VI} = \bar{2},0035953,$$
$$\log h_0^{V} = \log f_0^{V} \sin \omega_0^{V} = \bar{2},7493046,$$
$$\log h_0^{IV} = \log f_0^{IV} \sin \omega_0^{IV} = \bar{3},9682361,$$

и потому находимъ

$$M^{VI} \sin \beta = 0,0256828, \; M_1^{VI} \sin \beta_1 = -0,0141867,$$
$$M_2^{VI} \sin \beta_2 = -0,0014130.$$

Если *sin* перемѣнимъ на *cos*, и вмѣсто $\log h_0^{IV}$, $\log h_0^{V}$, $\log h_0^{VI}$ поставимъ

$$\log l_0^{IV} = \log f_0^{IV} \cos \omega_0^{IV} = \bar{2},6744634,$$
$$\log l_0^{V} = \log f_0^{V} \cos \omega_0^{V} = \bar{4},9263739,$$
$$\log l_0^{VI} = \log f_0^{VI} \cos \omega_0^{VI} = \bar{2},6580792-;$$

то изъ тѣхъ же уравненій выведемъ

$$M^{VI} \cos \beta = -0,0191256, \; M_1^{VI} \cos \beta_1 = -0,0274364,$$
$$M_2^{VI} \cos \beta_2 = 0,0010549.$$

Отсюда

$$\beta = 126^\circ\ 40'\ 29'', \; \beta_1 = 27^\circ\ 20'\ 32'', \; \beta_2 = 126^\circ\ 44'\ 32'',$$

$$M^{VI} = 0,0320218, \; M_1^{VI} = -0,0308882, \; M_2^{VI} = -0,0017634$$
$$(\bar{2},5054450) \qquad (\bar{2},4897930-) \qquad (\bar{3},2463538-),$$

$$M = 0,0004451\ (\bar{4},6484598), \; M_1 = 0,0254561\ (\bar{2},4057920),$$
$$M' = 0,0004905\ (\bar{4},6906953), \; M_1' = 0,0168920\ (\bar{2},2276826),$$
$$M'' = 0,0005301\ (\bar{4},7243585), \; M_1'' = 0,0166874\ (\bar{2},2223902),$$
$$M''' = 0,0007442\ (\bar{4},8717054), \; M_1''' = 0,0191621\ (\bar{2},2824441),$$
$$M^{IV} = 0,0019325\ (\bar{3},2861403), \; M_1^{IV} = 0,0440189\ (\bar{2},6436394),$$
$$M^{V} = 0,0018634\ (\bar{3},2703136), \; M_1^{V} = 0,0347267\ (\bar{2},5406642),$$
$$M_2 = 0,0001045\ (\bar{4},0192093), \; M_2' = -0,0003412\ (\bar{4},5330297-),$$
$$M_2'' = 0,0023338\ (\bar{3},3680807), \; M_2''' = 0,0149665\ (\bar{2},1751190),$$
$$M_2^{IV} = -0,0155653\ (\bar{2},1921580-), \; M_2^{V} = 0,0482944\ (\bar{2},6838964).$$

9. По опредѣленнымъ величинамъ въ предъидущемъ членѣ, и зная, что

$$h_0 = f_0 \sin \omega_0 = 0,1979789,$$
$$h_0' = f_0' \sin \omega_0' = 0,0054538,$$
$$h_0'' = f_0'' \sin \omega_0'' = 0,0165616,$$
$$h_0''' = f_0''' \sin \omega_0''' = -0,0432145,$$

изъ первыхъ четырехъ уравненій (A') составляемъ

$$M_3''' \sin\beta_3 + M_4''' \sin\beta_4 + M_5''' \sin\beta_5 + M_6''' \sin\beta_6 = -0,0646057,$$

$$147,71671\, M_3''' \sin\beta_3 - 8,8227629\, M_4''' \sin\beta_4 + 0,0642699\, M_5''' \sin\beta_5 - 0,0207125\, M_6''' \sin\beta_9 = 0,1858461,$$

$$10,2029173\, M_3''' \sin\beta_3 + 7,5905676\, M_4''' \sin\beta_4 - 0,5079090\, M_5''' \sin\beta_5 + 0,1771268\, M_6''' \sin\beta_6 = -0,0025248,$$

$$6,4422733\, M_3''' \sin\beta_3 + 5,8991819\, M_4''' \sin\beta_4 + 0,4760379\, M_5''' \sin\beta_5 - 0,2037199\, M_6''' \sin\beta_6 = 0,0066016,$$

и находимъ

$$M_3''' \sin\beta_3 = 0,0011780,\ M_4''' \sin\beta_4 = -0,0012823,$$

$$M_5''' \sin\beta_5 = -0,0096559,\ M_6''' \sin\beta_6 = -0,0548455.$$

Перемѣнивъ *sin* на *cos*, и h_0, h_0', h_0'', h_0''' на

$$l_0 = f_0 \cos\omega_0 = 0,0555191,$$

$$l_0' = f_0' \cos\omega_0' = -0,0042920,$$

$$l_0'' = f_0'' \cos\omega_0'' = -0,0027738,$$

$$l_0''' = f_0''' \cos\omega_0''' = 0,0825946,$$

изъ тѣхъ же четырехъ уравненій, превратившихся въ

$$M_3''' \cos\beta_3 + M_4''' \cos\beta_4 + M_5''' \cos\beta_5 + M_6''' \cos\beta_6 = 0,0749709,$$

$$M_3''' \cos\beta_3 - 0,0597276\, M_4''' \cos\beta_4 + 0,0004351\, M_5''' \cos\beta_5 - 0,0001402\, M_6''' \cos\beta_6 = 0,00022499,$$

$$M_3''' \cos\beta_3 + 0,7439603\, M_4''' \cos\beta_4 - 0,0497807\, M_5''' \cos\beta_5 + 0,0173604\, M_6''' \sin\beta_6 = -0,00188259,$$

$$M_3''' \cos\beta_3 + 0,9156988\, M_4''' \cos\beta_4 + 0,0738928\, M_5''' \cos\beta_5 - 0,0316224\, M_6''' \cos\beta_6 = -0,00246562,$$

вычисляемъ

$$M_3''' \cos\beta_3 = 0,00007268,\ M_4''' \cos\beta_4 = -0,00253016,$$

$$M_5''' \cos\beta_5 = 0,02110567,\ M_6''' \cos\beta_6 = 0,05632276.$$

Отсюда

$$\beta_3 = 86^\circ\, 28'\, 10'',\ \beta_4 = 26^\circ\, 52'\, 36'',\ \beta_5 = -24^\circ\, 35'\, 3'',\ \beta_6 = -44^\circ\, 14'\, 19'',$$

$$M_3''' = 0,0011802,\ M_4''' = -0,0028365,\ M_5''' = 0,0232096,\ M_6''' = 0,0786147,$$

$$(\bar{3},0719703) \qquad (\bar{3},4527927\ -) \qquad (\bar{2},3656680) \qquad (\bar{2},07861477)$$

и наконецъ

$$M_3 = 0{,}1743410\,(\bar{1}{,}2413994),\quad M_4 = 0{,}0250264\,(\bar{2}{,}3983971),$$
$$M_3' = 0{,}0120419\,(\bar{2}{,}0806943),\quad M_4' = -0{,}0215311\,(\bar{2}{,}3330670\,-),$$
$$M_3'' = 0{,}0076034\,(\bar{3}{,}8810090),\quad M_4'' = -0{,}0167330\,(\bar{2}{,}2235885\,-),$$
$$M_3^{IV} = -0{,}0000136\,(\bar{5}{,}1350779\,-),\quad M_4^{IV} = 0{,}0000112\,(\bar{5}{,}0482779),$$
$$M_3^{V} = -0.0000120\,(\bar{5}{,}0812849\,-),\quad M_4^{V} = 0{,}0000115\,(\bar{5}{,}0611261),$$
$$M_3^{VI} = 0{,}0000047\,(\bar{6}{,}6745289),\quad M_4^{VI} = -0{,}0000025\,(\bar{6}{,}4090092\,-),$$
$$M_5 = 0{,}0014917\,(\bar{3}{,}1736756),\quad M_6 = -0{,}0016283\,(\bar{3}{,}2117367\,-),$$
$$M_5' = -0{,}0117884\,(\bar{2}{,}0714539\,-),\quad M_6' = 0{,}0139248\,(\bar{2}{,}1437886),$$
$$M_5'' = 0{,}0110486\,(\bar{2}{,}0433095),\quad M_6'' = -0{,}0160154\,(\bar{2}{,}2045377\,-),$$
$$M_5^{IV} = -0{,}0000011\,(\bar{6}{,}0321860\,-),\quad M_6^{IV} = -0{,}0000009\,(\bar{7}{,}9982808\,-),$$
$$M_5^{V} = -0{,}0000065\,(\bar{6}{,}8128260\,-),\quad M_6^{V} = -0{,}0000111\,(\bar{5}{,}0438909\,-),$$
$$M_5^{VI} = 0{,}0000004\,(\bar{7}{,}5873430),\quad M_6^{VI} = 0{,}0000006\,(\bar{7}{,}7836837).$$

10. И такъ искомыя уравненія, выражающія вѣковыя измѣненія въ эксцентрицитетахъ и въ долготахъ перегеліевъ планетъ для всякаго времени до и послѣ эпохи, т. е. до и послѣ 1800 г., суть слѣдующія:

Меркурій.

$$\left.\begin{matrix}h\\l\end{matrix}\right\} = 0{,}0004451\,{}^{\sin}_{\cos}(126°\,40'\,29'' + 2'',260396\,t) + 0{,}0254561\,{}^{\sin}_{\cos}(27°\,20'\,32'' + 3'',716027\,t)$$
$$+ 0{,}0001045\,{}^{\sin}_{\cos}(126°\,44'\,32'' + 22'',452066\,t) + 0{,}1743410\,{}^{\sin}_{\cos}(86°\,28'\,10'' + 5'',353397\,t)$$
$$+ 0{,}0250264\,{}^{\sin}_{\cos}(26°\,52'\,36'' + 7'',391152\,t) + 0{,}0014917\,{}^{\sin}_{\cos}(-24°\,35'\,3'' + 17'',035894\,t)$$
$$- 0{,}0016283\,{}^{\sin}_{\cos}(-44°\,14'\,19'' + 17'',793181\,t).$$

Венера.

$$\left.\begin{matrix}h'\\l'\end{matrix}\right\} = 0{,}0004905\,{}^{\sin}_{\cos}(126°\,40'\,29'' + 2'',260396\,t) + 0{,}0168920\,{}^{\sin}_{\cos}(27°\,20'\,32'' + 3'',716027\,t)$$
$$- 0{,}0003412\,{}^{\sin}_{\cos}(126°\,44'\,32'' + 22'',452066\,t) + 0{,}0120419\,{}^{\sin}_{\cos}(86°\,28'\,10'' + 5'',353397\,t)$$
$$- 0{,}0215311\,{}^{\sin}_{\cos}(26°\,52'\,36'' + 7'',391152\,t) - 0{,}0117884\,{}^{\sin}_{\cos}(-24°\,35'\,3'' + 17'',035894\,t)$$
$$+ 0{,}0139248\,{}^{\sin}_{\cos}(-44°\,14'\,19'' + 17'',793181\,t).$$

Земля.

$$\left.\begin{matrix}h''\\l''\end{matrix}\right\} = 0{,}0005301\,{}^{\sin}_{\cos}(126°\,40'\,29'' + 2'',260396\,t) + 0{,}0166874\,{}^{\sin}_{\cos}(27°\,20'\,32'' + 3'',716027\,t)$$
$$+ 0{,}0023338\,{}^{\sin}_{\cos}(126°\,44'\,32'' + 22'',452066\,t) + 0{,}0076034\,{}^{\sin}_{\cos}(86°\,28'\,10'' + 5'',353397\,t)$$
$$- 0{,}0167330\,{}^{\sin}_{\cos}(26°\,52'\,36'' + 7'',391152\,t) + 0{,}0110486\,{}^{\sin}_{\cos}(-24°\,35'\,3'' + 17'',035894\,t)$$
$$- 0{,}0160154\,{}^{\sin}_{\cos}(-44°\,14'\,19'' + 17'',793181\,t)$$

Марсъ.

$$\left.\begin{matrix}h'''\\ l'''\end{matrix}\right\} = 0{,}0007442\,{}^{\sin}_{\cos}(126^\circ 40' 29'' + 2'',260396\,t) + 0{,}0191621\,{}^{\sin}_{\cos}(27^\circ 20' 32'' + 3'',716027\,t)$$
$$+ 0{,}0149665\,{}^{\sin}_{\cos}(126^\circ 44' 32'' + 22'',452066\,t) + 0{,}0011802\,{}^{\sin}_{\cos}(86^\circ 28' 10'' + 5'',353397\,t)$$
$$- 0{,}0028366\,{}^{\sin}_{\cos}(26^\circ 52' 36'' + 7'',391152\,t) + 0{,}0232096\,{}^{\sin}_{\cos}(-24^\circ 35' 3'' + 17'',035894\,t)$$
$$+ 0{,}0786147\,{}^{\sin}_{\cos}(-44^\circ 14' 19'' + 17'',793181\,t).$$

Юпитеръ.

$$\left.\begin{matrix}h^{IV}\\ l^{IV}\end{matrix}\right\} = 0{,}0019325\,{}^{\sin}_{\cos}(126^\circ 40' 29'' + 2'',260396\,t) + 0{,}0440189\,{}^{\sin}_{\cos}(27^\circ 20' 32'' + 3'',716027\,t)$$
$$- 0{,}0155653\,{}^{\sin}_{\cos}(126^\circ 44' 32'' + 22'',452066\,t) - 0{,}0000136\,{}^{\sin}_{\cos}(86^\circ 28' 10'' + 5'',353397\,t)$$
$$+ 0{,}0000112\,{}^{\sin}_{\cos}(26^\circ 52' 36'' + 7'',391152\,t) - 0{,}0000011\,{}^{\sin}_{\cos}(-24^\circ 35' 3'' + 17'',035894\,t)$$
$$- 0{,}0000009\,{}^{\sin}_{\cos}(-44^\circ 14' 19'' + 17'',793181\,t).$$

Сатурнъ.

$$\left.\begin{matrix}h^{V}\\ l^{V}\end{matrix}\right\} = 0{,}0018634\,{}^{\sin}_{\cos}(126^\circ 40' 29'' + 2'',260396\,t) + 0{,}0347267\,{}^{\sin}_{\cos}(27^\circ 20' 32'' + 3'',716027\,t)$$
$$+ 0{,}0482944\,{}^{\sin}_{\cos}(126^\circ 44' 32'' + 22'',452066\,t) - 0{,}0000120\,{}^{\sin}_{\cos}(86^\circ 28' 10'' + 5'',353397\,t)$$
$$+ 0{,}0000115\,{}^{\sin}_{\cos}(26^\circ 52' 36'' + 7'',391152\,t) - 0{,}0000065\,{}^{\sin}_{\cos}(-24^\circ 35' 3'' + 17'',035894\,t)$$
$$- 0{,}0000111\,{}^{\sin}_{\cos}(-44^\circ 14' 19'' + 17'',793181\,t).$$

Уранъ.

$$\left.\begin{matrix}h^{VI}\\ l^{VI}\end{matrix}\right\} = 0{,}0320218\,{}^{\sin}_{\cos}(126^\circ 40' 29'' + 2'',260396\,t) - 0{,}0308882\,{}^{\sin}_{\cos}(27^\circ 20' 32'' + 3'',716027\,t)$$
$$- 0{,}0017634\,{}^{\sin}_{\cos}(126^\circ 44' 32'' + 22'',452066\,t) + 0{,}0000047\,{}^{\sin}_{\cos}(86^\circ 28' 10'' + 5'',353397\,t)$$
$$- 0{,}0000025\,{}^{\sin}_{\cos}(26^\circ 52' 36'' + 7'',391152\,t) + 0{,}0000004\,{}^{\sin}_{\cos}(-24^\circ 35' 3'' + 17'',035894\,t)$$
$$+ 0{,}0000006\,{}^{\sin}_{\cos}(-44^\circ 14' 19'' + 17'',793181\,t)$$

Нетрудно увѣриться, что эти формулы удовлетворяютъ эпохѣ; но этотъ признакъ не можетъ считаться полнымъ ручательствомъ за ихъ точность: по моему мнѣнію, лучшая ихъ повѣрка состоитъ въ согласіи ихъ результатовъ съ результатами формулъ, представляющихъ годично-вѣковыя измѣненія элементовъ планетныхъ орбитъ, въ пространствѣ ограниченнаго числа столѣтій. На такомъ основаніи, опредѣляемъ долготу перигелія Венеры чрезъ 100 лѣтъ послѣ 1800 г., и сперва по формуламъ Леверье, который нашелъ что годично-вѣковое отступленіе этого перегелія $= 1'',377$; слѣд. чрезъ 100 лѣтъ долгота его будетъ

$$128^\circ 40' 48'',3.$$

Тоже самое число слѣдовало бы получить изъ его общихъ формулъ; но какъ тутъ оказывается разность, простирающаяся до $2'$, то удерживаю здѣсь подробности вычисленія:

$$g = 3' 45'',84,\quad \beta = 126^\circ 47' 00'',84,$$
$$g_1 = 6' 11'',36,\quad \beta_1 = 27^\circ 27' 37'',36,$$
$$g_2 = 37' 22'',73,\quad \beta_2 = 127^\circ 21' 30'',73,$$

$$g_3 = 8'\ 49'',89,\ \beta_3 = 85^\circ\ 56'\ 34'',89,$$
$$g_4 = 12'\ 37'',47,\ \beta_4 = 35^\circ\ 51'\ 20'',47,$$
$$g_5 = 28'\ 35'',27,\ \beta_5 = -24^\circ\ 42'\ 57'',73,$$
$$g_6 = 29'\ 46'',33,\ \beta_6 = -44^\circ\ 59'\ 12'',67.$$

По этимъ даннымъ, получаемъ

$$h' = f' \sin\omega' = 0{,}0003876 + 0{,}0077420 - 0{,}0003004 + 0{,}0168436$$
$$- 0{,}0139559 + 0{,}0054397 - 0{,}0108445 = 0{,}0053121,$$
$$l' = f' \cos\omega' = -0{,}0002898 + 0{,}0148974 + 0{,}0002294 + 0{,}0011946$$
$$- 0{,}0193109 - 0{,}0118181 + 0{,}0108495 = -0{,}0042479;$$

слѣд.

$$\log\operatorname{tang}\omega' = 0{,}0970919 -,\ \omega' = 128^\circ\ 38'\ 53'',17,$$

и разность отъ предъидущаго результата $= 1'\ 55'',1$.

Такое же вычисленіе по найденнымъ мною числамъ въ общихъ формулахъ даетъ

$$g = 3'\ 46'',04,\ \beta = 126^\circ\ 44'\ 15'',04,$$
$$g_1 = 6'\ 11'',60,\ \beta_1 = 27^\circ\ 26'\ 43'',60,$$
$$g_2 = 37'\ 25'',21,\ \beta_2 = 127^\circ\ 21'\ 57'',21,$$
$$g_3 = 8'\ 55'',34,\ \beta_3 = 86^\circ\ 37'\ 5'',34,$$
$$g_4 = 12'\ 19'',11,\ \beta_4 = 27^\circ\ 4'\ 55'',11,$$
$$g_5 = 28'\ 23'',59,\ \beta_5 = -24^\circ\ 6'\ 39'',41,$$
$$g_6 = 29'\ 39'',32,\ \beta_6 = -43^\circ\ 44'\ 39'',68,$$
$$h' = f' \sin\omega' = 0{,}0053137,\ l' = f' \cos\omega' = -0{,}0042558,$$
$$\omega' = 128^\circ\ 41'\ 30'';$$

по формулѣ же годично-вѣковаго движенія перигелія Венеры,

$$\omega' = 128^\circ\ 41'\ 34'',51;$$

слѣд. разность = только 4'',5.

11. Составленныя формулы показываютъ, что эксцентрицитеты измѣняются періодически, и какъ наибольшія ихъ величины равняются суммамъ положительныхъ коэффиціентовъ; то для высшихъ ихъ предѣловъ найдемъ:

Меркурій:	0,2284931,	Венера:	0,0770099,
Земля:	0,0709517,	Марсъ:	0,1407140,
Юпитеръ:	0,0615435,	Сатурнъ:	0,0849256,

Уранъ: 0,0646816.

И такъ остойчивость солнечной системы относительно эксцентрицитетовъ не подлежитъ сомнѣнію.

12. Величина долготы перигелія каждой планеты выражается чрезъ

$$\tang \omega = \frac{h}{l};$$

но эту формулу не трудно перемѣнить въ

$$\tang(\omega - \beta - gt) = \frac{M_1 \sin[\beta_1 - \beta + (g_1 - g)t] + M_2 \sin[\beta_2 - \beta + (g_2 - g)t] + \ldots.}{M + M_1 \cos[\beta_1 - \beta + (g_1 - g)t] + M_2 \cos[\beta_2 - \beta + (g_2 - g)t] + \ldots.},$$

Въ этой формулѣ для коеффиціента M должно брать тотъ, который болѣе суммы всѣхъ прочихъ коеффиціентовъ, взятыхъ положительно; при такомъ условіи знаменатель никогда не сдѣлается нулемъ, или $\omega - \beta - gt$ никогда не превратится въ 90°, и среднее движеніе перигелія выразится чрезъ gt. Но перигеліи Венеры, Земли и Урана, въ строгомъ смыслѣ, средняго движенія не имѣютъ, и долготы ихъ, для большаго числа лѣтъ, должно вычислять по общимъ формуламъ.

II. ВѢКОВЫЯ ИЗМѢНЕНІЯ ВЪ НАКЛОНЕНІЯХЪ И ВЪ ДОЛГОТАХЪ УЗЛОВЪ.

13. Удержавъ члены только съ первыми степенями относительно наклоненія, изъ предположеній

$$p = \tang I \sin N,\ q = \tang I \cos N,$$
$$p' = \tang I' \sin N',\ q' = \tang I' \cos N',$$

нетрудно вывести, что

$$\frac{dp}{dt} = -(m,m')(q - q'),\ \frac{dq}{dt} = (m,m')(p - p');$$

слѣдственно для всѣхъ семи планетъ будемъ имѣть уравненія (E)

$$\frac{dp}{dt} = -\{(m,m') + (m,m'') + (m,m''') + (m,m^{IV}) + (m,m^{V}) + (m,m^{VI})\} q$$
$$+ (m,m') q' + (m,m'') q'' + (m,m''') q''' + (m,m^{IV}) q^{IV} + (m,m^{V}) q^{V} + (m,m^{VI}) q^{VI},$$
$$\frac{dp'}{dt} = -\{(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + (m',m^{IV}) + (m',m^{V}) + (m',m^{VI})\} q'$$
$$+ (m',m) q + (m',m'') q'' + (m',m''') q''' + (m',m^{IV}) q^{IV} + (m',m^{V}) q^{V} + (m',m^{VI}) q^{VI},$$
$$\frac{dp''}{dt} = -\{(m'',m) + (m'',m') + (m'',m''') + (m'',m^{IV}) + (m'',m^{V}) + (m'',m^{VI})\} q''$$
$$+ (m'',m) q + (m'',m') q' + (m'',m''') q''' + (m'',m^{IV}) q^{IV} + (m'',m^{V}) q^{V} + (m'',m^{VI}) q^{VI},$$
$$\frac{dp'''}{dt} = -\{(m''',m) + (m''',m') + (m''',m'') + (m''',m^{IV}) + (m''',m^{V}) + (m''',m^{VI})\} q'''$$
$$+ (m''',m) q + (m''',m') q' + (m''',m'') q'' + (m''',m^{IV}) q^{IV} + (m''',m^{V}) q^{V} + (m''',m^{VI}) q^{VI},$$
$$\frac{dp^{IV}}{dt} = -\{(m^{IV},m) + (m^{IV},m') + (m^{IV},m'') + (m^{IV},m''') + (m^{IV},m^{V}) + (m^{IV},m^{VI})\} q^{IV}$$
$$+ (m^{IV},m) q + (m^{IV},m') q' + (m^{IV},m'') q'' + (m^{IV},m''') q''' + (m^{IV},m^{V}) q^{V} + (m^{IV},m^{VI}) q^{VI},$$

$$\frac{dp^{V}}{dt} = -\{(m^{V},m) + (m^{V},m') + (m^{V},m'') + (m^{V},m''') + (m^{V},m^{IV}) + (m^{V},m^{VI})\}\,q^{V}$$
$$+ (m^{V},m)\,q + (m^{V},m')\,q' + (m^{V},m'')\,q'' + (m^{V},m''')\,q''' + (m^{V},m^{IV})\,q^{IV} + (m^{V},m^{VI})\,q^{VI},$$
$$\frac{dp^{VI}}{dt} = -\{(m^{VI},m) + (m^{VI},m') + (m^{VI},m'') + (m^{VI},m''') + (m^{VI},m^{IV}) + (m^{VI},m^{V})\}\,q^{VI}$$
$$+ (m^{VI},m)\,q + (m^{VI},m')\,q' + (m^{VI},m'')\,q'' + (m^{VI},m''')\,q''' + (m^{VI},m^{IV})\,q^{IV} + (m^{VI},m^{V})\,q^{V}.$$

и уравненія (F)

$$\frac{dq}{dt} = \{(m,m') + (m,m'') + (m,m''') + (m,m^{IV}) + (m,m^{V}) + (m,m^{VI})\}\,p$$
$$-(m,m')\,p' - (m,m'')\,p'' - (m,m''')\,p''' - (m,m^{IV})\,p^{IV} - (m,m^{V})\,p^{V} - (m,m^{VI})\,p^{VI},$$
$$\frac{dq'}{dt} = \{(m',m) + (m',m'') + (m',m''') + (m',m^{IV}) + (m',m^{V}) + (m',m^{VI})\}\,p'$$
$$-(m',m)\,p - (m',m'')\,p'' - (m',m''')\,p''' - (m',m^{IV})\,p^{IV} - (m',m^{V})\,p^{V} - (m',m^{VI})\,p^{VI},$$
$$\frac{dq''}{dt} = \{(m'',m) + (m'',m') + (m'',m''') + (m'',m^{IV}) + (m'',m^{V}) + (m'',m^{VI})\}\,p''$$
$$-(m'',m)\,p - (m'',m')\,p' - (m'',m''')\,p''' - (m'',m^{IV})\,p^{IV} - (m'',m^{V})\,p^{V} - (m'',m^{VI})\,p^{VI},$$
$$\frac{dq'''}{dt} = \{(m''',m) + (m''',m') + (m''',m'') + (m''',m^{IV}) + (m''',m^{V}) + (m''',m^{VI})\}\,p'''$$
$$-(m''',m)\,p - (m''',m')\,p' - (m''',m'')\,p'' - (m''',m^{IV})\,p^{IV} - (m''',m^{V})\,p^{V} - (m''',m^{VI})\,p^{VI},$$
$$\frac{dq^{IV}}{dt} = \{(m^{IV},m) + (m^{IV},m') + (m^{IV},m'') + (m^{IV},m''') + (m^{IV},m^{V}) + (m^{IV},m^{VI})\}\,p^{IV}$$
$$-(m^{IV},m)\,p - (m^{IV},m')\,p' - (m^{IV},m'')\,p'' - (m^{IV},m''')\,p''' - (m^{IV},m^{V})\,p^{V} - (m^{IV},m^{VI})\,p^{VI},$$
$$\frac{dq^{V}}{dt} = \{(m^{V},m) + (m^{V},m') + (m^{V},m'') + (m^{V},m''') + (m^{V},m^{IV}) + (m^{V},m^{VI})\}\,p^{V}$$
$$-(m^{V},m)\,p - (m^{V},m')\,p' - (m^{V},m'')\,p'' - (m^{V},m''')\,p''' - (m^{V},m^{IV})\,p^{IV} - (m^{V},m^{VI})\,p^{VI},$$
$$\frac{dq^{VI}}{dt} = \{(m^{VI},m) + (m^{VI},m') + (m^{VI},m'') + (m^{VI},m''') + (m^{VI},m^{IV}) + (m^{VI},m^{V})\}\,p^{VI}$$
$$-(m^{VI},m)\,p - (m^{VI},m')\,p' - (m^{VI},m'')\,p'' - (m^{VI},m''')\,p''' - (m^{VI},m^{IV})\,p^{IV} - (m^{VI},m^{V})\,p^{V}.$$

Положивъ

$$p = M\sin(gt+\beta),\; p' = M'\sin(gt+\beta), \text{ и пр.}$$
$$q = M\cos(gt+\beta),\; q' = M'\cos(gt+\beta), \text{ и пр.}$$

и вставивъ вмѣсто (m,m'), (m,m''), и пр. ихъ извѣстныя уже величины, получимъ семь уравненій (G):

$$(g + 5'',500903)\,M - 2'',910272\,M' - 0'',884164\,M'' - 0'',027981\,M'''$$
$$- 1'',599599\,M^{IV} - 0'',077035\,M^{V} - 0'',001852\,M^{VI} = 0,$$
$$(g + 11'',587972)\,M' - 0'',285177\,M - 6'',803375\,M'' - 0'',102035\,M'''$$
$$- 4'',194347\,M^{IV} - 0'',198298\,M^{V} - 0'',004740\,M^{VI} = 0,$$
$$(g + 12'',925261)\,M'' - 0'',065888\,M - 5'',173924\,M' - 0'',298197\,M'''$$
$$- 7'',053983\,M^{IV} - 0'',325549\,M^{V} - 0'',007720\,M^{VI} = 0,$$

$$(g+17'',558543)M'''-0'',012602\,M-0'',468969\,M'-1'',802212\,M''$$
$$-14'',630600\,M^{IV}-0'',629534\,M^{V}-0'',014626\,M^{VI}=0,$$
$$(g+7'',496174)M^{IV}-0'',000153\,M-0'',004086\,M'-0'',009036\,M''$$
$$-0'',003101\,M'''-7'',374477\,M^{V}-0'',105321\,M^{VI}=0,$$
$$(g+18'',605304)M^{V}-0'',000018\,M-0'',000477\,M'-0'',001030\,M''$$
$$-0'',000330\,M'''-18'',216580\,M^{IV}-0'',386869\,M^{VI}=0,$$
$$(g+2'',328019)M^{VI}-0'',000002\,M-0'',000041\,M'-0'',000088\,M''$$
$$-0'',000028\,M'''-0'',936010\,M^{IV}-1'',391850\,M^{V}=0.$$

По исключеніи коэффиціентовъ M, M' и пр. изъ этихъ уравненій, выйдетъ опять уравненіе седьмой степени по g; но какъ изъ дифференціальныхъ уравненій (E) и (F) видно, что они могутъ удовлетворяться условіями

$$p=p'=p''=\ldots\ldots,\ q=q'=q''=\ldots\ldots,$$

требующими, чтобъ $M=M'=M''=\ldots$ и $g=0$; то въ этомъ случаѣ уравненіе по g понизится одной степенью; однакожъ и тогда прямое его рѣшеніе останется весьма затруднительнымъ: поэтому опять должно прибѣгнуть къ постепенному приближенію для опредѣленія g и количествъ M, M' и пр.

14. Предположивъ, что планеты Юпитеръ, Сатурнъ и Уранъ составляютъ отдѣльную систему, изъ трехъ послѣднихъ уравненій (G) выведемъ

$$(g+\ 7'',496174)M^{IV}-\ 7'',374477\,M^{V}-0'',105321\,M^{VI}=0,$$
$$(g+18'',605304)M^{V}-18'',216580\,M^{IV}-0'',386869\,M^{VI}=0,$$
$$(g+\ 2'',328019)M^{VI}-\ 0'',936010\,M^{IV}-1'',391850\,M^{V}=0,$$

которыя даютъ уравненіе

$$g^3+28'',429497.g^2+65'',258545.g+0'',733386=0,$$

удовлетворяемое величинами

$$g=-\ 0'',011289,$$
$$g_1=-\ 2'',506078,$$
$$g_2=-25'',912129.$$

Чтобъ эти величины и соотвѣтствующія имъ отношенія между количествами M, M_1, и пр. удовлетворяли всѣмъ семи уравненіямъ (G), должно ихъ исправить по изъясненному въ чл. 6, и пр. Такимъ образомъ найдемъ

$$g=0,$$

$$\frac{M}{M^{VI}}=\frac{M'}{M^{VI}}=\frac{M''}{M^{VI}}=\frac{M'''}{M^{VI}}=\frac{M^{IV}}{M^{VI}}=\frac{M^{V}}{M^{VI}}=1;$$

$$g_1 = -2'',504470,$$

$$\frac{M_1}{M_1^{VI}} = -0.2342409, \quad \frac{M_1'}{M_1^{VI}} = -0,1511952,$$

$$\frac{M_1''}{M_1^{VI}} = -0,1375880, \quad \frac{M_1'''}{M_1^{VI}} = -0,1045935,$$

$$\frac{M_1^{IV}}{M_1^{VI}} = -0,0835881, \quad \frac{M_1^{V}}{M_1^{VI}} = -0,0705605.$$

$$g_2 = -25'',914299,$$

$$\frac{M_2}{M_2^{VI}} = -0,3917601, \quad \frac{M_2'}{M_2^{VI}} = -0,3989382,$$

$$\frac{M_2''}{M_2^{VI}} = -3,9870545, \quad \frac{M_2'''}{M_2^{VI}} = -13,6260018,$$

$$\frac{M_2^{IV}}{M_2^{VI}} = 9,2830262, \quad \frac{M_2^{V}}{M_2^{VI}} = -23,1882597.$$

Самые же коэффиціенты M, M' и пр. и соотвѣтствующія имъ величины β, β_1, β_2 опредѣляются посредствомъ

$$p_0^{VI} = 0,0129260\,(\bar{2},1114653), \quad p_0^{V} = 0,0403916\,(\bar{2},6062908),$$
$$p_0^{IV} = 0,0226956\,(\bar{2},3559423),$$

$$q_0^{VI} = 0,0039545\,(\bar{3},5970979), \quad q_0^{V} = -0,0162662\,(\bar{2},2112863),$$
$$q_0^{IV} = -0,0033632\,(\bar{3},5267534),$$

и по вычисленіямъ, подобнымъ тѣмъ, которыя предложены въ чл. 8, найдено:

$$\beta = 103^\circ\ 12'\ 41'',$$
$$M = M' = M'' = M''' = M^{IV} = M^{V} = M^{VI} = 0,0274242\,(\bar{2},4381340).$$

$$\beta_1 = 126^\circ\ 36'\ 11'',$$
$$M_1^{VI} = -0,0164705\,(\bar{2},2167075\,-), \quad M_1 = 0,0038580\,(\bar{3},5863703),$$
$$M_1' = 0,0024903\,(\bar{3},3962456), \quad M_1'' = 0,0022661\,(\bar{3},3552881),$$
$$M_1''' = 0,0017227\,(\bar{3},2362123), \quad M_1^{IV} = 0,0013767\,(\bar{3},1388519),$$
$$M_1^{V} = 0,0011621\,(\bar{3},0652692).$$

$$\beta_2 = 126^\circ\ 6'\ 9'',$$
$$M_2^{VI} = -0,0006810\,(\bar{4},8331912\,-), \quad M_2 = 0,0002668\,(\bar{4},4262114),$$
$$M_2' = 0,0002717\,(\bar{4},4340968), \quad M_2'' = 0,0027154\,(\bar{3},4338434),$$
$$M_2''' = 0,0092802\,(\bar{3},9675597), \quad M_2^{IV} = -0,0063224\,(\bar{3},8008809),$$
$$M_2^{V} = 0,0157928\,(\bar{2},1984594).$$

15. Для отдѣльной системы планетъ Меркурія, Венеры, Земли и Марса, изъ первыхъ четырехъ уравненій (G) извлекаемъ уравненія:

$$(g + 5'',500903)\,M - 2'',910272\,M' - 0'',884164\,M'' - 0'',027981\,M''' = 0,$$
$$(g + 11'',587972)\,M' - 0'',285177\,M - 6'',803375\,M'' - 0'',102035\,M''' = 0,$$
$$(g + 12'',925261)\,M'' - 0'',065888\,M - 5'',173924\,M' - 0'',298197\,M''' = 0,$$
$$(g + 17'',558543)\,M''' - 0'',012602\,M - 0'',468969\,M' - 1'',802212\,M'' = 0,$$

изъ которыхъ выходитъ уравненіе четвертой степени:

$$g^4 + 47,572679\,.\,g^3 + 774,9530916\,.\,g^2 + 4968,1750601\,.\,g + 10776,0151743 = 0.$$

Корни этого уравненія суть:

$$g_3 = -\ 4'',956182,$$
$$g_4 = -\ 6'',774810,$$
$$g_5 = -\ 17'',431810,$$
$$g_6 = -\ 18'',409874.$$

Исправивъ ихъ такъ, чтобъ они удовлетворяли всѣмъ семи уравненіямъ (G), и взявъ

$$p_0 = 0,0882740,\quad q_0 = 0,0853867,$$
$$p_0' = 0,0572013,\quad q_0' = 0,0154754,$$
$$p_0'' = 0,\quad q_0'' = 0,$$
$$p_0''' = 0,0240235,\quad q_0''' = 0,0216355,$$

находимъ

$$g_3 = -\ 4'',950464,\quad \beta_3 = 20°\ 55'\ 19'',$$
$$M_3 = 0,1090698\ (\bar{1},0377048),\quad M_3' = 0,0195908\ (\bar{2},2920522),$$
$$M_3'' = 0,0106600\ (\bar{2},0277572).\quad M_3''' = 0,0024332\ (\bar{3},3861851),$$
$$M_3^{IV} = -\ 0,00000034\ (\bar{7},5402043),\quad M_3^{V} = 0,00000253\ (\bar{6},4039780),$$
$$M_3^{VI} = -\ 0,00000021\ (\bar{7},3283796).$$

$$g_4 = -\ 6'',794076,\quad \beta_4 = 106°\ 54'\ 13'',$$
$$M_4 = 0,0252813\ (\bar{2},4027994),\quad M_4' = -\ 0,0081563\ (\bar{3},9114940),$$
$$M_4'' = -\ 0,0066941\ (\bar{3},8256938),\quad M_4''' = -\ 0,0014352\ (\bar{3},1569148),$$
$$M_4^{IV} = -\ 0,0000023\ (\bar{6},3662918),\quad M_4^{V} = -\ 0,0000214\ (\bar{5},3310494),$$
$$M_4^{VI} = 0,00000206\ (\bar{6},3149393).$$

$$g_5 = -\ 17'',406732,\quad \beta_5 = 114°\ 50'\ 26'',$$
$$M_5 = -\ 0,0014967\ (\bar{3},1751340),\quad M_5' = 0,0085917\ (\bar{3},9340789),$$
$$M_5'' = -\ 0,0082167\ (\bar{3},9146986),\quad M_5''' = -\ 0,0541037\ (\bar{2},7332270),$$
$$M_5^{IV} = 0,0000025\ (\bar{6},3988645),\quad M_5^{V} = 0,0000212\ (\bar{5},3275689),$$
$$M_5^{VI} = -\ 0,0000020\ (\bar{6},3030086),$$

$$g_6 = -18'',432286,\ \beta_6 = 73^\circ\ 27'\ 16'',$$
$$M_6 = -0,0036682\,(\bar{3},5644513),\ M'_6 = 0,0222155\,(\bar{2},3466581),$$
$$M''_6 = -0,0215490\,(\bar{2},3334277),\ M'''_6 = 0,0315320\,(\bar{2},4987515),$$
$$M^{IV}_6 = 0,00000012\,(\bar{7},0808233),\ M^{V}_6 = 0,00000071\,(\bar{7},8525667),$$
$$M^{VI}_6 = -0,00000006\,(\bar{8},7958132).$$

16. И такъ общія формулы для вѣковыхъ измѣненій въ наклоненіяхъ и въ долготахъ узловъ суть:

Земля.

$$\begin{aligned}
p'' = 0,0266984 &+ 0,0022661 \sin(126^\circ\ 36'\ 11'' - 2'',504470\,t)\\
&+ 0,0027154 \sin(126^\circ\ 6'\ 9'' - 25'',914299\,t)\\
&+ 0,0106600 \sin(20^\circ\ 55'\ 19'' - 4'',950464\,t)\\
&- 0,0066941 \sin(106^\circ\ 54'\ 13'' - 6'',794076\,t)\\
&- 0,0082167 \sin(114^\circ\ 50'\ 26'' - 17'',406732\,t)\\
&- 0,0215490 \sin(73^\circ\ 27'\ 16'' - 18'',432286\,t),
\end{aligned}$$

$q'' = -0,0062676 +$ и пр. съ *cos* вмѣсто *sin*.

Меркурій.

$$\begin{aligned}
p = 0,0266984 &+ 0,0038580 \sin(126^\circ\ 36'\ 11'' - 2'',504470\,t)\\
&+ 0,0002668 \sin(126^\circ\ 6'\ 9'' - 25'',914299\,t)\\
&+ 0,1090698 \sin(20^\circ\ 55'\ 19'' - 4'',950464\,t)\\
&+ 0,0252813 \sin(106^\circ\ 54'\ 13'' - 6'',794076\,t)\\
&- 0,0014967 \sin(114^\circ\ 50'\ 26'' - 17'',406732\,t)\\
&- 0,0036682 \sin(73^\circ\ 27'\ 16'' - 18'',432286\,t),
\end{aligned}$$

$q = -0,0062676 +$ и пр. съ *cos* вмѣсто *sin*.

Венера.

$$\begin{aligned}
p' = 0,0266984 &+ 0,0024903 \sin(126^\circ\ 36'\ 11'' - 2'',504470\,t)\\
&+ 0,0002717 \sin(126^\circ\ 6'\ 9'' - 25'',914299\,t)\\
&+ 0,0195908 \sin(20^\circ\ 55'\ 19'' - 4'',950464\,t)\\
&- 0,0081563 \sin(106^\circ\ 54'\ 13'' - 6'',794076\,t)\\
&+ 0,0085917 \sin(114^\circ\ 50'\ 26'' - 17'',406732\,t)\\
&+ 0,0222155 \sin(73^\circ\ 27'\ 16'' - 18'',432268\,t),
\end{aligned}$$

$q' = -0,0062676 +$ и пр. съ *cos* вмѣсто *sin*.

Марсъ.

$$p''' = 0,0266984 + 0,0017227 \sin(126^\circ\ 36'\ 11'' - 2'',504470\, t)$$
$$+ 0,0092802 \sin(126^\circ\ 6'\ 9'' - 25'',914299\, t)$$
$$+ 0,0024332 \sin(20^\circ\ 55'\ 19'' - 4'',950464\, t)$$
$$- 0,0014352 \sin(106^\circ\ 54'\ 13'' - 6'',794076\, t)$$
$$- 0,0541037 \sin(114^\circ\ 50'\ 26'' - 17'',406732\, t)$$
$$+ 0,0315320 \sin(73^\circ\ 27'\ 16'' - 18'',432286\, t),$$

$q''' = - 0,0062676 +$ и пр. съ *cos* вмѣсто *sin*.

Юпитеръ.

$$p^{IV} = 0,0266984 + 0,0013767 \sin(126^\circ\ 36'\ 11'' - 2'',504470\, t)$$
$$- 0,0063224 \sin(126^\circ\ 6'\ 9'' - 25'',914299\, t)$$
$$- 0,00000034 \sin(20^\circ\ 55'\ 19'' - 4'',950464\, t)$$
$$- 0,0000023 \sin(106^\circ\ 54'\ 13'' - 6'',794076\, t)$$
$$+ 0,0000025 \sin(114^\circ\ 50'\ 26'' - 17'',406732\, t)$$
$$+ 0,00000012 \sin(73^\circ\ 27'\ 16'' - 18'',432286\, t),$$

$q^{IV} = - 0,0062676 +$ и пр. съ *cos* вмѣсто *sin*.

Сатурнъ.

$$p^{V} = 0,0266984 + 0,0011621 \sin(126^\circ\ 36'\ 11'' - 2'',504470\, t)$$
$$+ 0,0157928 \sin(126^\circ\ 6'\ 9'' - 25'',914299\, t)$$
$$+ 0,00000253 \sin(20^\circ\ 55'\ 19'' - 4'',950464\, t)$$
$$- 0,0000214 \sin(106^\circ\ 54'\ 13'' - 6'',794076\, t)$$
$$+ 0,0000212 \sin(114^\circ\ 50'\ 26'' - 17'',406732\, t)$$
$$+ 0,00000071 \sin(73^\circ\ 27'\ 16'' - 18'',432286\, t),$$

$q^{V} = - 0,0062676 +$ и пр. съ *cos* вмѣсто *sin*.

Уранъ.

$$p^{VI} = 0,0266984 - 0,0164705 \sin(126^\circ\ 36'\ 11'' - 2'',504470\, t)$$
$$- 0,0006810 \sin(126^\circ\ 6'\ 9'' - 25'',914299\, t)$$
$$- 0,00000021 \sin(20^\circ\ 55'\ 19'' - 4'',950464\, t)$$
$$+ 0,00000206 \sin(106^\circ\ 54'\ 13'' - 6'',794076\, t)$$
$$- 0,0000020 \sin(114^\circ\ 50'\ 26'' - 17'',406732\, t)$$
$$- 0,00000006 \sin(73^\circ\ 27'\ 16'' - 18'',432286\, t),$$

$q^{VI} = - 0,0062676 +$ и пр. съ *cos* вмѣсто *sin*.

17. Изъ этихъ формулъ видно, что наклоненія всѣхъ орбитъ относительно эклиптики 1800 г. измѣняются періодически, и предѣлы ихъ суть:

для Земли:	4° 32′ 49″,
» Меркурія:	9° 42′ 26″,
» Венеры:	5° 4′ 16″,
» Марса:	7° 17′ 25″,
» Юпитера:	2° 0′ 43″,
» Сатурна:	2° 32′ 37″,
» Урана:	2° 33′ 9″.

Первое изъ этихъ чиселъ показываетъ, что предѣлы наклоненія эклиптики къ экватору суть;

$$28^\circ\ 0'\ 43'' \text{ и } 18^\circ\ 55'\ 3''.$$

18. Въ найденныхъ общихъ формулахъ, долготы перигеліевъ и узловъ считаются отъ весенней точки равноденствія 1800 г.; но какъ она ежегодно отступаетъ на 50″,24, то ко всѣмъ числамъ, помножаемымъ на t, надобно придавать 50″,24, — что видно изъ слѣдующаго: когда, на примѣръ, въ 1800 г. долгота перигелія какой нибудь планеты есть ω, тогда относительно подвижной точки равноденствія долгота его чрезъ t лѣтъ будетъ

$$(\omega) = \omega + 50'',24\,t,$$

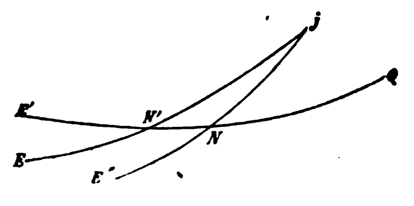
и потому

$$\operatorname{tang}(\omega) = \frac{f\sin(\omega + 50'',24\,t)}{f\cos(\omega + 50'',24\,t)} = \frac{f\sin\omega\cos(50'',24\,t) + f\cos\omega\sin(50'',24\,t)}{f\cos\omega\cos(50'',24\,t) - f\sin\omega\sin(50'',24\,t)}$$

$$= \frac{M\sin(\beta + gt)\cos(50'',24\,t) + \ldots + M\cos(\beta + gt)\sin(50'',24\,t) + \ldots}{M\cos(\beta + gt)\cos(50'',24\,t) + \ldots - M\sin(\beta + gt)\sin(50'',24\,t) - \ldots}$$

$$= \frac{M\sin[\beta + (g + 50'',24)\,t] + M_1\sin[\beta_1 + (g_1 + 50'',24\,t] + \ldots}{M\cos[\beta + (g + 50'',24)\,t] + M_1\cos[\beta_1 + (g_1 + 50'',24\,t] + \ldots}$$

19. Теперь составимъ общія формулы для строгаго вычисленія измѣненій въ наклоненіи эклиптики и въ предвареніи равноденствій.



Пусть $E'Q$ будетъ экваторъ, $JN'E$ — эклиптика въ 1800 г., и JNE'' — эклиптика въ $1800 + t$, гдѣ t можетъ быть количество положительное и отрицательное: въ треугольникѣ $JN'N$, сторона $N'N$ будетъ представлять предвареніе равноденствія $\delta\rho$ по прямому-восхожденію, сторона $N'J$ — долготу узла N, разность $N'J - NJ = \delta l_0$ — предваренію равноденстія по долготѣ; *то и другое предвареніе равноденствій происходятъ только отъ*

дѣйствія планетъ. Въ томъ же треугольникѣ, уголъ $JN'Q = \varepsilon_0$ есть наклоненіе эклиптики 1800 г. къ экватору, уголъ $JNQ = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0$, гдѣ $\delta\varepsilon_0$ есть *измѣненіе этого наклоненія также только отъ дѣйствія планетъ*, и наконецъ уголъ $N'JN = i$ наклоненіе эклиптики къ самой себѣ по истеченіи времени t. И такъ, по малости угла i, можемъ взять

$$p'' = i \sin N,\ q'' = i \cos N.$$

Для опредѣленія же измѣненія $\delta\varepsilon_0$, изъ треугольника $N'JN$ беремъ

$$\cos(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0) = \cos\varepsilon_0 \cos i - \sin i \sin\varepsilon_0 \cos N,$$

или

$$\cos\varepsilon_0 - \sin\varepsilon_0\,\delta\varepsilon_0 = \cos\varepsilon_0 - i \sin\varepsilon_0 \cos N;$$

слѣд.

$$\delta\varepsilon_0 = i\cos N = q'',$$
$$\delta\varepsilon_0 \operatorname{tang} N = i \sin N = p''.$$

Тотъ же треугольникъ даетъ

$$\frac{\sin NJ}{\sin N'J} = \frac{\sin(N - \delta l_0)}{\sin N} = \frac{\sin\varepsilon_0}{\sin(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0)},$$

изъ чего выводимъ

$$\delta l_0 = \delta\varepsilon_0 \operatorname{tang} N \operatorname{cotang}\varepsilon_0 = p'' \operatorname{cotang}\varepsilon_0.$$

Наконецъ

$$\frac{\sin NJ}{\sin N'N} = \frac{\sin(N - \delta l_0)}{\delta\rho} = \frac{\sin\varepsilon_0}{i};$$

слѣд.

$$\delta\rho = \frac{i\sin N}{\sin\varepsilon_0} = \frac{p''}{\sin\varepsilon_0}.$$

Долгота и прямое-восхожденіе отнесены здѣсь къ весенней точкѣ равноденствія 1800 г.: чтобъ отнести ихъ къ подвижной точкѣ, должно принять въ расчетъ ея годичное движеніе 50'',24127, согласно съ предъидущимъ чл., и потому общая формула для выраженія величины $\delta\varepsilon_0$ будетъ (H):

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_0 = {} & 0{,}0274242\cos(103°12'41'' + 50'',24127t) + 0{,}0022661\cos(126°36'11'' + 47'',73680t)\\ & + 0{,}0027154\cos(126°\ 6'\ 9'' + 24'',32698t) + 0{,}0106600\cos(20°55'19'' + 45'',29081t)\\ & - 0{,}0066941\cos(106°54'13'' + 43'',44720t) - 0{,}0082167\cos(114°50'26'' + 32'',83454t)\\ & - 0{,}0215490\cos(73°27'16'' + 31'',80899t).\end{aligned}$$

Принявъ $\varepsilon_0 = 23°\ 27'\ 54'',35$, для δl_0 получимъ формулу (K)

$$\begin{aligned}\delta l_0 = {} & 0{,}0631766\sin(103°12'41'' + 50'',24127t) + 0{,}0052204\sin(126°36'11'' + 47'',73680t)\\ & (\bar{2},8005562) \qquad (\bar{3},7177103)\\ & + 0{,}0062555\sin(126°\ 6'\ 9'' + 24'',32698t) + 0{,}0245572\sin(20°55'19'' + 45'',29081t)\\ & (\bar{3},7962656) \qquad (\bar{2},3901794)\\ & - 0{,}0154211\sin(106°54'13'' + 43'',44720t) - 0{,}0189287\sin(114°50'26'' + 32'',83454t)\\ & (\bar{2},1881160) \qquad (\bar{2},2771208)\\ & - 0{,}0496420\sin(73°27'16'' + 31'',80899t).\\ & (\bar{2},6958499)\end{aligned}$$

Эти формулы не трудно разложить по степенямъ t; но какъ выражаемыя ими величины суть періодическія, то, принимая въ уваженье современное состоянье практической астрономіи, думаю, что не должно перемѣнять ихъ общаго вида; притомъ вычисленіе ихъ совсѣмъ не затруднительно. Такъ, положивъ $t = 100$, тотчасъ находимъ

$$\delta\varepsilon_0 = -47'',4822.$$

Если же формулу (H) разложимъ до членовъ со второю степенью t; то получимъ

$$\delta\varepsilon_0 = -0'',473807\,t - 0'',00000428\,t^2;\ldots (L)$$

слѣд, для $t = 100$, выйдетъ

$$\delta\varepsilon_0 = -47'',4235,$$

что противъ предъидущаго числа менѣе 0'',0587, иля почти 0'',06.

Также формула (K), будучи разложена до членовъ со второй степенью t, даетъ

$$\delta l_0 = 0'',081433\,t - 0'',0002212\,t^2,\ldots (M)$$

изъ чего для $t = 100$, выйдетъ $\delta l_0 = 5'',57$; а по общей формулѣ $\delta l_0 = 5'',93$; слѣд, разность равняется почти 0'',4.

20. Выраженіе

$$\delta\rho = \frac{p''}{\sin\varepsilon_0}$$

даетъ для $\delta\rho$ общую формулу (N):

$$\begin{aligned}\delta\rho = {} & 0,0688721\sin(103°12'41''+50'',24127t) + 0,0056911\sin(126°36'11''+47'',73680t) \\ & (\bar{2},8380436) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\bar{3},7551977) \\ & + 0,0040829\sin(126°\ 6'\ 9''+24'',32698t) + 0,0267711\sin(20°55'19''+45'',29081t) \\ & (\bar{3},6109764) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\bar{2},4276668) \\ & - 0,0168114\sin(106°54'13''+43'',44720t) - 0,0206351\sin(114°50'26''+32'',83454t) \\ & (\bar{2},2256034) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\bar{2},3146082) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad - 0,0541174\sin(73°27'16''+31'',80899t). \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (\bar{2},7333369)\end{aligned}$$

21. Звѣздный годъ не измѣняется, потому что большая полуось земли, какъ и всѣхъ планетъ, не подлежитъ вѣковымъ возмущеніямъ. Если бы не было предваренія равноденствій и если бы оно не имѣло вѣковыхъ измѣненій, то тропическій годъ также равнялся бы звѣздному и также имѣлъ бы величину постоянную; но отъ предваренія равноденствій онъ короче года звѣзднаго; отъ вѣковыхъ же измѣненій предваренія равноденствія перемѣняется и его величина: для опредѣленія ежегодныхъ его перемѣнъ въ данное время до и послѣ 1800 г., должно выраженіе δl_0 дифференцировать относитель-

но t и потомъ принять $dt = 1$; послѣ того, чтобъ найденный результатъ превратить во время, надобно его помножить на

$$\frac{24\ ч.}{59'\ 8'',3299} = 24{,}35017\ (1{,}3865030),$$

потому что солнце въ каждыя сутки средняго тропическаго года проходитъ дугу въ 59′ 8″,3299. Когда чрезъ D изобразимъ годично-вѣковое измѣненіе средняго тропическаго года, тогда, по объясненному, получимъ

$$\begin{aligned}
D = [&3'',1740722 \cos(103°12'41'' + 50'',24127\,t) + 0'',2492089 \cos(126°36'11'' + 47'',73680\,t) \\
&(0{,}5016168) \qquad\qquad\qquad\qquad (\bar{1}{,}3965636) \\
&+ 0'',1521787 \cos(126°\ 6'\ 9'' + 24'',32698\,t) + 1'',1122166 \cos(20°55'19'' + 45'',29081\,t) \\
&(\bar{1}{,}1823538) \qquad\qquad\qquad\qquad (0{,}0461894) \\
&- 0,6700046 \cos(106°54'13'' + 43'',44720\,t) - 0'',6215151 \cos(114°50'26'' + 32'',83454\,t) \\
&(\bar{1}{,}8260778) \qquad\qquad\qquad\qquad (\bar{1}{,}7934517) \\
&\qquad - 1'',5790625 \cos(73°27'16'' + 31'',80899\,t)] \times 24{,}35017. \\
&\qquad (0{,}1983994)
\end{aligned}$$

Впрочемъ, для рѣшенія этого вопроса можно употреблять формулу (M), безъ ощутительной погрѣшности.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Напечатано: стран.	строка		Должно читать:
517	12	$-K\cos(i\beta+\zeta)]$	$-K\cos(i\beta+\zeta)]\,dt$
518	4	$2a^2nf\sin(\xi-\omega)$	$2a^2n\frac{du}{dt}f\sin(\xi-\omega)$
—	10	$\int\frac{dR}{dt}r\,dt$	$\int\frac{dR}{dr}r\,dt$
520	23	$\sin(\zeta'-\omega')$	$\sin(\zeta-\omega')$
521	7	$(2i-1)\overset{(i)}{A}+\dots$	$i\overset{(i)}{A}+\dots$
522	2	$\frac{m'a^2}{2n}\cdot\frac{d^2A^{(0)}}{(da)^2}$	$\frac{m'a^2}{2n}\cdot\frac{d^2A^{(1)}}{(da)^2}$
523	22	$-f\cos(\zeta-\omega)]\,t$	$-f\cos(\zeta-\omega)\,\delta\omega]\,t$
—	25	$\frac{D}{m}$	$\frac{D}{2n}$
524	3	$\frac{D}{2n}f\cos\omega+\frac{D'}{2n}f'\cos\omega'$	$-\frac{D}{2n}f\cos\omega-\frac{D'}{2n}f'\cos\omega'$
525	22	$-\frac{3m'a^2a'^2}{4(a'^2-a^2)}$	$-\frac{3m'na^2a'^2}{4(a'^2-a^2)^2}$
—	24	$-\frac{3m'naa'}{2(1-a^2)^2}$	$-\frac{3m'naa'}{2(a'^2-a^2)^2}$
527	28	$\cos\varepsilon\cos I'$	$\cos\varepsilon\sin I'$
529	18	322°	332°

